B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XL, I

VORLESUNGEN ÜBER ZAHLEN- UND FUNKTIONENLEHRE

VON

ALFRED PRINGSHEIM
PROFESSOR DER MATHEMATIK
AN DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

ERSTER BAND

ZAHLENLEHRE



LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER
1921

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XL, I. 3

VORLESUNGEN ÜBER ZAHLENLEHRE

(REELLE UND KOMPLEXE ZAHLEN UNENDLICHE ALGORITHMEN)

VON

ALFRED PRINGSHEIM
PROFESSOR DER MATHEMATIK
AN DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

DRITTE ABTEILUNG

KOMPLEXE ZAHLEN
REIHEN MIT KOMPLEXEN GLIEDERN
UNENDLICHE PRODUKTE UND KETTENBRÜCHE



LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER
1921

Published by J. W. Edwards
Ann Arbor, Michigan
1948

Lithoprinted by Edwards Brothers, Inc.
Ann Arbor, Michigan, U S.A

Vorwort.

Nach unfreiwilliger, durch den Krieg und seine verhängnisvollen Folgen hervorgerufener Pause von nahezu fünf Jahren erscheint nun endlich diese dritte und letzte Abteilung meiner Vorlesungen über Zahlenlehre. Sie beginnt mit der Einführung der komplexen Zahlen. Abweichend von der in den Lehrbüchern zumeist üblich gewordenen Methode, diese letzteren von vornherein als Zahlenpaare mit überaus willkürlich erscheinenden Rechnungsgesetzen zu definieren, wird im Anschluß an die Gleichung $x^2 = -a^2$ (wo a jede beliebige reelle Zahl vorstellt) zunächst das System der (rein) imaginären Zahlen als ein dem System der reellen Zahlen in seiner Struktur vollkommen kongruentes und durch die Brücke der Multiplikation mit jenem verbundenes eingeführt, während sodann die Unmöglichkeit, die Addition innerhalb des so geschaffenen gemeinsamen Gebietes auszuführen, mit angemessener Modifikation der bisher bei der Ausgestaltung des Zahlenvorrats durchweg befolgten Methode die Neuschöpfung der komplexen Zahlen nach sich zieht. Nach Festsetzung der hieraus entspringenden Rechnungsregeln, dem Nachweise der Äquivalenz gewisser komplexer und reeller Zahlenmengen und der Ausdehnung des Grenzbegriffes auf komplexe Zahlen folgt als zweites Kapitel die entsprechende Vervollständigung der in der zweiten Abteilung auf reelle Zahlen beschränkten Reihenlehre, insbesondere eine für die Anwendung auf Reihen mit komplexen Gliedern zweckmäßige Umgestaltung der Kriterien zweiter Art, sowie die Verwertung der sogenannten Hölderschen und Cesàroschen Mittelwerte zur Reduktion („Summation") uneigentlich divergenter Reihen. Das Schlußkapitel dieses (dritten) Abschnittes enthält die elementare Theorie der unendlichen Produkte, insbesondere den exakten Nachweis für das Zusammenfallen von absoluter und unbedingter Konvergenz und eine Anwendung der Lehre von den unendlichen Produkten auf die Verschärfung und Vervollständigung gewisser Konvergenzkriterien für unendliche Reihen

Den Inhalt des vierten und letzten Abschnittes dieses ganzen Bandes bildet eine ausführliche Theorie der Kettenbrüche, vorwiegend der unendlichen, jedoch auch der endlichen, soweit dies für den Aufbau der Theorie erforderlich schien. Er zerfällt in drei Kapitel, deren erstes

die Grundlagen der Theorie enthält, während die beiden anderen die besonderen Eigenschaften der Kettenbrüche aus reellen bzw. derjenigen aus komplexen Zahlen behandeln und zumal in bezug auf Konvergenzuntersuchungen ein annähernd vollständiges Bild unserer derzeitigen Kenntnisse darbieten dürften. Die Darstellung ist merklich elementarer gehalten als in den entsprechenden Partien des in seiner Art ausgezeichneten Perronschen Lehrbuches und könnte vielleicht geeignet sein, dem Studium dieses lehrreichen, nach meinem Dafürhalten bei weitem nicht nach Gebühr gewürdigten Stoffgebietes auch unter Anfängern neue Freunde zu gewinnen.

Den Schluß dieser Abteilung bildet ein auf den ganzen ersten Band sich beziehender Anhang, der aus Literaturnachweisen, Anmerkungen und Ergänzungen, sowie einem ausführlichen alphabetischen Sachregister besteht.

In der Zwischenzeit seit dem Erscheinen der beiden ersten Abteilungen sind diese zum Gegenstande verschiedener Besprechungen gemacht worden, die neben Worten der Anerkennung naturgemäß auch mancherlei Einwendungen — berechtigte und unberechtigte — enthalten. Obschon sonst kein Freund antikritischer Erörterungen, so glaubte ich immerhin im Hinblick darauf, daß dieses Buch gewissermaßen das Kristallisationsprodukt eines mir ganz besonders am Herzen liegenden Teils meiner mehr als vierzigjährigen Lehrtätigkeit darstellt, auf einige dieser Einwendungen, zumal solche, die mir auf Flüchtigkeit oder Unverständnis zu beruhen scheinen, in dem obigen Anhange etwas ausführlicher eingehen zu sollen.

Bei der Korrektur haben mich die Herren Dr. Hartogs, Dr. v. Pidoll, Dr. Rosenthal, Fräulein Dr. Schöll und Herr Dr. Szász in liebenswürdigster Weise unterstützt. Es gereicht mir zur Freude, ihnen allen an dieser Stelle meinen aufrichtigen Dank für ihre Bemühungen aussprechen zu können, ganz besonders auch noch Herrn Hartogs für seine scharfsinnigen kritischen Randbemerkungen, die mich zu mannigfachen Verbesserungen während des Druckes veranlaßt haben, und Fräulein Schöll für die Vorarbeiten zum Sachregister.

München, im April 1921.

Inhaltsverzeichnis.

Abschnitt III.

Komplexe Zahlen, unendliche Reihen und Produkte aus komplexen Zahlen.

Kapitel I.

Komplexe Zahlen, Zahlenfolgen und Grenzwerte.

Seite

Kapitel II.

Unendliche Reihen mit komplexen Gliedern.

Kapitel III.

Unendliche Produkte.

Abschnitt IV.

Endliche und unendliche Kettenbrüche.

Kapitel I.

Allgemeine Grundlagen der Lehre von den Kettenbrüchen.

Kapitel II.

Endliche und unendliche Kettenbrüche aus reellen Zahlen.

Kapitel III.

Kettenbrüche aus komplexen Zahlen.



Abschnitt III.

Komplexe Zahlen, unendliche Reihen und Produkte aus komplexen Zahlen.

Kapitel I.

Komplexe Zahlen, Zahlenfolgen und Grenzwerte.

§ 68. Die imaginären Zahlen.

1. Die Erledigung des Radizierungsproblems, d. h. die Auflösung der Gleichung $x^n = a$, welche uns den ersten Anlaß zur Einführung der Irrationalzahlen gegeben hatte, bietet im Falle eines *geradzahligen* Exponenten n noch eine weitere Schwierigkeit, welche selbst mit unserem nunmehr so wesentlich erweiterten und über den ursprünglich ins Auge gefaßten Zweck weit hinausreichenden Zahlenvorrate sich nicht bewältigen läßt.

Bedeutet nämlich α irgendeine *positive* oder *negative* reelle Zahl, also α^2 eine in jedem Falle *positive* Zahl, so besitzt offenbar schon die der einfachsten Annahme $n = 2$ entsprechende Gleichung

$$\text{(A)} \qquad x^2 = -\alpha^2$$

unter den *reellen* Zahlen keine Lösung.[1]) Um Abhilfe zu schaffen, führen wir, analog wie früher bei ähnlichen Gelegenheiten, eine passende Gattung *neuer „Zahlen"* ein, d. h. wiederum *Zeichen*, welche dieselben Grundeigenschaften besitzen, wie wir sie in der Einleitung zu Abschnitt I von den als *reelle* Zahlen benannten gefordert haben. Diese Neuschöpfung geschieht in der Weise, daß wir *jeder* reellen Zahl $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ je eine *neue*, sogenannte *imaginäre*[2]) Zahl zuordnen, die wir

---

1) Dagegen hat eine Gleichung von der Form

$$x^{2m+1} = -|a|$$

offenbar stets die reelle Lösung.

$$x = -\sqrt[2m+1]{|a|}.$$

2) Über das Unzutreffende dieser Bezeichnung s. § 70, Nr. 1, S. 532.

vorläufig beziehungsweise mit $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \cdots$ bezeichnen wollen und deren *definierende Grundeigenschaft* in der Festsetzung bestehen soll:

$$\text{(Ia)} \qquad \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} = -(\alpha\beta).$$

Wir *definieren* also das *Produkt* der Zahlen $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$, d. h. *die Bedeutung der rein formalen Zeichenverbindung* $\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$ durch die *bereits vorhandene* reelle Zahl $-(\alpha\beta)$. Dabei dient der zwischen $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ gesetzte *Punkt* (das „Operationszeichen" der Multiplikation, das wir späterhin, geradeso wie im Falle von Produkten aus reellen Faktoren, häufig weglassen werden) zunächst lediglich dazu, die fragliche Zeichenverbindung von anderen noch zu bildenden zu *unterscheiden*. Alle späteren Definitionen sollen dann so eingerichtet werden, daß jener Punkt die Bedeutung des früheren Multiplikationszeichens erlangt, wenn infolge irgendwelcher weiteren Operationen *reelle* Zahlen an die Stelle von $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ treten sollten.

2. Die *Sukzession* unserer neuen Zahlen $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \cdots$ setzen wir in der Weise fest, daß:

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \bar{\alpha} = \bar{\beta}, & \text{wenn: } \quad \alpha = \beta \text{ und umgekehrt,} \\ \bar{\alpha} \lesseqgtr \bar{\beta}, & \text{je nachdem: } \alpha \lesseqgtr \beta \text{ und umgekehrt.} \end{cases}$$

Der absolute Betrag $|\alpha|$ von α und $(-\alpha)$ soll auch *absoluter Betrag* von $\bar{\alpha}$ und $\overline{(-\alpha)}$ heißen, in Zeichen:

$$\text{(2)} \qquad |\bar{\alpha}| = |\overline{(-\alpha)}| = |\alpha|.$$

Ordnet man der Vollständigkeit und Gleichförmigkeit halber auch dem Zeichen 0 das Zeichen $\bar{0}$ zu, so hätte man nach (Ia):

$$\bar{0} \cdot \bar{0} = -(0 \cdot 0), \text{ d. h. } = 0 \cdot 0,$$

sodaß also kein Grund vorliegt, unter dem Zeichen $\bar{0}$ eine *neue* Zahl zu verstehen und daher $\bar{0}$ als gleichbedeutend mit 0 zu gelten hat. Abgesehen von diesem einen Falle

$$\text{(3)} \qquad \bar{0} = 0$$

kann aber, wegen: $\bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha} = -\alpha^2$, *niemals* eine imaginäre Zahl einer reellen gleich sein. Im übrigen bilden die nunmehr durch das Zeichen $\bar{0}$ vervollständigten, imaginären Zahlen eine geordnete einfach unendliche Mannigfaltigkeit, deren Individuen umkehrbar eindeutig denjenigen der reellen Zahlenmenge entsprechen und die geradezu als ein vollständig kongruentes Abbild dieser letzteren erscheint.

Da diese neu eingeführten (imaginären) Zahlen mit den bereits vorhandenen (reellen) zu einer einzigen Menge vereinigt werden sollen,

so müssen wir, um die allgemeinen, an den Begriff „*Zahlen*" von uns gestellten Forderungen vollständig zu erfüllen, noch zeigen, *daß* bzw. *wie* diese zusammengesetzte Menge zu einer *geordneten* gemacht werden kann.[1]) Dies mag (mit Rücksicht auf eine späterhin noch vorzunehmende weitere Bereicherung unseres Zahlenvorrats) in der Weise geschehen, daß wir die *imaginären* Zahlen in der bereits festgesetzten Anordnung (also insbesondere einschließlich der *Null*) *zwischen* die *negativen* und *positiven reellen* einschieben. Bedeutet also ε eine beliebig *kleine*, ω eine beliebig *große positive* reelle Zahl, so hat man:

$$-\omega < -\varepsilon < \overline{(-\omega)} < \overline{(-\varepsilon)} < 0 < \bar{\varepsilon} < \bar{\omega} < \varepsilon < \omega.$$

Durch die Einführung der imaginären Zahlen wird offenbar, falls wir statt $\bar{\alpha}\ \bar{\alpha}$, analog wie im Falle reeller Faktoren, $\bar{\alpha}^2$ schreiben, die Gleichung (A) lösbar, und zwar besitzt sie jetzt *zwei* Lösungen, nämlich $x = \bar{\alpha}$ und $x = \overline{(-\alpha)}$, da ja auf Grund von Gl. (Ia) nicht nur:

$$\bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha} = -\alpha^2,$$

sondern auch:

$$\overline{(-\alpha)} \cdot \overline{(-\alpha)} = -\big((-\alpha)\ (-\alpha)\big) = -\alpha^2.$$

3. Da das Gebiet der imaginären Zahlen, wie oben bemerkt, ein vollständig kongruentes Abbild desjenigen der reellen Zahlen darstellt, so läßt sich innerhalb dieses Zahlengebietes eine der *Addition* reeller Zahlen völlig konforme und daher gleichfalls als *Addition* (imaginärer Zahlen) zu bezeichnende Operation durchführen. Man braucht hierzu nur als *Summe* zweier imaginärer Zahlen $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ die zur *reellen Summe* $\alpha + \beta$ *zugeordnete* imaginäre Zahl zu definieren, in Zeichen:

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} = \overline{\alpha + \beta} \tag{II}$$

und hieraus allgemein:

$$\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 + \cdots + \bar{\alpha}_\nu = \overline{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu}. \tag{4}$$

Daraus folgt aber, daß die Summe beliebig vieler imaginärer Zahlen $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \cdots \bar{\alpha}_\nu$ in letzter Linie nur von der *reellen* Summe $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu)$ abhängt, und da diese bei Vornahme beliebiger Kommutationen und Assoziationen stets ungeändert bleibt, so erkennt man unmittelbar, daß auch *die Addition imaginärer Zahlen unbeschränkt kommutativ und assoziativ* ist.

Weiter ergibt sich durch dieselbe Schlußweise, daß im Gebiete der imaginären Zahlen die Addition auch *eindeutig umkehrbar*, also die

---

1) Vgl. im übrigen § 69 S. 525 Fußnote 2).

Subtraktion eindeutig ausführbar ist. Denn, bedeutet $\bar{\xi}$ eine vorläufig unbekannte imaginäre Zahl, welche der Gleichung genügen soll:

$$\bar{\alpha} + \bar{\xi} = \bar{\beta}, \tag{5}$$

und wird deren Lösung analog unseren früheren Bezeichnungen als

$$\bar{\xi} = \bar{\beta} - \bar{\alpha} \tag{6}$$

angeschrieben, so geht zunächst Gl. (5) durch Benützung der Definitionsgleichung (II) in

$$\overline{\alpha + \xi} = \bar{\beta}$$

über, und man findet daher:

$$\alpha + \xi = \beta, \quad \xi = \beta - \alpha$$

und somit als *einzige* Lösung von Gl. (5)[1]):

$$\bar{\xi} = \overline{\beta - \alpha},$$

d. h. schließlich als Definition für die *Subtraktion* zweier imaginärer Zahlen

$$\bar{\beta} - \bar{\alpha} = \overline{\beta - \alpha}. \tag{III}$$

Setzt man hier speziell $\beta = 0$, so folgt zunächst:

$$\bar{0} - \bar{\alpha} = \overline{(-\alpha)}. \tag{7}$$

Statt $\bar{0} - \bar{\alpha}$ schreiben wir dann (nach Analogie von $0 - \alpha = -\alpha$) nur: $-\bar{\alpha}$, sodaß die letzte Gleichung die Form annimmt:

$$-\bar{\alpha} = \overline{(-\alpha)}. \tag{8}$$

Man hat ferner:

$$\bar{\beta} + \overline{(-\alpha)} = \overline{\beta + (-\alpha)} = \overline{\beta - \alpha},$$

also mit Benützung von (III):

$$\bar{\beta} - \bar{\alpha} = \bar{\beta} + \overline{(-\alpha)}, \tag{9}$$

d. h. man kann, analog wie bei reellen Zahlen, die *Subtraktion* von $\bar{\alpha}$ ersetzen durch die Addition von $\overline{(-\alpha)}$ (wofür man nach Gl. (8) auch $-\bar{\alpha}$ schreiben kann).

Schließlich folgt noch aus Gl. (9), wenn man $\beta = \alpha$ setzt und die beiden Seiten der Gleichung vertauscht:

$$\bar{\alpha} + \overline{(-\alpha)} = 0, \tag{10}$$

---

1) Aus

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}'$$

folgt also stets

$$\bar{\beta} = \bar{\beta}'.$$

d. h. zu jeder Zahl $\bar{\alpha}$ existiert eine „*entgegengesetzte*“ Zahl $\overline{(-\alpha)}$ (oder nach Gl (8) auch: $-\bar{\alpha}$) mit dem gleichen absoluten Betrage $|\alpha|$, welche zu $\bar{\alpha}$ addiert die Summe *Null* liefert.

4 Die *Multiplikation zweier imaginärer* Zahlen ist durch die grundlegende Festsetzung (Ia) bereits definiert. Da die rechte Seite von Gl. (Ia) bei Vertauschung von α und β ungeändert bleibt, so folgt, daß:

$$(11) \qquad \bar{\alpha}\cdot\bar{\beta} = \bar{\beta}\cdot\bar{\alpha},$$

ein solches Produkt also *kommutativ* ist. Ferner zeigt die rechte Seite von Gl. (Ia), daß das Produkt $\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}$ im Gebiete der imaginären Zahlen auch *eindeutig umkehrbar* ist, d. h.

$$(12) \qquad \text{aus: } \bar{\alpha}\cdot\bar{\beta} = \overline{\alpha'}\ \bar{\beta} \text{ folgt: } \bar{\alpha} = \overline{\alpha'},$$

vorausgesetzt, daß β von Null verschieden ist.

Um eine passende Definition für das Produkt einer *reellen* und einer *imaginaren* Zahl zu gewinnen, gehen wir von der Forderung aus, daß dasselbe zunächst in dem zur Grundlage der Definition dienenden besonderen Falle *assoziativ* sein soll Danach ergibt sich:

$$(13) \qquad (\alpha\cdot\bar{\beta})\cdot\bar{\beta} = \alpha\cdot(\bar{\beta}\cdot\bar{\beta}) = \alpha\cdot(-\beta\beta) = -(\alpha\beta)\ \ \beta = \overline{\alpha\beta}\cdot\bar{\beta}$$

und daher, um mit (12) in Einklang zu bleiben:

$$(\mathrm{Ib}) \qquad \alpha\cdot\bar{\beta} = \overline{\alpha\beta}.$$

Die so definierte Multiplikation ist dann auch schon *kommutativ*, denn man findet analog:

$$\bar{\beta}\cdot(\bar{\beta}\cdot\alpha) = (\bar{\beta}\cdot\bar{\beta})\cdot\alpha = -\beta\cdot\beta\cdot\alpha = -\beta\cdot(\alpha\beta) = \bar{\beta}\cdot\overline{\alpha\beta},$$

also wieder:

$$\bar{\beta}\cdot\alpha = \overline{\alpha\beta}$$

und daher:

$$(14) \qquad \alpha\cdot\bar{\beta} = \bar{\beta}\cdot\alpha.$$

Da übrigens auch:

$$\bar{\alpha}\cdot\beta = \beta\cdot\bar{\alpha} = \overline{\alpha\beta},$$

so erkennt man, daß hier noch analog wie bei der Multiplikation *positiver* und *negativer* Zahlen *eine besondere Art von Kommutationsgesetz* besteht, welches sich mit dem gewöhnlichen in die Formel zusammenfassen läßt[1]):

$$(15) \qquad \left.\begin{matrix}\alpha\cdot\bar{\beta}\\ \bar{\beta}\cdot\alpha\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}\cdot\beta\\ \beta\cdot\bar{\alpha}.\end{matrix}\right.$$

1) Entsprechend den Beziehungen:

$$\left.\begin{matrix}\alpha\cdot(-\beta)\\ (-\beta)\cdot\alpha\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}(-\alpha)\cdot\beta\\ \beta\cdot(-\alpha).\end{matrix}\right.$$

Auf Grund der Definitionsgleichungen (Ia) und (Ib) läßt sich das Produkt *beliebig vieler* reeller und imaginärer Faktoren rekursorisch definieren und mit dem Nachweis versehen, daß es *unbeschränkt assoziativ* und *kommutativ* ist.

Definiert man zunächst das Produkt dreier Zahlen $a, b, c,$ von denen mindestens eine *imaginär* sein soll, in vollkommener Übereinstimmung mit der entsprechenden Definition für natürliche Zahlen (§ 4, Nr. 6, S. 29) durch die Formel:

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c, \tag{16}$$

so läßt sich zeigen, daß dasselbe *assoziativ* ist. Dabei hat man vorläufig zu unterscheiden, ob dieses Produkt *einen, zwei* oder *drei imaginäre* Faktoren enthält und, in den beiden letztgenannten Fällen, *an welcher Stelle* dieselben auftreten. Bedeuten dann α, β, γ wieder *reelle* Zahlen, so sind alle sich ergebenden Möglichkeiten in den folgenden, ausschließlich auf der Benützung der Definitionsgleichungen (Ia) und (Ib) beruhenden Beziehungen enthalten:

$$(17)\quad \left.\begin{cases} (\bar{\alpha}\;\;\beta) \cdot \gamma = \overline{\alpha\beta} \cdot \gamma \\ (\alpha\;\;\bar{\beta}) \cdot \gamma = \overline{\alpha\beta} \cdot \gamma \\ \qquad\qquad\; (\alpha\beta) \cdot \bar{\gamma} \end{cases}\right\} = \overline{\alpha\beta\gamma} \begin{cases} = \bar{\alpha} \cdot (\beta\gamma) \\ = \alpha \;\; \overline{\beta\gamma} = \alpha \cdot (\bar{\beta}\;\;\gamma) \\ = \alpha \cdot \overline{\beta\gamma} = \alpha \cdot (\beta \cdot \bar{\gamma}) \end{cases}$$

$$(18)\quad \left.\begin{cases} (\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta})\;\; \gamma = (-\alpha\beta) \cdot \gamma \\ (\bar{\alpha} \cdot \beta) \cdot \bar{\gamma} = \overline{\alpha\beta} \cdot \bar{\gamma} \\ (\alpha \cdot \bar{\beta}) \cdot \bar{\gamma} = \overline{\alpha\beta} \cdot \bar{\gamma} \end{cases}\right\} = -\alpha\beta\gamma \begin{cases} = \bar{\alpha} \cdot \overline{\beta\gamma} = \bar{\alpha} \cdot (\bar{\beta} \cdot \gamma) \\ = \bar{\alpha} \cdot \overline{\beta\gamma} = \bar{\alpha} \cdot (\beta \cdot \bar{\gamma}) \\ = \alpha \cdot (-\beta\gamma) = \alpha \cdot (\bar{\beta} \cdot \bar{\gamma}) \end{cases}$$

$$(19)\quad \begin{aligned} (\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}) \cdot \bar{\gamma} &= (-\alpha\beta) \cdot \bar{\gamma} = \overline{(-\alpha\beta\gamma)} = \overline{(\alpha \cdot (-\beta\gamma))} = \bar{\alpha} \cdot (-\beta\gamma) \\ &= \bar{\alpha} \cdot (\bar{\beta} \cdot \bar{\gamma}). \end{aligned}$$

Die Vergleichung des *letzten* Gliedes jeder Zeile bzw. des *letzten* Gliedes der Gleichungen (19) mit dem entsprechenden *ersten* zeigt, daß bei der oben festgesetzten Bedeutung der Zeichen a, b, c ohne jede Einschränkung die Beziehung gilt:

$$(20)\quad a \cdot b \cdot c \begin{cases} = (a \cdot b) \cdot c \\ = a \cdot (b \cdot c), \end{cases}$$

das fragliche Produkt ist also *assoziativ*.

Wegen $a \cdot b = b \cdot a$ und $b \cdot c = c \cdot b$ findet man hieraus zunächst noch

$$a \cdot b \cdot c = b \cdot a \cdot c = a \cdot c \cdot b,$$

d. h. das Produkt $a \cdot b \cdot c$ bleibt ungeändert, wenn man den *ersten* und *zweiten* oder den *zweiten* und *dritten* Faktor vertauscht. Wendet man die *zweite* dieser Vertauschungen auf $b \cdot a \cdot c$, die *erste* auf $a \cdot c \cdot b$, sodann nochmals die *zweite* an, so ergibt sich schließlich:

$$a \cdot b \cdot c \begin{cases} = b \cdot a \cdot c = b \cdot c \cdot a \\ = a \cdot c \cdot b = c \cdot a \cdot b = c \cdot b \cdot a, \end{cases} \tag{21}$$

also alle möglichen (nämlich 6) Permutationen. Das Produkt $a \cdot b \cdot c$ ist also *unbeschränkt kommutativ* und auf Grund des unmittelbar zuvor gefundenen Ergebnisses (s. Gl. (20)) dann auch *unbeschränkt assoziativ*.

Wird jetzt das Produkt von beliebig vielen, etwa $(\nu + 1)$ reellen und imaginären Faktoren durch die Formel *definiert*:

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_\nu \cdot a_{\nu+1} = (a_1 \cdot a_2 \cdots a_\nu) \cdot a_{\nu+1}, \tag{22}$$

so ergibt sich leicht durch vollständige Induktion — nämlich ganz analog, wie in § 3, Nr. 6, S. 21, das entsprechende Resultat für die *Summe* beliebig vieler *natürlicher* Zahlen abgeleitet wurde —, daß das *Produkt* beliebig vieler reeller und imaginärer Faktoren *unbeschränkt assoziativ* und *kommutativ* ist. Man hat nur, unter der Voraussetzung, daß für ein Produkt von ν oder weniger Faktoren die fraglichen Eigenschaften schon erwiesen sind, zu setzen:

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_\nu = (a_{k_1} \cdot a_{k_2} \cdots a_{k_\mu}) \cdot (a_{k_{\mu+1}} \cdots a_{k_\nu})$$

(wo $k_1, k_2, \cdots k_\nu$ eine beliebige Permutation der Zahlen $1, 2, \cdots \nu$ bedeutet und $1 \leq \mu < \nu$) und sodann auf die nunmehr aus Gl. (22) hervorgehende Beziehung:

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_\nu \cdot a_{\nu+1} = (a_{k_1} \cdots a_{k_\mu}) \cdot (a_{k_{\mu+1}} \cdots a_{k_\nu}) \cdot a_{\nu+1}$$

das für den Fall *dreier* Faktoren bereits festgestellte Resultat anzuwenden, wonach man den letzten Faktor $a_{\nu+1}$ mit dem einen oder anderen der beiden Klammerprodukte assoziieren und ihm sodann auf Grund der gemachten Voraussetzung einen ganz beliebigen Platz innerhalb der betreffenden Klammer anweisen, auch jede beliebige Assoziation darin vornehmen kann.

Aus der Gültigkeit des fraglichen Satzes für $\nu = 3$ folgt dann seine Allgemeingültigkeit für jedes beliebige ν.

Hiernach ist also das Produkt beliebig vieler reeller und imaginärer Zahlen eine von der Reihenfolge der Faktoren und der Anordnung der sukzessive vorgenommenen Assoziationen unabhängige, eindeutig definierte reelle oder imaginäre Zahl.

Insbesondere sei noch hervorgehoben, daß:

$$\bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_2 \cdot \bar{\alpha}_3 \cdot \bar{\alpha}_4 = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \tag{23}$$

und daher, wenn man wieder ein Produkt von ν gleichen Faktoren $\bar{\alpha}$ als ν^{te} *Potenz*: $\bar{\alpha}^\nu$ schreibt:

$$\bar{\alpha}^4 = \alpha^4$$

und allgemein:

$$(24)\quad \bar{\alpha}^{4\mu} = \alpha^{4\mu}, \quad \bar{\alpha}^{4\mu+1} = \overline{(\alpha^{4\mu+1})}, \quad \bar{\alpha}^{4\mu+2} = -\alpha^{4\mu+2}, \quad \bar{\alpha}^{4\mu+3} = -\overline{(\alpha^{4\mu+3})}.$$

Schließlich bemerke man noch, daß mit Rücksicht auf das besondere durch die Gleichungen (15) dargestellte Kommutationsgesetz der Ausfall eines Produktes aus reellen und imaginären Zahlen bis zu einem gewissen Grade (vgl. die Beziehungen (17) und (18)) nicht davon abhängt, *welche* Faktoren, sondern *wieviele* davon *imaginar* sind, nämlich: Ersetzt man beliebig viele *imaginäre* Faktoren durch die zugeordneten *reellen* Zahlen, so bleibt das Produkt ungeändert, wenn man nur *ebensoviele reelle* Faktoren durch die zugeordneten *imaginaren* ersetzt.

5. Es bleibt noch zu zeigen, daß die durch die Grundformeln (Ia) und (Ib) definierte Multiplikation auch *distributiv* ist, und zwar kommen in dieser Hinsicht zunächst die folgenden drei Produktformen in Betracht:

$$(\alpha+\beta)\cdot\bar{\gamma}, \quad (\bar{\alpha}+\bar{\beta})\cdot\gamma, \quad (\bar{\alpha}+\bar{\beta})\cdot\bar{\gamma}$$

Mit Benützung der Additionsformel (II) ergibt sich:

$$(25)\begin{cases} (\alpha+\beta)\cdot\bar{\gamma} = \overline{(\alpha+\beta)\cdot\gamma} = \overline{\alpha\gamma+\beta\gamma} = \overline{\alpha\gamma} + \overline{\beta\gamma} = \alpha\cdot\bar{\gamma}+\beta\cdot\bar{\gamma} \\ (\bar{\alpha}+\bar{\beta})\cdot\gamma = \overline{\alpha+\beta}\cdot\gamma = \overline{\alpha\gamma+\beta\gamma} = \overline{\alpha\gamma} + \overline{\beta\gamma} = \bar{\alpha}\cdot\gamma+\bar{\beta}\cdot\gamma \\ (\bar{\alpha}+\bar{\beta})\cdot\bar{\gamma} = \overline{\alpha+\beta}\cdot\bar{\gamma} = -(\alpha+\beta)\cdot\gamma = -\alpha\gamma+(-\beta\gamma) = \bar{\alpha}\cdot\bar{\gamma}+\bar{\beta}\cdot\bar{\gamma}, \end{cases}$$

womit das distributive Verhalten aller drei Produkte erwiesen ist. Aus der ersten dieser Formeln folgt speziell, wenn ν eine natürliche Zahl $\geqq 2$ bedeutet und $\alpha = \nu - 1$, $\beta = 1$ gesetzt wird:

$$\nu\cdot\bar{\gamma} = (\nu-1)\cdot\bar{\gamma} + \bar{\gamma}$$

und durch fortgesetzte Anwendung dieser Formel schließlich:

$$(26)\qquad \nu\cdot\bar{\gamma} = \underbrace{\bar{\gamma}+\bar{\gamma}+\cdots+\bar{\gamma}}_{\nu \text{ mal}},$$

d. h. wie das Produkt einer *natürlichen* Zahl ν in eine *reelle* Zahl, so kann auch dasjenige von ν in eine *imaginäre* Zahl durch eine Summe von ν gleichen Summanden ersetzt werden.

6. Bei der Definition der *Division* als *Umkehrung* der Multiplikation hat man die *beiden* Definitionsgleichungen (Ia) und (Ib) zu berücksichtigen, deren zweite wegen der Verschiedenartigkeit der beiden Faktoren wiederum noch eine *zwiefache* Umkehrung zuläßt. Bezeichnet man wieder mit x eine vorläufig unbekannte Zahl, so handelt es sich also um die Bestimmung von x aus je einer der drei Gleichungen:

$$\bar{\alpha}\cdot x = \bar{\beta}, \quad \bar{\alpha}\cdot x = \beta, \quad \alpha\cdot x = \bar{\beta},$$

oder auch, wenn man beachtet, daß auf Grund der Definitionsgleichungen (Ia), (Ib) der ersten dieser Gleichungen nur eine *reelle* Zahl ξ, den beiden anderen nur eine *imaginäre* Zahl $\bar{\xi}$ genügen kann, um die Bestimmung von ξ bzw. $\bar{\xi}$ aus einer der folgenden Gleichungen:

$$(27) \qquad \bar{\alpha} \cdot \xi = \bar{\beta}, \quad \bar{\alpha} \cdot \bar{\xi} = \beta, \quad \alpha \cdot \bar{\xi} = \bar{\beta}, \quad (\text{wo } |\alpha| > 0),$$

deren Lösungen wir nach Analogie der bisher benützten Schreibweise beziehentlich mit

$$(28) \qquad \xi = \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}, \quad \bar{\xi} = \frac{\beta}{\bar{\alpha}}, \quad \bar{\xi} = \frac{\bar{\beta}}{\alpha}$$

bezeichnen wollen. Durch Anwendung von (Ia), (Ib) gehen nun die Gleichungen (27) in die folgenden über:

$$\overline{\alpha\xi} = \bar{\beta}, \quad -\alpha\xi = \beta, \quad \overline{\alpha\xi} = \bar{\beta},$$

aus denen als in jedem Falle *einzige* Lösung sich ergibt:

$$\xi = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \xi = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad \xi = \frac{\beta}{\alpha}$$

und somit schließlich:

$$(29) \qquad \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{\beta}{\bar{\alpha}} = \overline{\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)}, \quad \frac{\bar{\beta}}{\alpha} = \overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}$$
$$= -\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}.$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt speziell:

$$(30) \qquad \frac{1}{\bar{\alpha}} = \overline{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)} = -\overline{\left(\frac{1}{\alpha}\right)}.$$

§ 69. Die komplexen Zahlen.

1. Wir haben für die *imaginaren* Zahlen folgende Rechnungsoperationen definiert:

1. *Multiplikation* zweier imaginärer Zahlen,
2. *Multiplikation* einer reellen und einer imaginären Zahl,
3. *Addition* zweier imaginärer Zahlen

und deren *Umkehrungen.*

Dagegen ist von der *Addition* einer *reellen* und einer *imaginären* Zahl bisher nicht die Rede gewesen. Der Grund hiervon ist leicht ersichtlich. Während nämlich die genannten Operationen mit vollständiger Beibehaltung der für den Fall ausschließlich reeller Elemente geltenden charakteristischen Eigenschaften sich so definieren ließen, daß sie innerhalb des kombinierten Gebietes der reellen und imaginären Zahlen stets *ausführbar* sind, so erscheint etwas Analoges bezüglich

der *Addition* einer *reellen* Zahl α und einer *imaginären* $\bar{\beta}$ völlig ausgeschlossen, sofern man unter der *Addition* zweier Zahlen eine Operation versteht, die innerhalb des vorhandenen Zahlengebietes nicht nur *eindeutig ausführbar*, sondern auch *eindeutig umkehrbar* ist, dergestalt, daß also aus:

$$a + b = c, \quad a + b' = c$$

allemal folgt:

$$b = b',$$

wie dies bei der Addition *zweier reeller* oder *zweier imaginärer* Zahlen tatsächlich der Fall ist. Wenn wir nämlich an der Forderung der *eindeutigen Umkehrbarkeit der Addition ausdrücklich festhalten*, so kann, abgesehen von den Sonderfällen $\bar{\beta} = 0$, $\alpha = 0$, *weder*: $\alpha + \bar{\beta} = \gamma$ (d. h. *reell*), *noch*: $\alpha + \bar{\beta} = \bar{\gamma}$ (*imaginär*) sein, da ja bereits

$$\alpha + (\gamma - \alpha) = \gamma, \quad \overline{(\gamma - \beta)} + \bar{\beta} = \bar{\gamma}$$

und *weder* $\bar{\beta} = \gamma - \alpha$, *noch* $\alpha = \overline{(\gamma - \beta)}$ ist.

Wollen wir also überhaupt Zeichenverbindungen von der Form $\alpha + \bar{\beta}$ als „*Zahlen*" zulassen (was doch zunächst durchaus dem logischen Bedürfnisse nach *Vollständigkeit* entspräche und sich überdies späterhin als außerordentlich nützlich erweisen wird), so müssen wir versuchen, sie geradezu als eine ganz *neue Kategorie von Zahlen* einzuführen, also jene Zeichenverbindungen durch geeignete Festsetzungen mit Eigenschaften auszustatten, welche es ermöglichen, sie *unter sich* und mit den *bereits vorhandenen* reellen und imaginären Zahlen in eine bestimmte *Reihenfolge* zu bringen und durch passende Erweiterung der bisherigen *Rechnungsregeln* zu verknüpfen.

Diese neu einzuführenden Zahlen von der Form $\alpha + \bar{\beta}$ werden als *komplexe* Zahlen bezeichnet; α heißt der *reelle*, $\bar{\beta}$ der *imaginäre Bestandteil* oder *Teil* der komplexen Zahl $\alpha + \bar{\beta}$.[1]) Das Zeichen $+$ spielt hierbei zunächst wieder lediglich die Rolle eines *Unterscheidungszeichens*, es dient dazu, die *Vereinigung* der beiden Zahlen $\alpha + \bar{\beta}$ *zu einer komplexen Zahl* gegenüber anderen Verbindungen $\left(\text{wie } \alpha \cdot \bar{\beta}, \frac{\alpha}{\bar{\beta}}, \frac{\bar{\beta}}{\alpha}\right)$ kenntlich zu machen. Wir wollen aber (analog wie früher bezüglich des Multiplikationszeichens, s. § 68, Nr. 1, S. 516) daran festhalten, daß überall da, *wo es der Zusammenhang zuläßt*, jenes Zeichen die frühere Bedeutung des Pluszeichens behalten soll. Dieser Fall tritt tatsächlich ein, wenn einer der Bestandteile von $\alpha + \bar{\beta}$ *Null* ist. Auf Grund der eben ge-

1) Man bezeichnet zuweilen auch die *komplexen* Zahlen schlechthin als *imaginäre* Zahlen und nennt dann die von uns bisher als *imaginär* bezeichneten: *rein imaginär*.

machten Festsetzung und der Beziehung $\overline{0} = 0$ (Gl. (3) des vorigen Paragraphen) ergibt sich alsdann:

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha + \overline{0} = \alpha + 0 = \alpha \\ 0 + \overline{\beta} = \overline{0} + \overline{\beta} = \overline{0 + \beta} = \overline{\beta}, \end{cases}$$

d. h. unsere bisherigen *reellen* und *imaginaren* Zahlen erscheinen nunmehr als spezielle Fälle der *komplexen*.[1])

Da man in dem Ausdrucke $\alpha + \overline{\beta}$ sowohl für α alle möglichen reellen, als auch für $\overline{\beta}$ alle möglichen imaginären Zahlen setzen kann, insbesondere also zu jedem einzelnen α noch unendlich viele, lediglich in bezug auf den Bestandteil $\overline{\beta}$ verschiedene komplexe Zahlen existieren und umgekehrt, so bilden die komplexen Zahlen (auf Grund einer unmittelbar einleuchtenden Bezeichnungsweise) eine *zweifach unendliche Mannigfaltigkeit.* Nichtsdestoweniger lassen sie sich auch nach Art einer einfach unendlichen Folge *ordnen*, d. h. es lassen sich Festsetzungen treffen, vermöge deren mit eindeutiger Bestimmtheit entschieden werden kann, ob zwei komplexe Zahlen $\alpha + \overline{\beta}$, $\alpha' + \overline{\beta'}$ als *gleich* zu betrachten sind, bzw. welche von beiden die *„kleinere"* oder *„größere"* heißen soll, d. h. der anderen *vorangeht* oder *nachfolgt.*[2])

Diese Festsetzungen werden so zu wählen sein, daß dadurch die für die reellen und imaginären Zahlen bereits bestehende Ordnung nicht gestört wird. Hiernach wird man zunächst mit Rücksicht darauf, daß $\alpha + \overline{\beta}$ und $\alpha' + \overline{\beta'}$ für $\overline{\beta} = \overline{\beta'} = 0$ in die reellen Zahlen α und α' übergehen, allgemein *definieren*:

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha + \overline{\beta} < \alpha' + \overline{\beta'}, \text{ wenn: } \alpha < \alpha' \\ (\text{also: } \alpha + \overline{\beta} > \alpha' + \overline{\beta'}, \text{ wenn: } \alpha > \alpha'). \end{cases}$$

---

1) Dies gilt offenbar auch von der *Null*, d. h. man hat:

$$0 + \overline{0} = 0 + 0 = 0$$

2) Durch die folgende Betrachtung soll nur die *Möglichkeit* einer solchen *Ordnung* der komplexen Zahlen dargetan werden. Wir werden indessen, abgesehen von dem auf die *Gleichheit* zweier komplexer Zahlen bezüglichen Ergebnisse, von dem obigen Ordnungsprinzip keinen weiteren Gebrauch machen.

Im übrigen erkennt man leicht, daß das im Texte angegebene Ordnungsprinzip der für reelle Zahlen aufgestellten Grundforderung entspricht, daß aus

$$\alpha + \overline{\beta} < \alpha' + \overline{\beta'}, \quad \alpha' + \overline{\beta'} < \alpha'' + \overline{\beta''}$$

folgt:

$$\alpha + \overline{\beta} < \alpha'' + \overline{\beta''},$$

und zwar auch dann noch, wenn in *einer* der Voraussetzungen das *Gleichheits*zeichen steht

Dagegen hat man wiederum:

$$\alpha + \overline{\beta} = \alpha'' + \overline{\beta''},$$

wenn:

$$\alpha + \overline{\beta} = \alpha' + \overline{\beta'}, \quad \alpha' + \overline{\beta'} = \alpha'' + \overline{\beta''}.$$

Für den durch diese Definition *nicht* erledigten Fall: $\alpha = \alpha'$ wird man im Hinblick auf die spezielle Möglichkeit $\alpha = \alpha' = 0$ unmittelbar dazu geführt, zu *definieren*:

$$(2') \quad \begin{cases} \alpha + \overline{\beta} < \alpha + \overline{\beta'}, \text{ wenn: } \overline{\beta} < \overline{\beta'}, \text{ d. h. } \beta < \beta' \\ (\text{also: } \alpha + \overline{\beta} > \alpha + \overline{\beta'}, \text{ wenn: } \overline{\beta} > \overline{\beta'}, \text{ d. h. } \beta > \beta'). \end{cases}$$

In dem einzig noch übrig bleibenden Falle, nämlich:

$$(3a) \qquad \alpha = \alpha', \ \overline{\beta} = \overline{\beta'} \ (\text{also auch: } \beta = \beta')$$

bleibt dann keine andere Möglichkeit, als daß man setzt:

$$(3b) \qquad \alpha + \overline{\beta} = \alpha' + \overline{\beta}',$$

und zwar, wie ein Blick auf die Definitionen (2) und (2′) zeigt, in dem Sinne, daß die Beziehungen (3a) und (3b) auch *umkehrbar* sind, sodaß also der folgende (sehr häufig angewendete Satz) gilt:

Eine Gleichung zwischen zwei komplexen Zahlen, etwa:

$$(3b) \qquad \alpha + \overline{\beta} = \alpha' + \overline{\beta'},$$

läßt sich „durch Trennung der reellen und imaginaren Bestandteile" durch zwei Gleichungen zwischen reellen Zahlen ersetzen, nämlich

$$(3a) \qquad \alpha = \alpha', \quad \beta = \beta'$$

(die letztere als Folgerung aus: $\overline{\beta} = \overline{\beta'}$).

Insbesondere folgt also aus einer Beziehung von der Form:

$$(4b) \qquad \alpha + \overline{\beta} = 0,$$

daß:

$$(4a) \qquad \alpha = 0, \quad \beta = 0.$$

Da wir zur Darstellung von Ungleichheiten zwischen *nichtreellen* Zahlen von den Zeichen < und > im Sinne der oben durch die Beziehungen (2) und (2′) gegebenen Definitionen aus Zweckmäßigkeitsgründen keinen Gebrauch machen werden, so erscheint es notwendig zur Bezeichnung der *Ungleichheit* zweier komplexer Zahlen (die sich dann selbstverständlich auch auf *reelle* reduzieren können) ein neues Zeichen einzuführen. Wir schreiben hiernach:

$$(5) \qquad \alpha + \beta \neq \alpha' + \overline{\beta'}$$

in dem Sinne: $\alpha + \overline{\beta}$ ist *nicht gleich* $\alpha' + \overline{\beta'}$.

2. Es handelt sich jetzt noch darum, die *Addition* und die *Multiplikation* in der Weise auf *komplexe* Zahlen auszudehnen, daß die für *reelle* und *imaginäre* Zahlen bereits geltenden Regeln als spezielle Fälle erhalten bleiben. Die hierzu erforderlichen Definitionen ergeben sich mit zwingender Notwendigkeit, wenn man daran festhält, daß man unter der *Addition* zweier *beliebiger* Zahlen eine *kommutative* und *asso-*

native Verbindung versteht und daß für die *Multiplikation* zu den beiden genannten Eigenschaften noch diejenige der *Distributivität* hinzuzutreten hat.

Durch Anwendung des *kommutativen* Prinzips ergibt sich zunächst:

$$\overline{\beta} + \alpha = \alpha + \overline{\beta} \tag{6}$$

und sodann:

$$\alpha + \overline{\beta} + \alpha' + \overline{\beta'} = \alpha + \alpha' + \overline{\beta} + \overline{\beta'}.$$

Hieraus folgt durch *Assoziation*, mit Benützung der Additionsregel für imaginäre Zahlen (Nr. 3 des vorigen Paragraphen, Formel (II)), als *Definition* für die *Summe* zweier *komplexer* Zahlen:

$$(\alpha + \overline{\beta}) + (\alpha' + \overline{\beta'}) = (\alpha + \alpha') + \overline{\beta + \beta'} \tag{I}$$ [1])

und durch sukzessive Anwendung dieser Formel:

$$(\alpha_1 + \overline{\beta}_1) + (\alpha_2 + \overline{\beta}_2) + \cdots + (\alpha_n + \overline{\beta}_n) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) + \overline{\beta_1 + \beta_2 + \cdots \beta_n}. \tag{7}$$

Da hiernach die Summe *beliebig vieler* komplexer Zahlen $\alpha_1 + \overline{\beta}_1$, $\alpha_2 + \overline{\beta}_2, \cdots \alpha_n + \overline{\beta}_n$ in letzter Linie nur von den beiden reellen Summen $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)$ und $(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n)$ abhängt, so ergibt sich wiederum ohne weiteres, daß auch die *Addition beliebig vieler komplexer Zahlen unbeschränkt kommutativ und assoziativ ist.*

Aus der Definition (I) ergibt sich ferner, daß die Addition zweier komplexer Zahlen auch eine *eindeutige Umkehrung* besitzt, mit anderen Worten, daß auch die *Subtraktion* im Gebiete der komplexen Zahlen *eindeutig ausführbar* ist.[2]) Versteht man unter $\xi + \overline{\eta}$ eine vorläufig unbekannte komplexe Zahl, welche der Forderung genügen soll:

$$(\xi + \overline{\eta}) + (\alpha' + \overline{\beta'}) = \alpha + \overline{\beta} \tag{8}$$

und bezeichnet nach früheren Analogien die Lösung dieser Gleichung als *Differenz* von $\alpha + \overline{\beta}$ und $\alpha' + \overline{\beta'}$, die hierzu dienliche Operation als *Subtraktion*, in Zeichen:

$$\xi + \overline{\eta} = (\alpha + \overline{\beta}) - (\alpha' + \overline{\beta'}), \tag{9}$$

so findet man zunächst durch Anwendung der Additionsformel (1) auf Gl. (8):

$$(\xi + \alpha') + \overline{\eta + \beta'} = \alpha + \overline{\beta}$$

---

1) Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, daß diese Formel für $\beta = \beta' = 0$ bzw. $\alpha = \alpha' = 0$ in die für reelle bzw. imaginäre Zahlen bereits geltenden Additionsformeln übergeht.

2) Noch anders ausgesprochen: Aus

$$(\alpha + \overline{\beta}) + (\alpha' + \overline{\beta'}) = (\alpha + \overline{\beta}) + (\alpha'' + \overline{\beta''})$$

folgt stets:

$$\alpha' + \overline{\beta'} = \alpha'' + \overline{\beta''}$$

und hieraus *mit eindeutiger Bestimmtheit*

$$\xi + \alpha' = \alpha, \quad \eta + \overline{\beta'} = \beta,$$

also

$$\xi = \alpha - \alpha', \quad \eta = \beta - \beta',$$

und daher als Definitionsgleichung für die *Subtraktion:*

$$\text{(II)} \qquad (\alpha + \overline{\beta}) - (\alpha' + \overline{\beta'}) = (\alpha - \alpha') + \overline{\beta - \beta'}.$$

Setzt man hier speziell $\beta = 0$, $\alpha' = 0$, so folgt:

$$\text{(10)} \qquad \alpha - \overline{\beta'} = \alpha + \overline{(-\beta')} = \alpha + (-\overline{\beta'})\text{[1]}$$

sodaß also auch eine Zeichenverbindung von der Form $\alpha - \overline{\beta'}$ nunmehr eine bestimmte komplexe Zahl vorstellt. Man pflegt zwei komplexe Zahlen von der Form $\alpha + \overline{\beta}$ und $\alpha - \overline{\beta}$ als *konjugiert* zu bezeichnen[2]) Für Summe und Differenz solcher konjugierter Zahlen ergeben sich die Beziehungen:

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} (\alpha + \overline{\beta}) + (\alpha - \overline{\beta}) = 2\alpha \ \text{(also } \textit{reell}) \\ (\alpha + \overline{\beta}) - (\alpha - \overline{\beta}) = (\alpha + \overline{\beta}) - (\alpha + (-\overline{\beta})) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = 2\overline{\beta} \ \text{(also } \textit{imaginar}). \end{cases}$$

3. Benützt man für die Definition der Multiplikation zunächst das oben geforderte *distributive* Verhalten, so findet man zunächst:

$$(\alpha + \overline{\beta}) \cdot (\alpha' + \overline{\beta'}) = \alpha \cdot \alpha' + \overline{\beta} \cdot \overline{\beta'} + \alpha \cdot \overline{\beta'} + \alpha' \cdot \overline{\beta}$$

und daher mit Anwendung der für die Multiplikation und Addition imaginärer Zahlen geltenden Regeln) (Formel (Ia), (Ib), (II) des vorigen Paragraphen) als *Definition* für die *Multiplikation* zweier komplexer Zahlen:

$$\text{(III)} \qquad (\alpha + \overline{\beta})(\alpha' + \overline{\beta'}) = (\alpha\alpha' - \beta\beta') + \overline{\alpha\beta' + \alpha'\beta}.$$

Daß ein solches Produkt *kommutativ* ist, geht ohne weiteres daraus hervor, daß die rechte Seite von Gl. (III) ungeändert bleibt, wenn man gleichzeitig α mit α', β mit β' vertauscht. Daß es bei dem Hinzutreten eines weiteren Faktors auch *assoziativ* ist, ergibt sich durch direkte Ausrechnung auf Grund der Formel (III). Und es bietet keinerlei Schwierigkeit, die unbeschränkte Erhaltung dieser Eigenschaften bei Produkten *beliebig vieler* Faktoren ganz analog wie in früher behandelten Fällen ähnlicher Art durch vollständige Induktion zu bestätigen.

---

1) S. Gl. (8) des vorigen Paragraphen

2) Da es ja freistehen muß, auch $\overline{\beta} = 0$ zu setzen, so ist also jede *reelle* Zahl *sich selbst konjugiert*.

Reduziert sich einer der beiden Faktoren des Produktes (III) auf eine natürliche Zahl, etwa $\alpha + \bar{\beta} = \nu$ (also $\alpha = \nu$, $\bar{\beta} = 0$), so resultiert wieder aus dem distributiven Charakter der Multiplikationsformel, daß das betreffende Produkt durch die Summe von ν gleichen Summanden $\alpha' + \bar{\beta'}$ ersetzt werden kann. Auch erkennt man unmittelbar, daß die Definitionsgleichung (III) alle bisherigen Multiplikationsregeln als spezielle Fälle enthält, also keinerlei Widerspruch mit sich bringt

Durch Anwendung der Formel (III) auf zwei *konjugierte* Zahlen $\alpha + \bar{\beta}$, $\alpha - \bar{\beta}$ ergibt sich als Ergänzung zu den Beziehungen (11) die folgende:

$$(12) \qquad (\alpha + \bar{\beta}) \cdot (\alpha - \bar{\beta}) = (\alpha + \bar{\beta})\,(\alpha + \overline{(-\beta)}) = \alpha^2 + \beta^2,$$

ein solches Produkt ist also stets *reell* und *positiv*. Dieses Ergebnis bleibt offenbar bestehen, wenn man einen der beiden Faktoren von vornherein noch mit einer beliebigen positiven Zahl multipliziert, und mit Berücksichtigung dieses Zusatzes ist dasselbe auch *umkehrbar*, d. h. es gilt der Satz:

Ist das Produkt $(\alpha + \bar{\beta}) \cdot (\alpha' + \bar{\beta'})$ reell und positiv, so kann sich $\alpha' + \bar{\beta'}$ von $\alpha - \bar{\beta}$ nur um einen positiven Faktor[1] *unterscheiden.*

Die Voraussetzung besagt nämlich nach Formel (III), daß

$$(13) \qquad \alpha\alpha' - \beta\beta' > 0, \quad \alpha\beta' + \alpha'\beta = 0.$$

Ist α von Null verschieden und setzt man $\alpha' = \lambda\alpha$, so geht die zweite Bedingung in die folgende über:

$$(14) \qquad \alpha\beta' + \lambda\alpha\beta = 0, \text{ also: } \beta' = -\lambda\beta.$$

Die erste Bedingung nimmt somit die Form an:

$$(15) \qquad \lambda \cdot (\alpha^2 + \beta^2) > 0, \text{ d. h. } \lambda > 0,$$

und man findet, wie behauptet:

$$(16) \qquad \alpha' + \bar{\beta'} = \lambda\alpha + \overline{(-\lambda\beta)} = \lambda \cdot (\alpha - \bar{\beta}) \quad (\text{wo } \lambda > 0).$$

In dem besonderen Falle $\alpha = 0$ hat man nach (13):

$$(13\text{a}) \qquad \beta\beta' < 0, \quad \alpha'\beta = 0.$$

Daraus folgt aber, daß β und β' beide von Null verschieden und mit entgegengesetztem Vorzeichen behaftet sind und daß $\alpha' = 0$, somit schließlich:

$$\bar{\beta'} = -\lambda \cdot \bar{\beta} \quad (\text{wo wieder } \lambda > 0).$$

Die vorstehende Betrachtung führt auch zur Beantwortung der Frage, unter welchen Bedingungen die Beziehung

$$(17) \qquad (\alpha + \bar{\beta}) \cdot (\alpha' + \bar{\beta'}) = 0$$

1) Dieser Faktor wird $= 1$, d. h. $\alpha' + \bar{\beta'}$ ist dann *konjugiert* zu $\alpha + \bar{\beta}$, wenn zu der genannten Voraussetzung noch die folgende hinzukommt: $\alpha'^2 + \beta'^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

möglich ist An die Stelle der *Un*gleichung in (13) tritt dann die *Gleichung:*

(18) $$\alpha\alpha' - \beta\beta' = 0$$

(während die zweite der Bedingungen (13) ungeändert bleibt) und dementsprechend treten, unter der Voraussetzung $|\alpha| > 0$, auch an die Stelle der *Un*gleichungen (15) die *Gleichungen:*

$$\lambda(\alpha^2 + \beta^2) = 0, \text{ d. h. } \lambda = 0$$

Danach wird $\alpha' = \lambda\alpha = 0$ und mit Benützung der Gleichung (13) auch $\beta' = 0$, also schließlich:

(19) $$\alpha' + \overline{\beta'} = 0.$$

Im Falle $\alpha = 0$ hat man zunächst (s. Gl. (13) und (18)):

$$\alpha'\beta = 0, \quad \beta\beta' = 0,$$

d. h. entweder, falls $|\beta| > 0$, gerade so wie zuvor $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$, oder aber $\beta = 0$, also:

(20) $$\alpha + \bar{\beta} = 0$$

Somit ergibt sich, *daß ein Produkt von der Form* $(\alpha + \bar\beta)(\alpha' + \overline{\beta'})$, *gerade so wie ein Produkt zweier reeller Zahlen, nur dann Null sein kann, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist.* Durch vollständige Induktion erkennt man ohne weiteres, daß dieses Resultat auch für Produkte beliebig vieler komplexer Faktoren gültig bleibt

Schließlich läßt sich wiederum noch zeigen, daß jedes von Null verschiedene Produkt $(\alpha + \bar\beta)(\alpha' + \overline{\beta'})$ auch *eindeutig umkehrbar*[1]), mit anderen Worten, daß auch die *Division* (abgesehen von der Division durch *Null*) im Gebiete der komplexen Zahlen stets *eindeutig ausführbar* ist.

Denn versteht man wieder unter $\xi + \bar\eta$ eine vorläufig unbekannte komplexe Zahl, welche der Forderung genügen soll:

(21) $$(\xi + \bar\eta)(\alpha' + \overline{\beta'}) = \alpha + \bar\beta,$$

und bedient man sich für die Lösung dieser Gleichung, also für das Resultat der *Division* oder den *Quotienten* von $\alpha + \bar\beta$ durch $\alpha' + \overline{\beta'}$, der Schreibweise:

(22) $$\xi + \bar\eta = \frac{\alpha + \bar\beta}{\alpha' + \overline{\beta'}},$$

so ergibt sich wegen:

$$(\xi + \bar\eta)(\alpha' + \overline{\beta'}) = (\alpha'\xi - \beta'\eta) + \overline{\beta'\xi + \alpha'\eta},$$

1) Danach folgt aus

$$(\alpha + \bar\beta)(\alpha' + \overline{\beta'}) = (\alpha + \bar\beta)(\alpha'' + \overline{\beta''}),$$

daß

$$\alpha' + \overline{\beta'} = \alpha'' + \overline{\beta''}.$$

durch Trennung des Reellen und Imaginären:

$$(23)\qquad \begin{cases} \alpha'\xi - \beta'\eta = \alpha \\ \beta'\xi + \alpha'\eta = \beta. \end{cases}$$

Nimmt man zunächst α', β' *beide* als von Null verschieden an, so folgt durch Multiplikation der ersten Gleichung mit α', der zweiten mit β' und Addition:

$$\xi = \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta'}{\alpha'^2 + \beta'^2}$$

Sodann durch Multiplikation der ersten Gleichung mit β', der zweiten mit α' und Subtraktion:

$$\eta = \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha'^2 + \beta'^2}$$

und daher:

$$(\mathrm{IV})\qquad \frac{\alpha + \overline{\beta}}{\alpha' + \overline{\beta'}} = \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta'}{\alpha'^2 + \beta'^2} + \overline{\left(\frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha'^2 + \beta'^2}\right)}.$$

Diese Schlußweise bleibt zwar zulässig, wenn $\alpha' = 0$ *oder* $\beta' = 0$. In diesen Fällen treten jedoch an die Stellen der Gleichungen (23) die einfacheren:

$$(23\mathrm{a})\qquad \begin{cases} -\beta'\eta = \alpha \\ \beta'\xi = \beta \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \begin{matrix} \alpha'\xi = \alpha \\ \alpha'\eta = \beta, \end{matrix}$$

sodaß sich kürzer unmittelbar ergibt:

$$\xi = \frac{\beta}{\beta'}, \quad \eta = -\frac{\alpha}{\beta'} \quad \text{bzw.} \quad \xi = \frac{\alpha}{\alpha'}, \quad \eta = \frac{\beta}{\alpha'}$$

und daher:

$$(\mathrm{IVa})\qquad \frac{\alpha + \overline{\beta}}{\overline{\beta'}} = \frac{\beta}{\beta'} - \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta'}\right)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\alpha + \overline{\beta}}{\alpha'} = \frac{\alpha}{\alpha'} + \overline{\left(\frac{\beta}{\alpha'}\right)}.$$

Wie aus dem Gesagten hervorgeht, können diese Beziehungen auch durch die Spezialisierung $\alpha' = 0$ bzw. $\beta' = 0$ aus der *Hauptformel* (IV) gewonnen werden, sodaß diese letztere also schließlich in *jedem* Falle (selbstverständlich mit Ausschluß von $\alpha' + \overline{\beta'} = 0$) die Definition der *Division* bzw. des *Quotienten* zweier komplexer Zahlen liefert.

Setzt man in (IV): $\alpha + \overline{\beta} = 1$, so folgt noch:

$$(\mathrm{IVb})\qquad \frac{1}{\alpha' + \overline{\beta'}} = \frac{\alpha'}{\alpha'^2 + \beta'^2} - \overline{\left(\frac{\beta'}{\alpha'^2 + \beta'^2}\right)} \left(\text{speziell: } \frac{1}{\overline{\beta'}} = -\overline{\left(\frac{1}{\beta'}\right)}\right).$$

Der als *reziproker Wert* von $\alpha' + \overline{\beta'}$ bezeichnete Ausdruck $\frac{1}{\alpha' + \overline{\beta'}}$ stellt also (abgesehen von dem Falle $\alpha' + \overline{\beta'} = 0$) eine bestimmte komplexe Zahl vor. (Da diese letztere mit $\alpha' + \overline{\beta'}$ multipliziert das Produkt 1, also ein *reelles positives* Produkt liefert, so kann sie sich nach dem oben bewiesenen Satze von $\alpha' - \overline{\beta'}$ nur um einen *positiven* Faktor unterscheiden: nach Gl. (IVb) ist dieser Faktor: $\frac{1}{\alpha'^2 + \beta'^2}$.)

Wie die vorstehenden Betrachtungen zeigen, sind die vier Spezies im Gebiete der komplexen Zahlen nunmehr stets (mit Ausnahme der Division durch *Null*) *eindeutig ausführbar* und (mit Ausnahme der Multiplikation mit *Null*) auch *eindeutig umkehrbar*. Auch besitzt jede der betreffenden Rechnungsoperationen dieselben charakteristischen Eigenschaften wie die entsprechende mit reellen Zahlen. Insbesondere kann ein Produkt, das komplexe Faktoren enthält, niemals *Null* sein, wenn nicht mindestens ein Faktor *Null* ist.

§ 70. Neue Bezeichnungen für die imaginären bzw. komplexen Zahlen. — Die Quadratwurzel aus einer komplexen Zahl.

1. Ehe wir durch Einführung anderer Bezeichnungen für die *imaginären* und somit auch für die *komplexen* Zahlen das Rechnen mit solchen Zahlen fast[1]) vollständig auf dasjenige mit *reellen* Zahlen zurückführen, also gewissermaßen „mechanisieren", erscheint es uns zweckmäßig, nochmals diejenigen Gesichtspunkte übersichtlich zusammenzufassen, welche uns bei der Definition jener neuen Zahlen und der mit ihnen auszuführenden Rechnungsoperationen geleitet haben.

Um die durch irgendwelche reelle Zahlen nicht zu befriedigende Gleichung

$$x \cdot x = -(\alpha \cdot \alpha) \quad \text{(wo } \alpha \text{ reell, positiv oder negativ)}$$

lösbar zu machen, ordneten wir *jeder* positiven oder negativen *reellen* Zahl $\alpha, \beta, \cdots$ eine sogenannte *imaginäre* $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \cdots$ zu, mit der *definierenden Grundeigenschaft*:

$$\text{(I a)} \qquad \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} = -(\alpha\beta).$$

Das von uns gewählte Auskunftsmittel der Schöpfung einer *neuen* Kategorie von Zahlen, falls der vorhandene Zahlenvorrat zur Lösung einer bestimmten „Umkehrungs"-Aufgabe nicht ausreicht, entspricht genau demjenigen Verfahren, das wir bei der Umkehrung der Multiplikation, Addition und der Potenz mit positivem Zahlenwert eingeschlagen haben. Von diesem Gesichtspunkte aus paßt also die Bezeichnung „*imaginär*" auf die jetzt eingeführten Zahlen nicht besser und nicht schlechter als auf die gebrochenen, negativen und irrationalen, ja schließlich sogar auf die natürlichen Zahlen, da diese doch auch lediglich Schöpfungen der menschlichen „Imagination" sind. Aber selbst wenn man den letzteren als Anzahlen *realer* Dinge, auch den positiven

---

1) d. h. abgesehen von einer einzigen Modifikation, die sich auf die Behandlung des (als Ersatz für $\bar{1}$) noch einzuführenden Zahlzeichens i bezieht.

Brüchen als Anzahlen von aliquoten Teilen realer Dinge besondere Rechte einräumen will, ja selbst wenn man, einer nach unserem Dafürhalten wenig empfehlenswerten Gepflogenheit folgend, die *negativen* ganzen Zahlen als *Anzahlen* von Dingen einführt, die zu den durch die *natürlichen* (bzw. in diesem Zusammenhange *positiven*) Zahlen gezählten in einer gewissen *gegensätzlichen* Beziehung stehen (wie Verlust zu Gewinn, Schulden zu Vermögen, Kältegrade zu Wärmegraden), so *macht* man sie schließlich recht eigentlich zu *„imaginären"* Gebilden, wenn man von einer *Multiplikation* solcher Zahlen spricht und hierfür, wie man wohl zu sagen pflegt, kraft eigener Machtvollkommenheit des menschlichen Geistes bestimmte Regeln aufstellt. Andererseits können unsere *imaginären* bzw. *komplexen* Zahlen sehr wohl zur Darstellung von Beziehungen zwischen *realen Objekten*, insbesondere von *geometrischen* Beziehungen dienen[1]), sodaß also auch von diesem Gesichtspunkte aus ein *prinzipieller* Gegensatz zu den als *reell* bezeichneten Zahlen nicht besteht.

Eine Notwendigkeit, das bei der Einführung der eigentlichen Brüche, der negativen und der irrationalen Zahlen konsequent beobachtete Verfahren in gewisser Weise zu modifizieren, zeigt sich jedoch, sobald es sich darum handelt, die Definition der vier Spezies auf die neu eingeführten Zahlen und ihre Verbindungen mit den bereits vorhandenen zu übertragen. Jenes Verfahren bestand darin, daß wir jedesmal zunächst eine *allgemeinere* Kategorie neuer Zahlzeichen (nämlich die eigentlichen und uneigentlichen Brüche, allgemeinen Differenzensymbole, konvergenten Zahlenfolgen) einführten, welche *außer* den neu zu schaffenden Zahlen auch die *bereits vorhandenen* enthielt: die Übertragung der für diese letzteren schon bestehenden Rechnungsregeln in die neuen Bezeichnungen lieferte dann die *Definition*, und zwar, zur Vermeidung von Widersprüchen, die *einzig mögliche* Definition der betreffenden Operationen für das erweiterte Zahlengebiet. Es läge nahe, diese Methode in der Weise nachzubilden, daß man statt der (rein) *imaginären* von vornherein die *komplexen* Zahlen einführt, da diese letzteren ja die *reellen* als Teilmenge enthalten. Indessen bilden die *reellen* Zahlen einen so *speziellen* Typus der *komplexen* (§ 69, S. 525, Gl. (1): $\alpha = \alpha + \bar{0}$), daß die für sie bestehenden Rechnungsregeln keinen ausreichenden Anhalt für deren Übertragung auf beliebige komplexe Zahlen liefern. Aus diesem Grunde schien es zweckmäßiger, zunächst die fraglichen Gesetze für deren anderen Spezialtypus, die *imaginären* Zahlen aufzustellen, zumal das Bedürfnis zu ihrer Einführung aus einem Umkehrproblem nächstliegender und einfachster Art unmittelbar hervorgeht.

1) Näheres hierüber in Bd. II dieser Vorlesungen.

Aus der vollkommenen Analogie der Struktur dieses *neuen* Zahlengebietes mit derjenigen des *reellen* erwuchs dann unmittelbar die Möglichkeit, eine als *Addition* der *imaginären* Zahlen zu bezeichnende Operation in der Weise zu definieren, daß sie mit der *Addition* der *reellen* Zahlen alle charakteristischen Eigenschaften gemein hat. Das gleiche ergab sich für die *Multiplikation* aus der definierenden Grundeigenschaft (Ia) lediglich mit Hinzunahme der Festsetzung, daß das Produkt *dreier* Faktoren zunächst in einem zur Grundlage der Definition dienenden besonderen Falle (§ 68, Gl. (13), S. 519) *assoziativ* sein und daß im übrigen die Definition genau nach dem für natürliche Zahlen geltenden Vorbilde erfolgen sollte (a. a. O. Gl. (16)).

Die Unmöglichkeit, auch die *Addition* einer *reellen* und einer *imaginären* Zahl mit Hilfe des vorhandenen Zahlenvorrates zu definieren, gab Veranlassung, Zahlenverbindungen von der Form $\alpha + \overline{\beta}$ als *neue* — *„komplexe"* — Zahlen einzuführen, welche auf Grund der (zwecks Vermeidung von Widersprüchen geradezu selbstverständlichen) Festsetzung, daß das Zeichen + überall da, wo der Zusammenhang es gestattet, die frühere Bedeutung behalten soll, die *reellen* und *imaginären* Zahlen als Teilmenge enthielten. Der naturgemäße Weg, zu einer widerspruchsfreien Definition der wiederum als *Addition* und *Multiplikation* zu bezeichnenden Verbindungen der komplexen Zahlen zu gelangen, bestand dann darin, daß wir ein gewisses Mindestmaß charakteristischer Eigenschaften, die sich bei der ursprünglichen Definition der betreffenden Operationen für die natürlichen Zahlen als *Folgerungen* ergeben hatten, nunmehr zu *grundlegenden Forderungen* der Definition machten, und zwar die folgenden: Es sollen die ausdrücklich als *Summanden* eingeführten Bestandteile einer komplexen Zahl in bezug auf die *Addition* einer weiteren komplexen Zahl sich *kommutativ* und *assoziativ*, in bezug auf die *Multiplikation* sich *distributiv* verhalten.

2. Auf Grund der Multiplikationsformel (Ib) des § 68 (S. 519) hat man:

$$\beta \cdot \overline{1} = \overline{\beta \cdot 1} = \overline{\beta}, \tag{1}$$

sodaß sich also umgekehrt jede *imaginäre* Zahl $\overline{\beta}$ auch *ersetzen* läßt durch das *„Produkt"* der zugeordneten *reellen* Zahl β in die spezielle imaginäre Zahl $\overline{1}$, die sogenannte *imaginäre Einheit*, d. h. die der reellen Zahl 1 *zugeordnete*, also der Gleichung

$$\overline{1} \cdot \overline{1} = -1 \quad (\text{oder auch: } \overline{1}^2 = -1) \tag{2}$$

genügende imaginäre Zahl. Dabei sei aber ausdrücklich daran erinnert, daß der Ausdruck „Produkt" hier lediglich die rein formale Zeichen-

verbindung $\beta \cdot \bar{1}$ bezeichnet und daß diese letztere erst eine bestimmte Bedeutung gewinnt, wenn die Menge der imaginären Zahlen bereits *geschaffen* ist und sodann durch die oben zitierte Formel (Ib) das *Produkt* einer reellen Zahl β in eine imaginäre $\bar{\gamma}$ als die in jener Menge allemal vorhandene imaginäre Zahl $\overline{\beta\gamma}$ *definiert* wird.

Führt man nach dem Vorgange von Gauß für die zuvor von uns mit $\bar{1}$ bezeichnete Zahl die schon von Euler gelegentlich benützte Bezeichnung i ein, sodaß also i definiert ist durch die Beziehung[1]):

$$i^2 = -1, \tag{3}$$

so nehmen jetzt die *komplexen* Zahlen allgemein die Form $\alpha + \beta i$ oder auch $\alpha - \beta i$[2]) an, wo α, β reelle Zahlen (einschließlich der *Null*) bedeuten. Die von uns aufgestellten Regeln (I)—(IV) des vorigen Paragraphen für die Ausführung der vier Spezies lauten in dieser neuen Schreibweise:

$$\text{(I)}\quad (\alpha + \beta i) + (\alpha' + \beta' i) = (\alpha + \alpha') + (\beta + \beta')\, i$$

$$\text{(II)}\quad (\alpha + \beta i) - (\alpha' + \beta' i) = (\alpha - \alpha') + (\beta - \beta')\, i$$

$$\text{(III)}\quad (\alpha + \beta i) \cdot (\alpha' + \beta' i) = (\alpha\alpha' - \beta\beta') + (\alpha\beta' + \alpha'\beta) i$$

$$\left(\text{speziell: } (\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2\right)$$

$$\text{(IV)}\quad \frac{\alpha + \beta i}{\alpha' + \beta' i} = \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta'}{\alpha'^2 + \beta'^2} + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha'^2 + \beta'^2}\, i$$

$$\left(\text{speziell: } \frac{1}{\alpha' + \beta' i} = \frac{\alpha' - \beta' i}{\alpha'^2 + \beta'^2}, \quad \frac{1}{i} = -i\right).$$

Bemerkt man noch, daß die letzte Formel auch zustandekommt, wenn man zunächst setzt:

$$\frac{\alpha + \beta i}{\alpha' + \beta' i} = \frac{(\alpha + \beta i)(\alpha' - \beta' i)}{(\alpha' + \beta' i)(\alpha' - \beta' i)}, \tag{4}$$

d. h. indem man Zähler und Nenner des vorliegenden Bruches mit der *konjugierten* Zahl des Nenners multipliziert, so lassen sich die in den Formeln (I)—(IV) enthaltenen Regeln für die Ausführung der vier Spezies mit komplexen Zahlen in folgender Weise zusammenfassen: ***Man rechnet mit komplexen Zahlen** $(\alpha + \beta i)$, $(\alpha' + \beta' i)$, $\cdots$ **geradeso wie mit reellen Aggregaten von der Form** $(\alpha + \beta\lambda)$, $(\alpha' + \beta'\lambda)$, $\cdots$ **mit dem einzigen Unterschied, daß man schließlich** $i^2 = -1$ **und bei weiteren***

1) Es ist also i *eine* der beiden Lösungen der Gleichung:

$$x^2 = -1,$$

deren andere dann mit $-i$ zu bezeichnen ist, sodaß also auch:

$$(-i)^2 = -1.$$

2) S. § 69, Gl. (10), S. 528. Danach ist also $\alpha - \beta i = \alpha + (-\beta) i$, und $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$ heißen *konjugiert*.

Multiplikationen $i^3 = -i$, $i^4 = +1$, *allgemein* $i^{4\nu+\varrho} = i^\varrho$ $(\varrho = 0, 1, 2, 3;\ \nu = 1, 2, 3, \cdots)$ *zu setzen hat*

Es hätte nichts im Wege gestanden, die Einführung der komplexen Zahlen in der Weise zu bewerkstelligen, daß man ohne weiteres Zeichenverbindungen von der Form $\alpha + \beta i$ als *neue* Zahlen zuläßt, ihnen die Rechnungsregel (I)—(IV) einfach *vorschreibt* und sodann den ohne besondere Schwierigkeit zu führenden Beweis dafür nachliefert, daß die auf Grund jener Regeln vorgenommenen Operationen die charakteristischen Eigenschaften der vier Spezies mit reellen Zahlen besitzen und daß daher die Anwendung der betreffenden Operationszeichen bzw. die Bezeichnung jener Operationen als Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division komplexer Zahlen nachträglich gerechtfertigt erscheint.[1]) Bei dem von uns durchweg festgehaltenen Entwicklungsgange schien es uns indessen nicht angemessen, *ex abrupto* anscheinend völlig willkürlich konstruierte Zeichenverbindungen gewissermaßen „auf Vorrat" als neue Zahlen einzuführen, weshalb wir vorzogen, die Schöpfung der komplexen Zahlen und der für sie geltenden Rechnungsregeln auf dem etwas umständlicheren, in den beiden vorigen Paragraphen eingeschlagenen Wege ausführlicher zu motivieren und das Maß der dabei *willkürlich* erscheinenden Festsetzungen nach Möglichkeit einzuschränken.

3 Aus der distributiven Bildungsweise des Produktes zweier komplexer Zahlen folgt auch die Gültigkeit des binomischen Satzes (§ 14) für die n^{te} Potenz von $\alpha + \beta i$, wenn man darunter wieder das Produkt von n gleichen Faktoren $\alpha + \beta i$ versteht, also zunächst:

$$(\alpha + \beta i)^n = \alpha^n + (n)_1\ \alpha^{n-1}\beta i + (n)_2\,\alpha^{n-2}\beta^2 i^2 + \cdots + \beta^n i^n$$

oder wenn man die Fälle $n = 2\nu$ und $n = 2\nu + 1$ trennt und die Potenzen von i angemessen reduziert:

$$(5)\begin{cases}(\alpha + \beta i)^{2\nu} = \alpha^{2\nu} - (2\nu)_2\,\alpha^{2\nu-2}\beta^2 + (2\nu)_4\,\alpha^{2\nu-4}\beta^4 - \cdots + (-1)^\nu \beta^{2\nu} \\ \qquad + \big((2\nu)_1 \cdot \alpha^{2\nu-1}\beta - (2\nu)_3 \cdot \alpha^{2\nu-3}\beta^3 + \cdots\cdots \\ \qquad\qquad + (-1)^{\nu-1}(2\nu)_1\,\alpha\beta^{2\nu-1}\big)\cdot i \\ (\alpha + \beta i)^{2\nu+1} = \alpha^{2\nu+1} - (2\nu+1)_2\,\alpha^{2\nu-1}\beta^2 + (2\nu+1)_4\,\alpha^{2\nu-3}\beta^4 - \cdots \\ \qquad\qquad + (-1)^\nu (2\nu+1)_1\,\alpha\beta^{2\nu} \\ \quad + \big((2\nu+1)_1\,\alpha^{2\nu}\beta - (2\nu+1)_3\,\alpha^{2\nu-2}\beta^3 + \cdots + (-1)^\nu \beta^{2\nu+1}\big)\,i.\end{cases}$$

1) Die in viele Lehrbücher übergegangene Methode, statt der komplexen Zahlen zunächst „Zahlenpaare" einzuführen, bietet, falls dies nicht ausdrücklich zum Zwecke der Untersuchung allgemeinerer Möglichkeiten geschieht, nach unserem Dafürhalten nicht den geringsten Vorteil, dient vielmehr nur dazu, das im Text soeben erwähnte Verfahren zu *verdunkeln* und demselben in noch höherem Maße als notwendig den Stempel der *Willkürlichkeit* aufzudrücken.

Auch bleiben offenbar die in § 13 aufgestellten Rechnungsregeln für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten in Geltung, wenn als Basen an die Stelle der reellen Zahlen komplexe treten.

Bedeutet ferner $R(\alpha+\beta i, \alpha'+\beta' i, \cdots)$ einen aus einer beliebigen Anzahl komplexer Zahlen (unter denen selbstverständlich auch beliebig viele reelle oder rein imaginäre vorkommen können) zusammengesetzten rationalen Ausdruck, so läßt sich derselbe durch Anwendung der Regeln (I)—(IV) stets auf die Form einer einzigen komplexen Zahl bringen, etwa:

$$R(\alpha+\beta i, \alpha'+\beta' i, \cdots) = \mathsf{A}+\mathsf{B}i, \tag{6}$$

wo A, B reelle, aus den reellen Zahlen $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \cdots$ rational zusammengesetzte Zahlen bedeuten. Dabei kann man sich die zu dieser Umformung erforderlichen Operationen so vorgenommen denken, daß man zunächst alle etwa vorkommenden *Nenner* durch Anwendung der Formel (4) *reell* macht und die Potenzen von i, welche infolge der hierzu erforderlichen und der sonstigen vorgeschriebenen Multiplikationen in den *Zählern* auftreten, mit ihren vollen Exponenten anschreibt. Werden diese dann schließlich auf ihre einfachsten Werte ± 1 und $\pm i$ reduziert, so gehen offenbar alle *geraden* Potenzen von i in den reellen Teil A ein, während die *ungeraden* den gesamten imaginären Teil $\mathsf{B}i$ liefern. Ersetzt man nun in dem Ausdruck R jede der Zahlen $\alpha+\beta i, \alpha'+\beta' i, \cdots$ durch ihre konjugierte $\alpha-\beta i$, $\alpha'-\beta' i \cdots$ (wobei also jede *reelle* Zahl sich selbst, jede *imaginare* der entgegengesetzten konjugiert ist), kürzer ausgesprochen, ersetzt man durchweg i durch $-i$ und beachtet, daß:

$$(-i)^{2\nu} = (-1)^{\nu} = i^{2\nu}, \quad (-i)^{2\nu+1} = -(-1)^{\nu}\cdot i = -(i^{2\nu+1}),$$

so folgt, daß der reelle Teil hierdurch keinerlei Veränderung erleidet, während der imaginäre in den entgegengesetzten Wert übergeht, d. h man findet:

$$R(\alpha-\beta i, \alpha'-\beta' i, \cdots) = \mathsf{A}-\mathsf{B}i. \tag{7}$$

4. Es erscheint für spätere Anwendungen nützlich, noch zu zeigen, daß auch die „*Quadratwurzel*" aus einer komplexen Zahl $\alpha+\beta i$ als komplexe Zahl darstellbar ist, genauer gesagt, daß die Gleichung

$$x^2 = \alpha+\beta i \tag{8}$$

im Gebiete der komplexen Zahlen zwei Lösungen besitzt, deren jede mit Hilfe von Quadratwurzeln aus positiven reellen Zahlen sich als komplexe Zahl darstellen läßt.

In dem besonderen Falle $\beta=0$, $\alpha>0$ findet man ohne weiteres, daß die Gleichung $x^2=\alpha$ außer der Lösung $x=\sqrt{\alpha}$ auch die Lösung

$x = -\sqrt{\alpha}$ besitzt, wenn man unter $\sqrt{\alpha}$ die früher definierte positive Quadratwurzel aus der positiven Zahl α versteht.

Ist dagegen $\beta = 0$, $\alpha < 0$, so geht die Gleichung (8) durch die Substitution $x \doteq \eta i$ und Multiplikation mit (-1) in die folgende über

$$\eta^2 = |\alpha|,$$

sodaß sich wiederum $\eta = \pm\sqrt{|\alpha|}$ und daher schließlich $x = \pm\sqrt{|\alpha|}\cdot i$ ergibt. Wir brauchen uns daher des weiteren nur mit dem Falle $|\beta| > 0$ zu beschäftigen (während zugleich $|\alpha| \geqq 0$ sein kann). Setzt man:

$$x = \xi + \eta i, \quad \text{also: } x^2 = \xi^2 - \eta^2 + 2\xi\eta i,$$

so zerfällt die Gleichung (8) durch Trennung des Reellen und Imaginären in die folgenden zwei:

$$\xi^2 - \eta^2 = \alpha \qquad 2\xi\eta = \beta, \tag{9}$$

wobei jetzt ξ und η *reelle* Zahlen bedeuten. Um sie zu bestimmen, bilden wir, indem wir die beiden letzten Gleichungen ins Quadrat erheben und addieren:

$$\xi^4 + 2\xi^2\eta^2 + \eta^4 = \alpha^2 + \beta^2$$

und finden hieraus:

$$\xi^2 + \eta^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

wo die Quadratwurzel, wegen $\xi^2 + \eta^2 > 0$, durchaus nur im *positiven* Sinne zu verstehen ist. Durch Kombination mit der ersten Gleichung (9) folgt weiter:

$$\xi^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha\right), \quad \eta^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha\right)$$

und daher:

$$\xi = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha\right)}, \quad \eta = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha\right)}. \tag{10}$$

Es ergeben sich also sowohl für ξ, als für η *je zwei*, und zwar, wegen $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} > |\alpha|$, stets *reelle* Werte, aus denen sich offenbar im ganzen *vier* verschiedene Verbindungen von der Form $\xi + \eta i$ bilden lassen. Allein, nicht jede derselben wäre eine Lösung unserer Gleichung (8). Aus der zweiten der Gleichungen (9): $2\xi\eta = \beta$ ergibt sich nämlich, daß zu jedem Werte von ξ nur *ein* bestimmter Wert η gehören kann. Um denselben zu fixieren, mögen mit ξ_1, ξ_2 die beiden vorhandenen Werte von ξ bezeichnet werden, und zwar sei:

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha\right)} \quad \text{(alle Quadratwurzeln *positiv* verstanden),} \tag{11a}$$

also $\xi_2 = -\xi_1$. Wird der zu ξ_1 gehörige Wert von η mit η_1 bezeichnet, so kann gesetzt werden:

(11b) $$\eta_1 = \sigma \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha)},$$

wo σ einen der beiden Werte $+1$ oder -1 haben muß, der aus der Beziehung

$$\beta = 2\xi_1\eta_1 = 2\sigma \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha)} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha)}$$
$$= 2\sigma \cdot \sqrt{\tfrac{1}{4}\beta^2} = \sigma \cdot |\beta|$$

zu bestimmen ist. Daraus ergibt sich aber:

(12) $$\sigma = \frac{\beta}{|\beta|}$$

d. h. $\sigma = +1$, wenn $\beta > 0$, dagegen $\sigma = -1$, wenn $\beta < 0$ (mit anderen Worten, der Faktor σ ist gleichbedeutend mit der Hinzufügung des *Vorzeichens* von β). Somit findet man schließlich, wenn man die beiden Lösungen der Gleichung (8) unter die Bezeichnung $\sqrt{\alpha+\beta i}$ zusammenfaßt:

(13) $$\sqrt{\alpha+\beta i} = \pm\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha)} + \frac{\beta}{|\beta|} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha)} \cdot i\right).$$ [1]

Dabei pflegt man den Wurzelwert mit *positivem* reellen Teil oder, wenn der reelle Teil *Null* sein sollte (d. h. im Falle $\beta = 0$, $\alpha < 0$), den positiv imaginären Wert nach dem Vorgang von Cauchy als den *Hauptwert* zu bezeichnen.

Mit Hilfe dieses Ergebnisses läßt sich noch zeigen, daß die allgemeinere Gleichung

(14) $$x^{2^\lambda} = \alpha + \beta i \quad (\lambda = 2, 3, \cdots)$$

2^λ komplexe Lösungen besitzt, deren reelle und imaginäre Teile sich durch wiederholte Quadratwurzelausziehungen aus *reellen* Zahlen darstellen lassen. Denn bringt man Gl. (14) zunächst auf die Form

(14a) $$\left(x^{2^{\lambda-1}}\right)^2 = \alpha + \beta i$$

und bezeichnet wieder mit $\xi_1 + \eta_1 i$ die eine, also mit $-\xi_1 - \eta_1 i$ die andere Lösung der Gleichung $x^2 = \alpha + \beta i$, so zerfällt die Gleichung (14a) in die beiden folgenden:

(14b) $$x^{2^{\lambda-1}} = \xi_1 + \eta_1 i, \quad x^{2^{\lambda-1}} = -\xi_1 - \eta_1 i,$$

---

1) In dem besonderen Falle $\alpha = 0$ hat man:

$$\sqrt{\beta i} = \pm\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}|\beta|} + \frac{\beta}{|\beta|}\sqrt{\tfrac{1}{2}|\beta|} \cdot i\right)$$

und daher speziell für $\beta = 1$:

$$\sqrt{i} = \pm\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot i\right).$$

deren jede wieder in analoger Weise je zwei Werte für $x^{2^{\lambda-2}}$ liefert. Man erhält auf diese Weise vier Gleichungen für $x^{2^{\lambda-2}}$ und so fortfahrend acht Gleichungen für $x^{2^{\lambda-3}}$, schließlich $2^{\lambda-1}$ Gleichungen für x^2 und somit 2^λ Werte für x, und zwar immer unter ausschließlicher Anwendung von Quadratwurzeln aus positiven reellen Zahlen.

Dagegen läßt sich $\sqrt[\nu]{\alpha+\beta i}$ (wo $|\alpha|>0$, $|\beta|>0$), d.h eine Lösung der Gleichung $x^\nu=\alpha+\beta i$, abgesehen von dem betrachteten Falle $\nu=2^\lambda$, bei ganzzahligen $\nu\geqq 3$ *nicht* in ähnlicher Weise berechnen. Versucht man z. B. den Fall $\nu=3$ in ähnlicher Weise wie oben den Fall $\nu=2$ zu behandeln, so findet man zunächst aus

(15) $$(\xi+\eta i)^3=\alpha+\beta i$$

durch Trennung des Reellen und Imaginären die beiden Gleichungen:

(16) $$\xi^3-3\xi\eta^2=\alpha,\quad 3\xi^2\eta-\eta^3=\beta.$$

Erhebt man dieselben ins Quadrat, so folgt:

$$\xi^6-3\xi^4\eta^2+9\xi^2\eta^4=\alpha^2,\quad 9\xi^4\eta^2-6\xi^2\eta^4+\eta^6=\beta^2$$

und hieraus durch Addition:

$$\xi^6+3\xi^4\eta^2+3\xi^2\eta^4+\eta^6=\alpha^2+\beta^2,$$

d. h.

(17) $$\xi^2+\eta^2=\sqrt[3]{\alpha^2+\beta^2}$$

(die Wurzel reell und positiv verstanden). Durch Einsetzen des aus Gl. (17) resultierenden Wertes für η^2 in die erste der Gleichungen (16) ergibt sich, wenn man noch $\sqrt[3]{\alpha^2+\beta^2}=\gamma$ setzt, zur Bestimmung von ξ die Gleichung:

$$4\xi^3-3\gamma\xi-\alpha=0$$

oder auch:

(18) $$(2\xi)^3-3\gamma\cdot(2\xi)-2\alpha=0\quad\left(\text{wo }\gamma=\sqrt[3]{\alpha^2+\beta^2}\right).$$

Diese kubische Gleichung hat in der Tat *drei reelle* Lösungen ξ, wie sich mit den Hilfsmitteln der Funktionenlehre leicht zeigen läßt. Auch ergibt sich zu jedem dieser ξ ein und nur ein zugehöriger reeller Wert für η. Man findet nämlich aus Gl. (17) zunächst: $\eta^2=\gamma-\xi^2$ und aus der zweiten der Gleichungen (16) durch Einsetzen dieses Wertes:

(19) $$\eta=\frac{\beta}{3\xi^2-\eta^2}=\frac{\beta}{(2\xi)^2-\gamma}.$$

Daraus würde dann folgen, daß die Gleichung $(\xi+\eta i)^3=\alpha+\beta i$ *drei* Lösungen besitzt, daß also das zunächst rein formale Symbol $\sqrt[3]{\alpha+\beta i}$ wirklich eine *Bedeutung* hat, nämlich drei verschiedene komplexe Zahlen vorstellt.

Allein es ist nicht möglich, jene drei Lösungen der Gleichung (18) „reell-algebraisch", d. h. lediglich durch Wurzelausdrücke in *reeller* Form darzustellen, vielmehr sind hierzu sog. „analytische" Hilfsmittel (Reihenentwicklungen) erforderlich. Den Beweis für dieses Verhalten kubischer Gleichungen von der Form der Gleichung (18) (des sog *casus irreducibilis*) liefert die Algebra. *Hier* soll nur gezeigt werden, daß der Versuch, ξ aus der Gleichung (18) durch ein direktes Auflösungsverfahren[1]) zu bestimmen, auf einen *circulus vitiosus* führt. Bedeutet ξ' eine ganz beliebige Zahl, so hat man identisch:

$$\begin{aligned}(2\xi)^3 &= \big((\xi+\xi')+(\xi-\xi')\big)^3\\ &= (\xi+\xi')^3+(\xi-\xi')^3+3\cdot 2\xi\cdot(\xi+\xi')(\xi-\xi')\end{aligned}$$

und kann daher Gl. (18) in die folgende Form setzen:

$$(\xi+\xi')^3+(\xi-\xi')^3-2\alpha+3\cdot 2\xi\big((\xi+\xi')(\xi-\xi')-\gamma\big)=0,$$

und diese Gleichung wird offenbar befriedigt, wenn:

$$(20)\qquad (\xi+\xi')^3+(\xi-\xi')^3=2\alpha,\quad (\xi+\xi')(\xi-\xi')=\gamma.$$

Erhebt man die erste dieser Gleichungen ins Quadrat, die zweite in den Kubus und multipliziert sie mit 4, so folgt durch Subtraktion:

$$(\xi+\xi')^6-2(\xi+\xi')^3(\xi-\xi')^3+(\xi-\xi')^6=4(\alpha^2-\gamma^3)=-4\beta^2$$

und daher:

$$(\xi+\xi')^3-(\xi-\xi')^3=\pm 2\beta i,$$

also durch Kombination mit der ersten der Gleichungen (20):

$$(\xi+\xi')^3=\alpha\pm\beta i,\quad (\xi-\xi')^3=\alpha\mp\beta i.$$

Hieraus würde wieder nur folgen:

$$\xi+\xi'=\sqrt[3]{\alpha\pm\beta i},\quad \xi-\xi'=\sqrt[3]{\alpha\mp\beta i},$$

sofern diese Symbole überhaupt einen Sinn haben, d. h. bestimmte komplexe Zahlen vorstellen. Ist dies aber der Fall (was, wie bemerkt, auf diesem und überhaupt auf „rein algebraischem" Wege nicht zu ersehen ist), so läßt sich aus der zweiten der Gleichungen (20) und den beiden letzten Gleichungen erschließen, daß $\xi+\xi'$ und $\xi-\xi'$ *konjugierte* Zahlen sind[2]), also ξ dann wirklich *reell* ausfällt.

5. Aus der zuvor erwiesenen Möglichkeit, die Gleichung $x^2=\alpha+\beta i$ wirklich aufzulösen, d. h. durch zwei bestimmte (nur durch das Vor-

---

1) Dasselbe besteht in der Anwendung derjenigen Methode auf den vorliegenden speziellen Fall, welche in der Algebra als Auflösung mittels der *Cardanischen Formel* bezeichnet wird.

2) Vgl. § 69, S. 529, Fußnote 1).

zeichen verschiedene) komplexe Zahlen zu befriedigen, läßt sich das entsprechende Ergebnis für jede beliebige quadratische Gleichung

$$(21)\qquad ax^2 + 2bx + c = 0$$

herleiten, unter a, b, c *beliebige komplexe* Zahlen (insbesondere $a \neq 0$) verstanden. Man hat nämlich identisch:

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bx + c &= \frac{1}{a}(a^2x^2 + 2abx + ac) \\ &= \frac{1}{a}\left((ax+b)^2 - (b^2 - ac)\right) \end{aligned}$$

oder auch, wenn man unter $\sqrt{b^2 - ac}$ irgendeinen bestimmten Wert, etwa den Hauptwert dieser Quadratwurzel versteht:

$$(22)\qquad \begin{aligned} ax^2 + 2bx + c &= \frac{1}{a}(ax + b - \sqrt{b^2 - ac})\,(ax + b + \sqrt{b^2 - ac}) \\ &= a\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}\right), \end{aligned}$$

sodaß also die Gleichung (21) die beiden Lösungen besitzt:

$$(23)\qquad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad \text{und:} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}.^{1)}$$

Der Ausdruck $(b^2 - ac)$ heißt die *Diskriminante* der quadratischen Gleichung. Ist $b^2 - ac = 0$, so fallen jene beiden sonst verschiedenen Lösungen in eine einzige (sog. Doppelwurzel) zusammen.

Sind a, b, c *reell* und ist $b^2 - ac > 0$, so sind die beiden Lösungen offenbar *reell*, dagegen *konjugiert komplex*, wenn $b^2 - ac < 0$.

§ 71. Die bisher betrachteten komplexen Zahlen als allgemeinste Zahlen unserer gewöhnlichen Arithmetik. — Äquivalenz der Zahlenmengen $\xi + \eta i$ und x, wo: $0 \leqq \xi \leqq 1$, $0 \leqq \eta \leqq 1$ und: $0 \leqq x \leqq 1$.

1. Den Anlaß, unseren Zahlenvorrat allmählich immer mehr zu erweitern, gab die Unmöglichkeit, die aus der Addition und Multiplikation (einschließlich der Potenz mit ganzzahligem Exponenten) hervorgehenden Umkehrungsaufgaben mit den vorhandenen Zahlen zu be-

---

1) Man hat also:

$$ax^2 + 2bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

und

$$x_1 + x_2 = -\frac{2b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

wältigen, also gewisse Gleichungen sehr einfacher Art aufzulösen.[1]) Es liegt daher die Vermutung nahe, daß ähnliche Aufgaben und zumal solche von zusammengesetzterer Beschaffenheit uns zu weiteren Zahlenschopfungen nötigen könnten, ja es wäre sogar denkbar, daß die Notwendigkeit solcher Neuschöpfungen niemals ein Ende nähme Glücklicherweise ist nicht einmal das erstere der Fall. Es wird sich nämlich — allerdings erst sehr viel später (im zweiten Bande dieser Vorlesungen) — zeigen, daß unsere komplexen Zahlen ausreichen, um jede beliebige „algebraische“ Gleichung, d. h jede von der Form:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

(wo n eine natürliche Zahl, $a_0, a_1, \cdots a_n$ beliebige komplexe Zahlen) mit Lösungen zu versehen. Ja, das gleiche gilt sogar, von gewissen ganz besonderen Ausnahmefällen abgesehen, in bezug auf Gleichungen noch komplizierterer Art („transzendente“ Gleichungen), und selbst jene Ausnahmefälle können uns nicht zu einer neuen Erweiterung unseres Zahlengebietes veranlassen, weil dieses letztere in einem sogleich noch genauer anzugebenden Sinne überhaupt keine solche mehr zuläßt, vielmehr mit der Schöpfung unserer bisherigen komplexen Zahlen vollständig abgeschlossen erscheint. Um diese Aussage zu präzisieren, ist vor allem notwendig, daß wir ein *bestimmtes Maß* derjenigen Eigenschaften, welche den *reellen* Zahlen zukommen, von allen denjenigen Zahlen ausdrücklich fordern, welche wir zum Gegenstande *„unserer“* Zahlenlehre oder, wie man zu sagen pflegt, der *„allgemeinen“* oder *„gewöhnlichen“ Arithmetik* machen wollen. Es sind dies die folgenden:

1. Die *vier Spezies* (außer der Division durch *Null*) sollen im Gebiete der von uns zugelassenen Zahlen stets *eindeutig ausführbar*, die *Addition* und *Multiplikation kommutativ* und *assoziativ*, die letztere auch *distributiv* sein.
2. Ein *Produkt* soll dann und nur dann *Null* sein, wenn mindestens einer der Faktoren gleich *Null* ist.

---

1) Dies gilt bezüglich der Einführung der *gebrochenen, negativen, irrationalen* und *imaginären* Zahlen: die Veranlassung zur Einführung der *komplexen* Zahlen ergab sich dann schon unmittelbar aus der Forderung, die Addition innerhalb des aus den *reellen und imaginären* Zahlen bestehenden Zahlengebietes ausführbar zu machen. Im übrigen hätten wir diesen Schritt auch, ähnlich wie die Einführung der imaginären Zahlen, mit der Unmöglichkeit motivieren können, die Gleichung:

$$x^2 = \overline{(\alpha^2)} = \alpha^2 i$$

durch reelle oder imaginäre Zahlen zu befriedigen. Man findet:

$$x = \pm\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} i\right),$$

vgl. S. 539, Fußnote.

Alsdann läßt sich zeigen, daß unsere *bisherigen* komplexen Zahlen, welche nötigenfalls zum Unterschiede von anderen Bildungen ausdrücklich als *gewöhnliche* oder *gemeine* komplexe Zahlen bezeichnet werden, die *einzigen* sind, welche der Gesamtheit der obigen Forderungen genügen. Die hierzu dienlichen Untersuchungen erfordern indessen gewisse algebraische Hilfsmittel, die wir weder als bekannt voraussetzen, noch auch, als zu weit abführend, hier entwickeln wollen. Wir wollen uns vielmehr damit begnügen, an dem nächstliegenden Einzelfalle das Eintreten der oben angedeuteten Eventualitäten, und zwar das Versagen der Forderung 2., falls die Forderungen 1. erfüllt sind, deutlich zu machen.

2. Wir ordnen jeder reellen Zahl α außer der bisherigen imaginären Zahl αi noch eine zweite, davon qualitativ verschiedene zu, der wir auf Grund ganz analoger Betrachtungen wie diejenigen, die uns zu der Schreibweise αi geführt haben, die Form αj geben können, wenn j die neue *„imaginäre Einheit"*, d. h. die der reellen Zahl 1 zugeordnete neue imaginäre Zahl bedeutet. Sodann bilden wir komplexe Zahlen von der Form:

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j, \tag{1}$$

unter α_0, α_1, α_2 reelle Zahlen verstanden. Dabei ist dann und nur dann:

$$\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j = 0,$$

wenn:

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0.$$

Zunächst findet man nämlich $\alpha_2 = 0$ (da anderenfalls: $j = -\frac{\alpha_0}{\alpha_2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} i$, d. h. eine gewöhnliche komplexe Zahl) und sodann, wie früher, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$. Des weiteren folgt daraus, daß:

$$\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j = \alpha_0' + \alpha_1' i + \alpha_2' j$$

dann und nur dann, wenn:

$$\alpha_0 = \alpha_0', \quad \alpha_1 = \alpha_1', \quad \alpha_2 = \alpha_2'.$$

Soll nun die Multiplikation im Gebiete der Zahlen a ausführbar sein, so muß eine Beziehung von der Form bestehen:

$$j \cdot j = s_0 + s_1 i + s_2 j, \tag{2}$$

wo s_0, s_1, s_2 bestimmte reelle Zahlen bedeuten. Sind dieselben sämtlich $= 0$, so hätte man: $j \cdot j = 0$, sodaß also die Zahl j selbst (welche ja von *Null* verschieden sein muß, da sich anderenfalls die Zahlen a auf gewöhnliche komplexe reduzieren würden) der Forderung 2. nicht genügen würde.

Sind ε_0, ε_1, ε_2 mindestens zum Teil von *Null* verschieden, so bringe man Gl. (2) auf die Form:

$$j^2 - \varepsilon_2 j - (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 i) = 0, \tag{3}$$

was gestattet ist, da ja Addition und Subtraktion auf Grund der Forderung 1. nach den gewöhnlichen Regeln ausgeführt werden dürfen. Nun hat man aber nach Gl (22) des vorigen Paragraphen (S. 542):

$$\begin{aligned} &x^2 - \varepsilon_2 x - (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 i) \\ &= \left(x - \frac{\varepsilon_2}{2} - \sqrt{\frac{\varepsilon_2^2}{4} + \varepsilon_0 + \varepsilon_1 i}\right)\left(x - \frac{\varepsilon_2}{2} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2^2}{4} + \varepsilon_0 + \varepsilon_1 i}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Diese Beziehung wurde a. a. O. zwar zunächst unter der dort selbstverständlichen Voraussetzung abgeleitet, daß x irgendeine gewöhnliche komplexe Zahl bedeutet. Sie ist aber, wie man durch direkte Ausrechnung leicht verifizieren kann, eine vollkommene *Identität* in dem Sinne, daß sie gültig bleibt für jedes beliebige x, welches eine Anwendung der gewöhnlichen Multiplikationsregeln auf die rechte Seite gestattet. Da diese Bedingung aber auf Grund der Voraussetzung 1. erfüllt ist, wenn $x = j$ gesetzt wird, so findet man mit Berücksichtigung von Gl. (3):

$$\left(j - \frac{\varepsilon_2}{2} - \sqrt{\frac{\varepsilon_2^2}{2} + \varepsilon_0 + \varepsilon_1 i}\right)\left(j - \frac{\varepsilon_2}{2} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2^2}{4} + \varepsilon_0 + \varepsilon_1 i}\right) = 0, \tag{5}$$

also ein *Produkt*, welches gleich *Null* ist, ohne daß ein Faktor diese Eigenschaft besitzt: letzteres wäre ja nur der Fall, wenn: $j = \frac{\varepsilon_2}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_2^2}{4} + \varepsilon_0 + \varepsilon_1 i}$), also j eine *gewöhnliche komplexe* Zahl, was der Voraussetzung widerspricht.

Die Zahlen von der Form $\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j$ genügen also unter Voraussetzung der Forderung 1. *nicht* der Forderung 2.[1])

3. Es soll hier noch die äußerst merkwürdige Tatsache festgestellt werden, daß die Menge der gewöhnlichen *komplexen* Zahlen

---

1) Will man nicht gerade diesen, sondern irgendeinen anderen Widerspruch deduzieren, so kann man etwas kürzer folgendermaßen verfahren. Analog mit Gl. (2) muß auch eine Beziehung von der Form bestehen:

$$ij = \vartheta_0 + \vartheta_1 i + \vartheta_2 j,$$

also, wenn man mit i multipliziert:

$$\begin{aligned} -j &= \vartheta_0 i - \vartheta_1 + \vartheta_2 ij \\ &= (\vartheta_0 \vartheta_2 - \vartheta_1) + (\vartheta_0 + \vartheta_1 \vartheta_2) i + \vartheta_2^2 j, \end{aligned}$$

woraus durch Vergleichung der Koeffizienten von j:

$$\vartheta_2^2 = -1$$

resultieren würde, im Widerspruch mit der Voraussetzung, wonach ϑ_2 *reell* sein sollte.

$X = \xi + \eta i$ des *„zweidimensionalen“ Bereiches*: $0 \leqq \xi \leqq 1$, $0 \leqq \eta \leqq 1$ nur *dieselbe Mächtigkeit* (vgl. § 25, Nr. 2, S. 150) besitzt wie die Menge der *reellen* Zahlen des *Intervalls* (*„eindimensionalen“ Bereiches*): $0 \leqq x \leqq 1$.

Um dies zu erkennen, denke man sich alle Zahlen ξ, η und x, die > 0 und $\leqq 1$ sind, als *unendliche* dyadische Brüche dargestellt, also insbesondere die auch als *endliche* dyadische Brüche darstellbaren (d. h. diejenigen, welche in der gewöhnlichen Bruchform nur eine Potenz von 2 zum Nenner haben), als *unendliche* mit der Periode 1 (vgl. § 20, Nr. 2, S. 120). Dabei wollen wir uns einer der Dezimalbruch-Bezeichnung nachgebildeten Schreibweise bedienen, sodaß also ein Zeichen von der Form:

$$0, \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu \cdots\cdots$$

die Bedeutung von:

$$\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha_\nu}{2^\nu} + \cdots\cdots$$

haben soll, wo die α_ν nur eine der beiden Zahlen 0 und 1 vorstellen, mit der ausdrücklichen Festsetzung, daß die Beziehung $\alpha_\nu = 1$ für unendlich viele ν stattzufinden hat und daher keiner der fraglichen Brüche jemals abbricht.

Hat man sodann für irgendein $X = \xi + \eta i$, wo sowohl $\xi > 0$, als $\eta > 0$:

$$\xi = 0, \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_\nu \cdots\cdots$$
$$\eta = 0, \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_\nu \cdots\cdots,$$

so ordne man dieser *komplexen* Zahl X die reelle Zahl:

$$x = 0, \beta_1 \gamma_1 \beta_2 \gamma_2 \cdots \beta_\nu \gamma_\nu \cdots\cdots$$

zu, ferner, falls $\xi = 0$ *oder* $\eta = 0$ sein sollte, die *komplexe* Zahl X sich also auf eine *rein imaginäre* oder *reelle* Zahl reduziert,

jeder Zahl: $X = \eta i$ die Zahl: $x = 0, 0\gamma_1 0\gamma_2 \cdots 0\gamma_\nu \cdots\cdots$
jeder Zahl: $X = \xi$ die Zahl: $x = 0, \beta_1 0 \beta_2 0 \cdots \beta_\nu 0 \cdots\cdots$,

schließlich noch

der Zahl: $X = 0$ die Zahl: $x = 0$.

Auf Grund dieser Zuordnung entspricht *jedem* $X = \xi + \eta i$ *ein* und *nur* ein bestimmtes x, und zwar entsprechen *verschiedenen* X auch durchweg *verschiedene* x. Dabei zeigt sich aber, daß bei diesem Verfahren zwar *alle* X, aber *keineswegs alle* möglichen x zum Vorschein kommen: es *fehlen* diejenigen von Null verschiedenen $x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{2\nu-1} \alpha_{2\nu} \cdots\cdots$, bei welchen von einer bestimmten Stelle

$\nu \geqq n > 1$ ab *durchweg* $\alpha_{2\nu-1} = 0$ bzw. $\alpha_{2\nu} = 0$ ist[1]), da ja weder die β_ν, noch die γ_ν von irgendeinem bestimmten ν ab beständig *Null* sein können. Hiernach erweist sich also die Menge der Zahlen X oder, wie wir kürzer sagen wollen, die Menge (X) zunächst als *äquivalent* einer *Teilmenge* der Menge (x).

Hiermit wäre sogar noch *mehr* bewiesen, als behauptet wurde: man braucht gar nicht einmal die *ganze* reelle Menge (x) in Anspruch zu nehmen, um *jedem* Elemente der komplexen Menge (X) ein reelles Element x zuzuordnen. Und man dürfte geneigt sein, hieraus ohne weiteres zu schließen, daß die *Mächtigkeit* von (X) jedenfalls *nicht größer* sein könne als diejenige von (x).

Andererseits ist ja aber die Menge (x) *identisch*, also auch *äquivalent* mit der in (X) enthaltenen *Teilmenge* (ξ), woraus auf Grund der eben benützten Schlußweise folgen würde, daß die *Mächtigkeit* von X auch *nicht kleiner* sein könnte als diejenige von (x). Und es läge dann weiterhin nahe, nach dem Vorbilde eines für *endliche* Mengen gültigen und sogar noch für *Grenzwerte* abzählbarer Zahlmengen als zulässig erwiesenen[2]) Schlußverfahrens zu folgern, daß die *Mächtigkeiten* von (X) und (ξ) einander *gleich* sein müßten.

Nichtsdestoweniger entbehrt jede dieser Schlußfolgerungen für unseren jetzigen Standpunkt der nötigen Grundlage. Denn *erstens* wurde bisher nur der Begriff der *Gleichheit*[3]) zweier Mächtigkeiten allgemein definiert (§ 25, Nr. 2, S. 150), und es zeigt sich andererseits, daß der Versuch, auch die Begriffe *„größer"* und *„kleiner"* widerspruchslos zu definieren, auf erhebliche Schwierigkeiten stößt, solange das hier in Frage stehende Ergebnis (nämlich die *Äquivalenz* zweier Mengen, die in einer gegenseitigen Beziehung stehen wie die hier mit (X) und (x) bezeichneten) nicht bereits *ohne* Benützung der Begriffe *„größer"* und *„kleiner"* lediglich auf Grund der Definition der *Gleichheit* zweier Mächtigkeiten erwiesen ist *Zweitens* wäre es, selbst wenn es gelänge, eine ausreichende Definition für die Begriffe *„größer"* und *„kleiner"* auf *anderem* Wege zu gewinnen, noch nicht erlaubt, aus dem Umstande, daß die Mächtigkeit von (X) *weder größer noch kleiner* sein sollte als diejenige von (x), *ohne weiteres* die *Gleichheit* der beiden.

1) Für $n = 1$ sind die Zahlen x dieser Gattung als zugeordnete zu den Zahlen $X = \eta i$ und $X = \xi$ vorhanden.

2) Vgl. § 28, Gl. (25), S 172 und § 37, Gl. (21b), S. 233.

3) Nur in einem besonderen Falle, nämlich bei der Gegenüberstellung der Menge der Irrationalzahlen als einer *nicht abzählbaren* und einer beliebigen *abzählbaren* Menge, wurde mit ganz ausdrücklicher Motivierung die Mächtigkeit der *ersteren* als die *höhere* bezeichnet (§ 25, Nr 7, S. 159).

Mächtigkeiten zu folgern. Vielmehr bestände ja dann noch die Möglichkeit, daß die letzteren *überhaupt nicht vergleichbar* sein könnten[1]): tatsächlich erscheint bei dem heutigen Stande der Mengenlehre das Vorhandensein einer solchen Möglichkeit nur mit Zuhilfenahme eines *Axioms*, des sogenannten *Auswahl-Axioms* endgültig ausgeschlossen.

Nach alledem würde es sich also zur Erledigung der vorliegenden Frage um den direkten Beweis eines Satzes handeln, der folgendermaßen zu lauten hätte: „Ist eine Menge A äquivalent einer Teilmenge b der Menge B, die letztere äquivalent einer Teilmenge a von A, so sind A und B äquivalent."

In der Tat kann der Beweis dieses für die Begründung der Mengenlehre überaus wichtigen Satzes (des sog. *„Äquivalenzsatzes"*) in vollkommen befriedigender Weise geführt werden, d. h. indem geradezu festgestellt wird, daß unter den gemachten Voraussetzungen eine eindeutig umkehrbare gegenseitige Zuordnung der Elemente von A und B stets möglich ist. Wenn wir indessen davon absehen, diesen (selbstverständlich in jeder zusammenhängenden Darstellung der Grundzüge der Mengenlehre leicht aufzufindenden) Beweis an dieser Stelle zu reproduzieren, so geschieht dies, weil wir keine weitere Gelegenheit haben werden, von jenem allgemeinen Satze Gebrauch zu machen, dagegen in der Lage sind, den besonderen Fall, um den es sich hier handelt, durch eine unerhebliche Modifikation des zuvor eingeschlagenen Weges vollständig zu erledigen — anschaulicher sogar als durch bloße Berufung auf den obigen Äquivalenzsatz, welche ja nur die *Existenz* einer Zuordnung der fraglichen Art außer Zweifel setzen würde, während durch das hier anzugebende Verfahren, wie ja schon dessen erste noch nicht ganz vollkommene Form vermuten läßt, eine solche Zuordnung wirklich *hergestellt* wird. Im übrigen sollte jener erste Versuch gerade dadurch, daß er noch nicht zur vollkommenen Erreichung des gewünschten Zieles führte, dazu dienen, dem Leser die Notwendigkeit der daran vorzunehmenden Abänderung deutlich zu machen und zugleich ihn darauf hinzuweisen, welche Vorsicht bei der Übertragung sonst gewohnter Schlußweisen auf *unendliche* Mengen beobachtet werden muß.

4. Der Grund, warum die am Anfange der vorigen Nummer vorgenommene Zuordnung der komplexen Zahlen $X = \xi + \eta i$ zu den reellen Zahlen x kein völlig befriedigendes Resultat ergab, liegt in dem Umstande, daß die Beziehung zwischen den reellen Zahlen und

1) Ein analoger Fall tritt z. B. bei den sog. *infinitären Beziehungen* ein (vgl. § 87, Nr. 6, S. 287). Ist *weder:* $a_\nu \prec b_\nu$, *noch:* $a_\nu \succ b_\nu$, so folgt ja daraus *keineswegs*, daß $a_\nu \cong b_\nu$ oder auch nur $a_\nu \sim b_\nu$ sein müßte.

den Systembrüchen irgendeiner Basis, insbesondere also den hier benützten dyadischen Brüchen, keine vollkommen eindeutige ist, daß vielmehr gewissen reellen Zahlen *zwei* verschiedene dyadische Brüche entsprechen, ein *endlicher* oder, wie wir in dem vorliegenden Zusammenhange zweckmäßiger sagen wollen, ein *unendlicher* mit der *Periode* 0 und ein ebensolcher mit der *Periode* 1. Aus der Notwendigkeit, *eine* dieser beiden Darstellungsformen auszuschließen — wobei wir uns für die Ausschließung der Brüche mit der Periode 0 entschieden —, ergab sich der Übelstand, daß den Zahlen der Menge (x) von der Form: $0, \alpha_1 \cdots \alpha_\nu 0 \alpha_{\nu+2} 0 \alpha_{\nu+4} \cdots \cdots (\nu > 1)$ *keine* innerhalb der nun einmal gewählten Darstellungsform vorhandenen Wertepaare (ξ, η) entsprachen, da ja die zur Herstellung eines solchen Wertepaares erforderliche Zerlegung jenes dyadischen Bruches x in *zwei* solche *einen* Bruch mit der Periode 0 liefern muß. Um diese Möglichkeit auszuschalten, kommt es offenbar lediglich darauf an, die *Null* daran zu *verhindern*, bei dem betreffenden Zerlegungsverfahren eine *Periode* zu bilden, und dieses Ziel kann mit Sicherheit erreicht werden, wenn man jede *einzeln* auftretende *Null* bzw. jede vorhandene *Folge* von mehreren *Nullen* mit der unmittelbar darauffolgenden *Eins* zu einem untrennbaren *Ziffernkomplex* vereinigt und sodann diesen *Ziffernkomplexen* dieselbe Rolle zuteilt, welche bisher die *einzelnen* Ziffern spielten.

Die Ausführung dieses einfachen Grundgedankens führt nun zu der folgenden Abänderung des ursprünglich eingeschlagenen Verfahrens. Es sei:

$$\xi = 0, \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_\nu \cdots, \text{ und zwar: } 0 < \xi \leqq 1.$$

Unter den β_ν kommt unendlich oft der Wert $\beta_\nu = 1$ vor, und zwar seien:

$$m_1, m_2, \cdots m_\lambda, m_{\lambda+1}, \cdots\cdots$$

die Nummern aller derjenigen Stellen, für welche $\beta_{m_\lambda} = 1$ $(\lambda = 1, 2, 3 \cdots\cdots)$. Es mögen sodann

$$(\beta_{m_1}), \quad (\beta_{m_2}), \cdots (\beta_{m_\lambda}), \quad (\beta_{m_{\lambda+1}}) \cdots\cdots$$

diejenigen *Ziffernkomplexe* bzw. *Einzelziffern* 1 bedeuten, welche zum Vorschein kommen, wenn man mit β_{m_1} die etwa *vorangehenden*, hinter dem Komma befindlichen *Nullen* vereinigt, und allgemein mit $\beta_{m_{\lambda+1}}$ diejenigen *Nullen*, welche etwa *zwischen* β_{m_λ} und $\beta_{m_{\lambda+1}}$ vorhanden sind.[1]

---

1) Es bedeutet also (β_{m_1}) dasselbe wie β_1, wenn $m_1 = 1$, wenn also der dyadische Bruch unmittelbar hinter dem Komma mit 1 beginnt; und $(\beta_{m_{\lambda+1}})$ ist identisch mit $\beta_{m_{\lambda+1}}$, wenn zwischen β_{m_λ} und $\beta_{m_{\lambda+1}}$ *keine Null* steht, mit anderen Worten, wenn: $m_{\lambda+1} = m_\lambda + 1$.

Alsdann läßt sich der obige dyadische Bruch in der Form anschreiben:

$$\xi = 0, (\beta_{m_1})(\beta_{m_2}) \cdots (\beta_{m_\lambda}) \cdots\cdots,$$

und in analoger Bedeutung werde gesetzt:

$$\eta = 0, (\gamma_{n_1})(\gamma_{n_2}) \cdots (\gamma_{n_\lambda}) \cdots\cdots, \text{ wo: } 0 < \eta \leqq 1$$

Die aus diesen Wertepaaren ξ, η gebildeten *komplexen* Zahlen $X' = \xi + \eta i$ umfassen dann die gesamte früher mit (X) bezeichnete Menge *mit Ausschluß* der *reellen* und der *rein imaginären*. Jeder dieser *komplexen* Zahlen X' ordnen wir nun die *reelle* Zahl:

$$x = 0, 1(\beta_{m_1})(\gamma_{n_1}) \cdots (\beta_{m_\lambda})(\gamma_{n_\lambda}) \cdots\cdots$$

zu.[1]) *Jedem* X' entspricht dann *ein* bestimmtes x, und zwar *verschiedenen* X' stets auch *verschiedene* x. *Umgekehrt* entspricht *jedem* x, das hinter dem Komma mit 1 beginnt, also jedem x von der Form:

$$x = 0, 1(\alpha_{p_1})(\alpha_{p_2}) \cdots (\alpha_{p_\lambda}) \cdots$$

(wo jetzt: $\frac{1}{2} < x \leqq 1$ und die (α_{p_λ}) analoge Bedeutung besitzen, wie zuvor die (β_{m_λ})) *ein* bestimmtes $X' = \xi + \eta i$, das definiert ist durch die Beziehungen:

$$\xi = 0, (\alpha_{p_1})(\alpha_{p_3}) \cdots (\alpha_{p_{2\lambda-1}}) \cdots\cdots$$
$$\eta = 0, (\alpha_{p_2})(\alpha_{p_4}) \cdots (\alpha_{p_{2\lambda}}) \cdots\cdots,$$

und zwar *verschiedenen* x stets auch wieder *verschiedene* X'. Hiernach ist zunächst die Gesamtheit der früher mit (X) bezeichneten Menge *mit Ausschluß* der *reellen* und *rein imaginären* Zahlen den reellen Zahlen x des Intervalls $\frac{1}{2} < x \leqq 1$ umkehrbar eindeutig zugeordnet.

Um das Entsprechende auch noch für jene vorläufig noch ausgeschlossenen Zahlen X zu bewerkstelligen, setzen wir:

im Falle $X = \xi$ (wo: $0 \leqq \xi \leqq 1$): $x = \frac{1}{4}\xi$ $\left(\text{also: } 0 \leqq x \leqq \frac{1}{4}\right)$

im Falle $X = \eta i$ (wo: $0 < \eta \leqq 1$): $x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\eta$ $\left(\text{also: } \frac{1}{4} < x \leqq \frac{1}{2}\right)$

oder auch, in dyadischer Schreibweise:

für $X = \xi = 0, \beta_1\beta_2 \cdots \beta_\nu \cdots\cdots$: $x = 0, 00\beta_1\beta_2 \cdots \beta_\nu \cdots\cdots$[2])

für $X = \eta i$, wo $\eta = 0, \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_\nu \cdots\cdots$: $x = 0, 01\gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_\nu \cdots\cdots$

1) Der Grund, warum wir bei der Definition von x eine 1 unmittelbar hinter dem Komma einschieben, wird durch das Folgende ersichtlich werden.

2) Mit dem Zusatze:

$$x = 0 \text{ für } X = 0.$$

Damit ist aber jetzt die gesamte Menge (X) eindeutig umkehrbar der Menge (x) zugeordnet, also die *Äquivalenz* der beiden Mengen bewiesen [1])

Wir werden übrigens bei späterer Gelegenheit noch zeigen, wie man statt der Darstellung der reellen Zahlen durch *Systembrüche* auch diejenige der Irrationalzahlen durch sog. regelmäßige unendliche *Kettenbrüche* für den gleichen Zweck benützen kann.

§ 72. Absoluter Betrag und Einheitsfaktor komplexer Zahlen.

1. Auf Grund der im vorigen Paragraphen gemachten Auseinandersetzungen werden wir uns in diesen Vorlesungen ausschließlich mit „gewöhnlichen" komplexen Zahlen beschäftigen und demgemäß unter komplexen Zahlen schlechthin immer nur solche verstehen. Als Zeichen für solche komplexe Zahlen (die sich natürlich eventuell auch auf *reelle* reduzieren können) werden wir im allgemeinen *kleine lateinische*, als Zeichen für *wesentlich reelle* Zahlen *kleine griechische* Buchstaben verwenden, mit dem Vorbehalt, für *natürliche* Zahlen als *Indizes* oder *Exponenten* nach Bedarf gewisse *lateinische* Buchstaben, wie m, n, p usw., zu benützen.

Den *reellen Teil* einer komplexen Zahl a bezeichnet man nach dem Vorgange von Weierstraß mit $\mathfrak{R}(a)$, also:

(1) $$\mathfrak{R}(a) = \alpha, \text{ wenn } a = \alpha + \beta i.$$

Für den *imaginären Teil* bedarf man keiner besonderen Bezeichnung, da $\frac{a}{i} = \beta - \alpha i$ und daher:

(2) $$\mathfrak{R}\left(\frac{a}{i}\right) = \beta.$$ [2])

1) Betrachtet man statt der komplexen Zahl $\xi + \eta i$ das *Zahlenpaar* (ξ, η) als eine *„zweidimensionale" Zahl* und bezeichnet dementsprechend einen Komplex von n *reellen* Zahlen $(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n)$ als *„n-dimensionale" Zahl,* so läßt sich ganz analog wie im Text zeigen, daß auch die *n-dimensionale Zahlenmenge* $(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n)$, wo. $0 \leqq \xi_\nu \leqq 1$ $(\nu = 1, 2, \cdots n)$ nur genau *dieselbe Mächtigkeit* besitzt wie die reelle Zahlenmenge (x) des Intervalls $0 \leqq x \leqq 1$.

Ferner sei noch ergänzend bemerkt, daß mit Hilfe eines sehr einfachen funktionen- bzw. mengentheoretischen sog. Abbildungsprinzips das im Text gegebene Äquivalenzresultat auch auf die gesamte Menge der komplexen Zahlen einerseits und diejenige der reellen Zahlen andererseits ausgedehnt werden kann. (Für die *rationalen komplexen* Zahlen, d. h. die Zahlen $\xi + \eta i$ mit *rationalem* ξ und η, folgt die Äquivalenz mit der Menge der *rationalen reellen* Zahlen ohne weiteres aus dem Umstande, daß die fragliche Zahlenmenge nach § 39, Nr. 2, S. 251, als eine *zweifach abzählbare* auch schlechthin *abzählbar* ist.)

2) Immerhin wird gelegentlich für den Koeffizienten von i auch die besondere Bezeichnung $\mathfrak{J}(a)$ gebraucht, sodaß also in dem vorliegenden Falle

$$\mathfrak{J}(a) = \beta$$

wäre.

Die reellen Zahlen α, β fassen wir erforderlichenfalls unter der Bezeichnung *Komponenten* der komplexen Zahl $a = \alpha + \beta i$ zusammen.[1])

Unter dem *absoluten Betrage* oder *Absolutwert* von $a = \alpha + \beta i$ versteht man den *positiven* Wert von $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, in Zeichen:

$$(3) \qquad |a| = |\alpha + \beta i| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Man erkennt unmittelbar, daß diese Definition mit den früher gegebenen übereinstimmt, falls a sich auf eine reelle oder rein imaginäre Zahl reduziert, also $\beta = 0$ oder $\alpha = 0$ ist. Aus der Definition folgt außerdem, daß die *vier* Zahlen: $\pm a$ und die beiden dazu *konjugierten*, also $\pm(\alpha + \beta i)$ und $\pm(\alpha - \beta i)$ den nämlichen absoluten Betrag haben.

Setzt man a (unter der Voraussetzung $|a| > 0$) in die Form:

$$a = |a| \cdot \frac{a}{|a|} = |a| \cdot \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} i \right),$$

so ist der zweite Faktor $\frac{a}{|a|}$ offenbar eine komplexe Zahl mit dem absoluten Betrage 1, welche wir den *Einheitsfaktor* von a nennen und mit $\mathfrak{e}_a$ bezeichnen wollen.[2]) Jede komplexe Zahl läßt sich also stets in die Form setzen:

$$(4) \qquad a = |a| \cdot \mathfrak{e}_a,$$

wo $|a|$ eine *wesentlich positive*, $\mathfrak{e}_a$ eine komplexe Zahl *mit dem absoluten Betrage* 1 ist. Es ist leicht ersichtlich, daß eine derartige Zerlegung stets nur auf eine einzige Weise möglich ist. Denn, hätte man gleichzeitig:

$$a = \varrho\,(\gamma + \delta i), \text{ wo } \varrho > 0, \; |\gamma + \delta i| = 1$$

und:

$$a = \varrho'(\gamma' + \delta' i), \text{ wo } \varrho' > 0, \; |\gamma' + \delta' i| = 1,$$

so würde daraus zunächst folgen:

$$\varrho\gamma + \varrho\delta i = \varrho'\gamma' + \varrho'\delta' i,$$

also:

$$\varrho\gamma = \varrho'\gamma', \quad \varrho\delta = \varrho'\delta'$$

1) Man bezeichnet α, β mit Rücksicht auf geometrische Beziehungen häufig auch als die *Koordinaten* von a.

2) Die Zahl $\mathfrak{e}_a$ wird mit Rücksicht auf die zuvor bereits erwähnten geometrischen Beziehungen auch als *Richtungskoeffizient* von a bezeichnet. Ich habe mich in früheren Arbeiten der Bezeichnung *Charakteristik* von a bedient, doch scheint mir die im Text gebrauchte Bezeichnung wesentlich prägnanter, überdies schon wegen mehrfacher anderweitiger Verwendung des Ausdrucks *Charakteristik* auch zweckmäßiger.

und wenn man diese beiden Gleichungen ins Quadrat erhebt und addiert — mit Berücksichtigung von $\gamma^2 + \delta^2 = \gamma'^2 + \delta'^2 = 1$:

$$\varrho^2 = \varrho'^2, \quad \text{also: } \varrho = \varrho'$$

und daher schließlich auch:

$$\gamma + \delta i = \gamma' + \delta' i.$$

2. Wir entwickeln zunächst einige einfache, häufig anzuwendende Sätze, die sich auf den absoluten Betrag der Summe und Differenz, des Produktes und Quotienten zweier komplexer Zahlen beziehen.

Satz I.

Der Absolutwert der Summe oder Differenz zweier komplexer Zahlen ist im allgemeinen kleiner als die Summe der Absolutwerte, nur in einem besonderen Falle gleich dieser Summe. Man hat also im allgemeinen:

$$|a \pm a'| < |a| + |a'| \tag{5a}$$

und, bei $|a| > 0$, $|a'| > 0$[1]*), nur dann:*

$$\begin{cases} |a + a'| = |a| + |a'|, & \text{wenn: } a' = \lambda a \\ |a - a'| = |a| + |a'|, & \text{wenn: } a' = -\lambda a \end{cases} \text{wo: } \lambda \textit{ reell} \text{ und } > 0.\text{[2])} \tag{5b}$$

Beweis Ist:

$$a = \alpha + \beta i, \quad a' = \alpha' + \beta' i, \quad \text{also: } a + a' = (\alpha + \alpha') + (\beta + \beta') i, \tag{6}$$

so folgt zunächst:

$$\begin{aligned} |a + a'|^2 &= (\alpha + \alpha')^2 + (\beta + \beta')^2 \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + 2(\alpha\alpha' + \beta\beta'). \end{aligned}$$

Andererseits hat man:

$$\begin{aligned} (|a| + |a'|)^2 &= (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2})^2 \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + 2\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2)} \end{aligned}$$

und daher:

$$\begin{aligned} |a + a'|^2 - (|a| + |a'|)^2 &= 2(\alpha\alpha' + \beta\beta' - \sqrt{\alpha^2\alpha'^2 + \beta^2\beta'^2 + \alpha^2\beta'^2 + \alpha'^2\beta^2}) \\ &= 2(\alpha\alpha' + \beta\beta' - \sqrt{(\alpha\alpha' + \beta\beta')^2 + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2}). \end{aligned} \tag{7}$$

Daraus folgt, wegen $(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2 \geqq 0$, daß durchweg:

$$|a + a'|^2 - (|a| + |a'|)^2 < 0, \tag{8a}$$

außer wenn:

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0 \quad \text{und zugleich: } \alpha\alpha' + \beta\beta' > 0, \tag{9}$$

---

1) Ist: $a = 0$ bzw. $a' = 0$ oder auch: $a = a' = 0$, so reduzieren sich die Gleichungen (5b) auf bloße Identitäten.

2) Ist $a' = \lambda a$ bzw. $a' = -\lambda a$ (wo $\lambda > 0$), so haben a und a' offenbar *gleichen* bzw. *entgegengesetzten Einheitsfaktor* — vice versa.

(da ja die Quadratwurzel *positiv*, d. h. $\sqrt{(\alpha\alpha' + \beta\beta')^2} = |\alpha\alpha' + \beta\beta'|$ zu nehmen ist), in welchem Falle dann:

$$(8\text{b}) \qquad |a + a'|^2 - (|a| + |a'|)^2 = 0$$

wird.

Mit Berücksichtigung von (8a), (8b) und (9) findet man somit, daß in der Tat im allgemeinen:

$$|a + a'| < |a| + |a'|$$

und nur in dem *einen* Falle:

$$|a + a'| = |a| + |a'|, \text{ wenn: } \alpha\beta' - \alpha'\beta = 0,\ \alpha\alpha' + \beta\beta' > 0$$

Nimmt man zunächst an, daß α und β *von Null verschieden* sind, so ist die erste dieser Nebenbedingungen gleichbedeutend mit der folgenden:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \lambda, \text{ also: } \alpha' = \lambda\alpha,\ \beta' = \lambda\beta,$$

wo λ eine im übrigen beliebige reelle Zahl bedeutet, die auf Grund der zweiten Nebenbedingung nur der Beschränkung unterliegt:

$$\lambda\alpha^2 + \lambda\beta^2 > 0, \text{ d. h. } \lambda > 0.$$

Man findet also, wie behauptet, in diesem Falle:

$$\alpha' + \beta' i = \lambda(\alpha + \beta i), \text{ wo } \lambda > 0.$$

Ist $\alpha = 0$, so folgt aus der zweiten Bedingung:

$$\beta\beta' > 0, \text{ also: } \beta' = \lambda\beta, \text{ wo wieder } \lambda > 0,$$

und sodann aus der ersten Bedingung: $\alpha' = 0$. Man hat also in diesem Falle:

$$a = \beta i, \quad a' = \lambda \cdot \beta i = \lambda a \quad (\lambda > 0).$$

Ist endlich $\beta = 0$, so hat man analog:

$$\alpha\alpha' > 0, \text{ also: } \alpha' = \lambda\alpha, \text{ wo } \lambda > 0,$$

ferner $\beta' = 0$ und schließlich:

$$a = \alpha, \quad a' = \lambda \cdot \alpha = \lambda a \quad (\lambda > 0).$$

Da ferner:

$$|a - a'| = |a + (-a')|, \quad |-a'| = |a'|,$$

so folgt aus dem bisherigen Ergebnis, daß auch:

$$|a - a'| \leqq |a| + |a'|$$

und daß hierbei das *Gleichheits*zeichen nur gilt, wenn:

$$-a' = \lambda a, \text{ also: } a' = -\lambda a \text{ (wo } \lambda > 0).$$[1]

1) Da die beiden Beziehungen:

$$|a \pm a'| = |a| + |a'|$$

in eine Identität übergehen, wenn $a' = 0$, so kann man sagen, daß sie auch gelten, wenn:

$$a' = \lambda a \quad \text{und:} \quad \lambda = 0.$$

Zusatz Durch wiederholte Anwendung des eben bewiesenen Satzes findet man:

$$(10) \qquad |a_0 + a_1 + \cdots + a_n| \leqq |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$$

Dabei gilt das *Gleichheits*zeichen nur dann, wenn *durchweg*:

$$(11) \qquad a_\nu = \lambda_\nu a_0, \text{ wo } \lambda_\nu > 0 \quad (\nu = 1, 2, \cdots n).$$

Der Beweis wird am einfachsten durch vollständige Induktion geführt. Aus Satz I folgt ja unmittelbar, daß:

$$|a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n| \leqq |a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}| + |a_n|,$$

und es gilt daher die Beziehung (10), falls die entsprechende Beziehung für $|a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}|$ besteht, was ja in der Tat für $n = 2$ erwiesen ist.

Was den besonderen Fall der *Gleichheit* betrifft, so erkennt man unmittelbar, daß die Bedingung (11) eine dafür *hinreichende* ist. Denn aus derselben folgt:

$$\begin{aligned} |a_0 + a_1 + \cdots + a_n| &= |(1 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n) a_0| \\ &= (1 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n) \cdot |a_0|^{1)} \\ &= |a_0| + |\lambda_1 a_0| + \cdots + |\lambda_n a_0| \\ &= |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|. \end{aligned}$$

Daß jene Bedingung auch *notwendig* ist, ergibt sich folgendermaßen. Angenommen, sie sei für irgendein a_ν, als welches man wegen des kommutativen Verhaltens der Addition ohne Beschränkung der Allgemeinheit a_1 wählen kann, *nicht* erfüllt, so hat man:

$$|a_0 + a_1| < |a_0| + |a_1| \text{ (mit Ausschluß der Gleichheit).}$$

Andererseits:

$$|a_2 + \cdots + a_n| \leqq |a_2| + \cdots + |a_n|$$

und daher:

$$\begin{aligned} |a_0 + a_1 + \cdots + a_n| &\leqq |a_0 + a_1| + |a_2 + \cdots + a_n| \\ &< |a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|. \end{aligned}$$

3. Der vorige Satz gab eine *obere* Schranke für $|a \pm a'|$. Zur Gewinnung einer *unteren* Schranke hat man auf Grund des Satzes I:

$$(12) \qquad |a| = |(a + a') - a'| \leqq |a + a'| + |a'|,$$

---

1) Die Richtigkeit der hierbei benützten Beziehung:

$$|\lambda a| = \lambda \cdot |a|, \text{ wenn } \lambda > 0,$$

welche einen speziellen Fall des weiter unten bewiesenen Satzes IV. bildet, folgt unmittelbar aus der Definition des absoluten Betrages, wegen

$$\sqrt{(\lambda\alpha)^2 + (\lambda\beta)^2} = \lambda \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

wobei nach (5b) das *Gleichheits*zeichen nur gilt, wenn:

$$a' = -\lambda'(a + a') \text{ für } \lambda' > 0,$$

d. h.

(13) $$a' = -\frac{\lambda'}{1+\lambda'}a = -\lambda a \text{ für } 0 < \lambda < 1,$$

übrigens auch noch für $\lambda = 1$, d. h. für $a + a' = 0$[1]), da in diesem Falle die Beziehung (12) in $|a| = |a'|$ übergeht. Macht man die in dem eben betrachteten Falle der Gleichheit offenbar bestehende Bedingung $|a'| \leqq |a|$ auch in dem allgemeinen Falle zur Voraussetzung, so ergibt sich aus (12):

(14a) $$|a + a'| \geqq |a| - |a'|$$

(wobei das *Gleichheits*zeichen nur gilt, wenn $a' = -\lambda a$ und $0 < \lambda \leqq 1$), also eine nicht-negative untere Schranke für $|a + a'|$.

Ersetzt man hier wieder a' durch $-a'$, so wird auch

(14b) $$|a - a'| \geqq |a| - |a'|$$

mit der Bedingung: $a' = \lambda a$ (wo $0 < \lambda \leqq 1$) für den Fall der *Gleichheit.*

Vertauscht man in (14a), (14b) a und a', wobei dann $|a'| \geqq |a|$ angenommen werden muß, so kann die Bedingung für den Fall der *Gleichheit*, die zunächst lauten würde: $a = \mp \lambda' a'$ (wo $0 < \lambda' \leqq 1$), in die folgende umgeformt werden: $a' = \mp \lambda a$ (wo $\lambda \geqq 1$).

Da überdies unter der Voraussetzung $|a'| \geqq |a|$ statt $|a'| - |a|$ auch $\big||a| - |a'|\big|$ geschrieben werden kann und dieser Absolutwert in dem zuvor betrachteten Falle $|a| \geqq |a'|$ mit $|a| - |a'|$ zusammenfällt, so kann man dem vorstehenden Gesamtergebnis die folgende Fassung geben:

Satz II.

Der absolute Betrag der Summe oder Differenz zweier komplexer Zahlen ist im allgemeinen größer als der Absolutwert der Differenz der absoluten Beträge und nur in einem besonderen Falle gleich diesem letzteren. Man hat also im allgemeinen:

(15a) $$|a \pm a'| \geqq \big||a| - |a'|\big|$$

und bei $|a| > 0$, $|a'| > 0$ *nur dann:*[2])

(15b) $$\left.\begin{cases} |a + a'| = \big||a| - |a'|\big|, \text{ wenn } a' = -\lambda a \\ |a - a'| = \big||a| - |a'|\big|, \text{ wenn } a' = \lambda a \end{cases}\right\} \text{wo } \lambda \text{ reell und } > 0.$$

---

1) Dieser Fall $a + a' = 0$ entspricht dem in Satz I. durch die Voraussetzung ausgeschlossenen Falle $a = 0$.

2) Bei $a = 0$ bzw. $a' = 0$ treten an die Stelle der Gleichungen (15b) wieder bloße Identitäten.

Schließlich lassen sich dann die Sätze I. und II. zu dem folgenden, alle Möglichkeiten berücksichtigenden Satze zusammenfassen:

Satz III.

Ist $\varepsilon = +1$ *oder* $= -1$, *so hat man stets.*

$$||a|-|a'|| \leqq |a+\varepsilon a'| \leqq |a|+|a'|, \tag{16}$$

und zwar gilt bei $|a|>0$, $|a'|>0$ *das Gleichheitszeichen rechts nur im Falle* $a'=\varepsilon\lambda a$, *links im Falle* $a'=-\varepsilon\lambda a$, *wo* λ *reell und* >0. *Ist mindestens eine der Zahlen* a, a' *gleich Null, so gelten beide Gleichheitszeichen, indem sich die obige Doppelbeziehung auf eine bloße Identität reduziert.*

4. Satz IV.

Der absolute Betrag eines Produktes bzw. Quotienten zweier komplexer Zahlen ist gleich dem Produkte bzw. Quotienten der absoluten Beträge.

Beweis Ist wieder:

$$a = \alpha + \beta i, \quad a' = \alpha' + \beta' i$$

also:

$$aa' = (\alpha\alpha' - \beta\beta') + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)\, i,$$

so folgt:

$$\begin{aligned} |aa'|^2 &= (\alpha\alpha' - \beta\beta')^2 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)^2 \\ &= (\alpha\alpha')^2 + (\beta\beta')^2 + (\alpha\beta')^2 + (\alpha'\beta)^2 \\ &= (\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2) \\ &= |a|^2 \cdot |a'|^2, \end{aligned}$$

also, wie behauptet:

$$|aa'| = |a| \cdot |a'|.\text{[1]} \tag{17}$$

---

1) Mit Benützung dieser Beziehung läßt sich der Beweis von Satz I. merklich kürzer, als zuvor, in folgender Weise führen. Man hat danach, wenn man von dem unmittelbar zu erledigenden Falle $a = 0$ absieht, zunächst:

$$|a+a'| = \left|a\left(1+\frac{a'}{a}\right)\right| = |a| \cdot \left|1+\frac{a'}{a}\right|.$$

Setzt man.

$$\frac{a'}{a} = \lambda + \mu i,$$

so wird:

$$\left|1+\frac{a'}{a}\right|^2 = (1+\lambda)^2 + \mu^2 = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda.$$

Andererseits hat man:

$$\left(1+\left|\frac{a'}{a}\right|\right)^2 = \left(1+\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\right)^2 = 1+\lambda^2+\mu^2+2\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$$

und daher:

$$\left|1+\frac{a'}{a}\right|^2 - \left(1+\left|\frac{a'}{a}\right|\right)^2 = 2\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2+\mu^2}\right) < 0,$$

Wendet man dieses Resultat auf die Beziehung:

$$a = a' \cdot \frac{a}{a'},$$

an, so ergibt sich:

$$|a| = |a'| \cdot \left|\frac{a}{a'}\right|$$

also, wie behauptet:

$$(18) \qquad \left|\frac{a}{a'}\right| = \frac{|a|}{|a'|} \quad \left(\text{speziell: } \left|\frac{1}{a'}\right| = \frac{1}{|a'|}\right).$$

Zusatz I. Durch wiederholte Anwendung des Produktsatzes ergibt sich, daß allgemein:

$$(19) \qquad |a_1 a_2 \cdots a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdots |a_n|$$

und daher insbesondere, wenn man jeden der n-Faktoren durch a ersetzt:

$$(20\text{a}) \qquad |a^n| = |a|^n.$$

Da sodann:

$$|a^{-n}| = \left|\frac{1}{a^n}\right| = \frac{1}{|a^n|} = \frac{1}{|a|^n},$$

so folgt schließlich, daß auch:

$$(20\text{b}) \qquad |a^{-n}| = |a|^{-n},$$

in Worten: *Der absolute Betrag einer Potenz mit ganzzahligen Exponenten ist gleich der entsprechenden Potenz des absoluten Betrages.*

Zusatz II. Setzt man a und a' in die Form:

$$a = |a| \cdot e_a, \quad a' = |a'| \cdot e_{a'},$$

---

außer wenn: $\mu = 0$ und zugleich $\lambda \geqq 0$, in welchem Falle

$$\left|1 + \frac{a'}{a}\right|^2 - \left(1 + \left|\frac{a'}{a}\right|\right)^2 = 0$$

wird. Somit ist

$$\left|1 + \frac{a'}{a}\right| \leqq 1 + \left|\frac{a'}{a}\right|,$$

wo das Gleichheitszeichen nur im Falle $a' = \lambda a$, $\lambda \geqq 0$ gilt, und durch Einsetzen dieser Beziehung in die erste Gleichung findet man:

$$|a + a'| \leqq |a| \left(1 + \left|\frac{a'}{a}\right|\right),$$

also mit Benützung von (17):

$$|a + a'| \leqq |a| + |a'|,$$

wo wiederum das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn:

$$a' = \lambda a \text{ und } \lambda \geqq 0.$$

so folgt mit Benützung des Satzes IV:

$$aa' = |aa'| \cdot (\mathfrak{e}_a \mathfrak{e}_{a'}), \quad \frac{a}{a'} = \left|\frac{a}{a'}\right| \cdot \frac{\mathfrak{e}_a}{\mathfrak{e}_{a'}}$$

und daher wegen der Eindeutigkeit jeder Zerlegung in absoluten Betrag und Einheitsfaktor (S. 552):

(21) $$\mathfrak{e}_{aa'} = \mathfrak{e}_a \mathfrak{e}_{a'}, \quad \mathfrak{e}_{\frac{a}{a'}} = \frac{\mathfrak{e}_a}{\mathfrak{e}_{a'}},$$

d. h. *der Einheitsfaktor eines Produktes bzw Quotienten zweier komplexer Zahlen ist gleich dem Produkte bzw. Quotienten der betreffenden Einheitsfaktoren*

§ 73. Komplexe Zahlenfolgen und Grenzwerte. — Die Beziehung $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu = \infty$. — Häufungszahlen. — Komplexe Doppelfolgen.

1. Eine unendliche Folge komplexer Zahlen $a_0, a_1, \cdots a_\nu, \cdots$, kürzer geschrieben (a_ν), soll *konvergent* heißen, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n existiert, derart daß:

(I) $$|a_{n+\varrho} - a_n| \leqq \varepsilon \text{ für } \varrho = 1, 2, 3, \cdots.$$

Diese Definition stimmt wörtlich mit der entsprechenden für reelle rationale Zahlen (§ 22, (I), S. 125) überein. Es bedarf daher wohl kaum der Bemerkung, daß sie, analog wie jene, nach Bedarf auch durch jede der folgenden ersetzt werden kann:

(II) $$|a_{n+\varrho} - a_n| < \varepsilon \text{ für } \varrho = 1, 2, 3, \cdots$$

(III) $$|a_{\nu+\varrho} - a_\nu| < \varepsilon \text{ für } \nu \geqq n, \varrho = 1, 2, 3, \cdots.$$

Auch ergibt sich aus der Übereinstimmung dieser Definitionen mit den entsprechenden für *reelle* Folgen, daß auch die dort (§ 22, § 27) bewiesenen Sätze über die *Konvergenz* jeder *Teilfolge*, sowie jeder durch rationale Operationen aus mehreren konvergenten Folgen *zusammengesetzten* Folge erhalten bleiben.

Im übrigen ist die Konvergenz der Folge (a_ν), wenn gesetzt wird:

(1) $$a_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu i,$$

auch *vollständig äquivalent* mit der Konvergenz der beiden *reellen* Folgen (α_ν) und (β_ν). Aus

$$|a_{\nu+\varrho} - a_\nu| = |(\alpha_{\nu+\varrho} - \alpha_\nu) + (\beta_{\nu+\varrho} - \beta_\nu) i|$$

folgt nämlich:

(2) $$\left.\begin{matrix} |\alpha_{\nu+\varrho} - \alpha_\nu| \leqq \\ |\beta_{\nu+\varrho} - \beta_\nu| \leqq \end{matrix}\right\} |a_{\nu+\varrho} - a_\nu| \leqq |\alpha_{\nu+\varrho} - \alpha_\nu| + |\beta_{\nu+\varrho} - \beta_\nu|,$$

sodaß gleichzeitig mit der Beziehung (I) stets auch die beiden folgenden bestehen:

(3) $$|\alpha_{n+\varrho} - \alpha_n| \leqq \varepsilon, \quad |\beta_{n+\varrho} - \beta_n| \leqq \varepsilon,$$

welche aussagen, daß die beiden Folgen (α_ν), (β_ν) *konvergieren.*

Umgekehrt würde sich aus den beiden Ungleichungen (3) die Beziehung ergeben[1]):

$$(4) \qquad |a_{n+\varrho} - a_n| \leqq 2\varepsilon,$$

welche ja wiederum die Konvergenz der Folge (a_ν) nach sich zieht.

Hiernach gilt der Satz:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Folge $(\alpha_\nu + \beta_\nu i)$ besteht in der Konvergenz der beiden Folgen (α_ν) und (β_ν)

Da $\big||a_{n+\varrho}| - |a_n|\big| \leqq |a_{n+\varrho} - a_n|$, so folgt, daß gleichzeitig mit der Folge (a_ν) die aus den absoluten Beträgen gebildete Folge $(|a_\nu|)$ *konvergiert*. Die *Konvergenz* dieser letzteren Folge bildet also eine *notwendige* (aber offenbar *nicht hinreichende*) Bedingung für diejenige von (a_ν).

2. Wir sagen wiederum analog wie bei *reellen* Folgen (§ 26, Nr. 1, S. 160), die Folge (a_ν) besitze für $\nu \longrightarrow \infty$ den *Grenzwert* a, in Zeichen:

$$(5) \qquad \lim_{\nu \to \infty} a_\nu = a,$$

wenn eine Zahl a von folgender Beschaffenheit existiert: Zu jedem $\varepsilon > 0$ soll eine natürliche Zahl n vorhanden sein, derart daß

$$(6) \qquad |a - a_\nu| \leqq \varepsilon \text{ für } \nu \geqq n$$

Auch hier ergibt sich wiederum ohne weiteres aus der Übereinstimmung der Definitionen die Gültigkeit der für *reelle* Folgen bewiesenen Grenzwertbeziehungen (§ 28, Nr. 3, S. 169/70, Gl. (12) — (15)).

Setzt man $a = \alpha + \beta i$, so folgen aus dieser Bedingung durch die nämliche Schlußweise, welche zur Herstellung der Ungleichungen (3) aus der Voraussetzung (I) diente, die beiden Beziehungen:

$$(7) \qquad |\alpha - \alpha_\nu| \leqq \varepsilon, \ |\beta - \beta_\nu| \leqq \varepsilon \quad (\text{für } \nu \geqq n),$$

welche offenbar mit den folgenden beiden äquivalent sind:

$$(8) \qquad \lim_{\nu \to \infty} \alpha_\nu = \alpha, \quad \lim_{\nu \to \infty} \beta_\nu = \beta.$$

---

1) Obschon prinzipiell belanglos, sei der Vollständigkeit halber erwähnt, daß man aus den Voraussetzungen (3) sogar schließen kann, daß:

$$|a_{n+\varrho} - a_n| \leqq \sqrt{2} \cdot \varepsilon.$$

Aus (3) folgt nämlich:

$$(\alpha_{n+\varrho} - \alpha_n)^2 \leqq \varepsilon^2$$
$$(\beta_{n+\varrho} - \beta_n)^2 \leqq \varepsilon^2$$

und hieraus durch Addition:

$$|a_{n+\varrho} - a_n|^2 \leqq 2\varepsilon^2.$$

Umgekehrt folgt aber aus (8) bzw. (7) — wieder durch die in Nr. 1 angewendete Schlußweite — die Beziehung:

$$(9) \qquad |a - a_\nu| < 2\varepsilon \text{ für } \nu \geqq n,$$

also schließlich·

$$(10) \qquad \lim_{\nu \to \infty} a_\nu = a = \alpha + \beta i.$$

Da die *Konvergenz* der Folgen (α_ν), (β_ν) die *notwendige* und *hinreichende* Bedingung für die *Existenz der Grenzwerte* $\lim\limits_{\nu \to \infty} \alpha_\nu$, $\lim\limits_{\nu \to \infty} \beta_\nu$ bildet (§ 28, Nr 1, S 167/8), andererseits aber mit der *Konvergenz* der Folge (a_ν) vollständig äquivalent ist, so lassen sich die vorstehenden Ergebnisse folgendermaßen zusammenfassen:

> *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines bestimmten Grenzwertes $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu$, wo $a_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu i$, besteht in der Konvergenz der Folge (a_ν) bzw. in der damit äquivalenten Konvergenz der Folgen (α_ν), (β_ν). Zugleich hat man:*

$$(11) \qquad \lim_{\nu \to \infty} (\alpha_\nu + \beta_\nu i) = \lim_{\nu \to \infty} \alpha_\nu + i \cdot \lim_{\nu \to \infty} \beta_\nu.$$

Wegen $\big||a| - |a_\nu|\big| \leqq |a - a_\nu|$ ergibt sich, daß im Falle $a = \lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu$ auch $|a| = \lim\limits_{\nu \to \infty} |a_\nu|$ wird, d. h. es besteht allemal die Beziehung:

$$(12) \qquad \left|\lim_{\nu \to \infty} a_\nu\right| = \lim_{\nu \to \infty} |a_\nu|,$$

wenn der *links* stehende Grenzwert im engeren Sinne existiert. Die Existenz des *rechts* stehenden ist also hierzu *notwendig*, aber offenbar im allgemeinen *nicht hinreichend*. Setzt man nämlich (s. § 72, Gl. 4, S. 552):

$$a_\nu = |a_\nu| \cdot \mathfrak{e}_{a_\nu},$$

so erkennt man, daß, abgesehen von dem Falle $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu = 0$, für die Existenz von $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu$ außer derjenigen von $\lim\limits_{\nu \to \infty} |a_\nu|$ auch noch die Existenz von $\lim\limits_{\nu \to \infty} \mathfrak{e}_{a_\nu}$ erforderlich ist.

3. Jede *nicht-konvergente* Folge komplexer Zahlen (a_ν) bezeichnen wir wieder als *divergent*. Dabei wollen wir zunächst den Fall ins Auge fassen, daß die Folge der absoluten Beträge *eigentlich* divergiere (s. § 26 am Ende, S. 164), daß also:

$$(13) \qquad \lim_{\nu \to \infty} |a_\nu| = +\infty.$$

Man sagt in diesem Falle, die *komplexe* Folge (a_ν) *divergiere nach Unendlich* und drückt dies durch die Schreibweise aus:

$$\lim_{\nu \to \infty} a_\nu = \infty. \tag{14}$$

Man bemerke, daß dieses Zeichen ∞ (*ohne* Vorzeichen) eine wesentlich andere Bedeutung hat wie bisher, wo wir es lediglich als Abkürzung für $+\infty$ gebrauchten[1]), geradeso, wie wir ja bei positiven *Zahlen* das Vorzeichen $+$ wegzulassen (bzw. als *selbstverständlich* zu ergänzen) pflegen, falls es sich nicht um die direkte Hervorhebung des Gegensatzes gegen *negative Zahlen* handelt. Und wir konnten dies ohne Bedenken tun, da ja andere Begriffe als die mit $+\infty$ und $-\infty$ bezeichneten bisher überhaupt nicht definiert waren und sicher kein Leser jemals auf den Gedanken gekommen sein dürfte, ein solches ∞ *ohne* Vorzeichen als Abkürzung für $-\infty$ aufzufassen. Dagegen gewinnt ja durch Einführung der Schreibweise (14) für die durch Gl (13) präziser bezeichnete Aussage das Zeichen ∞ eine *neue*, wesentlich *weitere*, man könnte sagen *weniger bestimmte* Bedeutung, und wir hätten vollständiger Korrektheit zuliebe in Gl. (14) schon ausdrücklich $\nu \to +\infty$ statt $\nu \to \infty$ schreiben müssen. Wenn wir hiervon abgesehen haben und auch in Zukunft davon absehen wollen, so geschieht dies, weil in dem vorliegenden Zusammenhange ν unverkennbar als Zeichen für *positive* ganze Zahlen auftritt und daher die Bezeichnung $\nu \to \infty$ überhaupt gar nichts anderes bedeuten *kann* wie $\nu \to +\infty$ (anders ausgesprochen, da ja hier ν und $|\nu|$ zusammenfallen und daher die Schreibweise $\lim \nu = \infty$, d. h. nach (13), (14) soviel als: $\lim |\nu| = +\infty$, schon dasselbe besagt wie $\lim \nu = +\infty$).

Obschon der Inhalt der Beziehung (14) durch Gl. (13) vollständig gegeben ist, so mögen zu genauerer Orientierung noch die folgenden Bemerkungen dienen. Reduzieren sich die a_ν auf *reelle* Zahlen, so *kann* natürlich Gl. (14) die spezielle Bedeutung von

$$\lim_{\nu \to \infty} a_\nu = +\infty \quad \text{oder:} \quad \lim_{\nu \to \infty} a_\nu = -\infty$$

besitzen, während im allgemeinen ihr Inhalt denjenigen der folgenden *drei* Beziehungen umfassen kann:

---

1) Vgl. § 26, Nr. 4, Gl. (18), S. 164.

(15) $\lim\limits_{\nu\to\infty} |a_\nu| = +\infty, \quad \underline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, a_\nu = -\infty, \quad \overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, a_\nu = +\infty$[1])

(z. B. $a_\nu = (-1)^\nu \cdot \nu$) Sind die a_ν wesentlich *komplex*, so erstreckt sich die Unbestimmtheit des Unendlichwerdens, die ja bei *reellen* a_ν auf das *Vorzeichen* (den Faktor $+1$ oder -1) beschränkt ist, auf den (komplexen) *Einheitsfaktor*, über dessen Verhalten bei unbegrenzt wachsendem ν die Definitionsgleichung (13) keinerlei Vorschriften enthält. Auch sei bemerkt, daß die Beziehung (14), wenn gesetzt wird $a_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu i$, noch nicht einmal das Bestehen *einer* der beiden Beziehungen:

$$\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = \infty, \quad \lim_{\nu\to\infty} \beta_\nu = \infty$$

im Sinne von Gl. (14) erfordert. Setzt man z. B.:

$$a_\nu = 1 + i + \nu \cdot i^\nu,$$

also:

$$\begin{aligned} \alpha_{2\mu} &= 1 + (-1)^\mu \cdot 2\mu, & \beta_{2\mu} &= 1 \\ \alpha_{2\mu+1} &= 1, & \beta_{2\mu+1} &= 1 + (-1)^\mu \cdot (2\mu + 1), \end{aligned}$$

so folgt zwar:

$$\underline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \alpha_\nu = -\infty, \quad \underline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \beta_\nu = -\infty$$
$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \alpha_\nu = +\infty, \quad \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \beta_\nu = +\infty,$$

nichtsdestoweniger ist *weder* (im Sinne von Gl. (14)) $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = \infty$, *noch* $\lim\limits_{\nu\to\infty} \beta_\nu = \infty$, da jede der Folgen (α_ν), (β_ν) unendlich oft die Zahl 1 enthält Dagegen hat man.

$$\begin{aligned} \alpha_{2\mu}^2 + \beta_{2\mu}^2 &= 2 + 2\mu\left(2\mu + 2 \cdot (-1)^\mu\right) \\ \alpha_{2\mu+1}^2 + \beta_{2\mu+1}^2 &= 2 + (2\mu + 1)\left(2\mu + 1 + 2 \cdot (-1)^\mu\right) \end{aligned}$$

und daher:

$$\lim_{\nu\to\infty} |a_\nu| = +\infty, \quad \text{also:} \quad \lim_{\nu\to\infty} a_\nu = \infty.$$

Es muß auffallen, daß die der Beziehung (14) zugrunde liegende Schreibweise in direktem *Widerspruch* mit gewissen bisherigen Fest-

---

1) Man bemerke, daß die Bedingung $\lim\limits_{\nu\to\infty} |a_\nu| = +\infty$ unter der Voraussetzung (14) *stets* erfüllt und ihre ausdrückliche Erwähnung in dem obigen Zusammenhange keineswegs überflüssig ist. Denn hätte man *nur*.

$$\underline{\lim_{\nu\to\infty}}\, a_\nu = -\infty, \quad \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, a_\nu = +\infty,$$

so könnten die a_ν noch beliebig viele *endliche* Limites (Häufungszahlen) besitzen. Andererseits muß unter der Voraussetzung (14) stets mindestens *eine* der beiden letzten Beziehungen bestehen.

setzungen steht. Insbesondere haben wir früher bei der Betrachtung *reeller* Zahlenfolgen unter die Bezeichnung *„Existenz eines Grenzwertes im weiteren Sinne“* (§ 26, Nr. 4 am Ende, S. 165) ausschließlich die Fälle des Unendlichwerdens *mit bestimmtem Vorzeichen*[1]) aufgenommen, nicht aber diejenigen, welche nur durch die Bedingungen (15) charakterisiert sind.

Die Veranlassung zu dieser einigermaßen befremdlichen Inkonsequenz liegt in gewissen Zweckmäßigkeitsgründen, deren Tragweite zumeist erst in der *Funktionenlehre* zum Ausdruck kommt. Zu vorläufiger Erläuterung sei indessen folgendes bemerkt. Ist (c_ν) eine komplexe Folge mit einem von *Null* verschiedenen Grenzwerte, etwa:

$$\lim_{\nu\to\infty} c_\nu = c,$$

so konvergiert auch die Folge $\left(\frac{1}{c_\nu}\right)$, und zwar hat man:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{c_\nu} = \frac{1}{c}$$

und umgekehrt.

Diese vollkommene Reziprozität zwischen den Folgen (c_ν), $\left(\frac{1}{c_\nu}\right)$ einerseits und den zugehörigen Grenzwerten c, $\frac{1}{c}$ andererseits erleidet eine Ausnahme, wenn:

$$\lim_{\nu\to\infty} c_\nu = 0. \tag{16}$$

Um diese Lücke auszufüllen (was sich zur kürzeren und übersichtlicheren Formulierung gewisser Ergebnisse der Funktionenlehre als zweckmäßig erweist), ordnet man der Folge $\left(\frac{1}{c_\nu}\right)$ eine neue *„uneigentliche“ Zahl* als Grenzwert zu, die wir etwa für den Augenblick mit ω bezeichnen wollen, also:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{c_\nu} = \omega. \tag{17}$$

Da sodann (s. Gl. (12)):

$$\lim_{\nu\to\infty} |c_\nu| = |\lim_{\nu\to\infty} c_\nu| = 0$$

und daher:

$$\lim_{\nu\to\infty} \left|\frac{1}{c_\nu}\right| = +\infty,$$

so hat man nach Gl. (13), (14) andererseits:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{c_\nu} = \infty \text{ (ohne Vorzeichen)}, \tag{18}$$

---

1) Die *entsprechende* Forderung für *komplexe* (a_ν) würde also in der Existenz von $\lim\limits_{\nu\to\infty} e^{a_\nu}$ bestehen.

sodaß also dieses Zeichen ∞ die Rolle der oben vorläufig mit ω bezeichneten *„uneigentlichen“ Zahl* spielt, welche in diesem Zusammenhange (anknüpfend an geometrische Vorstellungen) auch schlechthin als die *„Stelle Unendlich“* bezeichnet zu werden pflegt.

Schließlich mag dann noch die Einbeziehung der durch Gl (14) bzw (18) dargestellten Eventualität in den Begriff der Grenzwert*existenz* erforderlichenfalls durch den Ausdruck *„Existenz eines Grenzwertes im weitesten Sinne“* charakterisiert werden.

Auch erscheint es gelegentlich zweckmäßig, die Bezeichnung *„eigentlich divergent“* auf solche komplexe Zahlenfolgen auszudehnen, bei denen *mindestens* die Folge der *reellen oder* diejenige der von dem Faktor i befreiten *imaginären* Bestandteile *eigentlich* divergiert.

4. Der Begriff des *Grenzwerts* ist auch bei *komplexen* Folgen einer analogen Verallgemeinerung fähig, wie bei *reellen*. Doch wollen wir, da wir ja von der in § 69, Nr. 1, S. 525, erwiesenen Möglichkeit, die komplexen Zahlen als *einfache* Mannigfaltigkeit zu *ordnen*, wie a. a. O. schon bemerkt, keinen weiteren Gebrauch zu machen gedenken, davon absehen, die Begriffe des *unteren* und *oberen Limes* auf komplexe Zahlenfolgen zu übertragen und beschränken uns in dieser Hinsicht auf den Begriff der *Häufungszahl*. Wir wollen also zeigen, daß jeder beliebigen komplexen Folge (a_ν), von der zunächst nur angenommen werden soll, daß die $|a_\nu|$ unter einer endlichen Schranke bleiben, *mindestens eine Häufungszahl* zukommt, d. h. es gibt mindestens eine bestimmte Zahl a von der Beschaffenheit, daß für unendlich viele Glieder a_{n_ν} der Folge der absolute Betrag $|a - a_{n_\nu}|$ *beliebig klein* wird. Bei dieser Fassung erscheint a auch dann als *Häufungszahl*, wenn *unendlich viele* Glieder oder sogar auch *alle* von einem bestimmten ab gleich a sind, da ja für alle diese geradezu $|a - a_{n_\nu}| = 0$ wird. Ist allgemein $a_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu i$, so besitzt die reelle Folge (α_ν) mindestens eine Häufungszahl α[1]), und es läßt sich daher aus der Folge (α_ν) eine Folge (α_{m_ν}) in der Weise herausheben, daß:

$$\lim_{\nu \to \infty} \alpha_{m_\nu} = \alpha. \tag{19}$$

Die unendliche Folge (β_{m_ν}) besitzt dann mindestens eine Häufungszahl β, und es besteht danach für eine aus der Folge (β_{m_ν}) passend herausgehobene Folge (β_{n_ν}) die Beziehung:

$$\lim_{\nu \to \infty} \beta_{n_\nu} = \beta, \tag{20}$$

1) Möglicherweise nur in dem zuvor betrachteten Sinne, daß durchweg $\alpha_\nu = \alpha$ (etwa für $\nu \geq m$), was im übrigen für die weitere Schlußweise ohne Belang ist.

während andererseits für die entsprechend aus der Folge (α_{m_ν}) herausgehobene Folge (α_{n_ν}) die Beziehung erhalten bleibt:

$$\lim_{\nu \to \infty} \alpha_{n_\nu} = \alpha \tag{21}$$

Hiernach ergibt sich:

$$\lim_{\nu \to \infty} (\alpha_{n_\nu} + \beta_{n_\nu} i) = \alpha + \beta i$$

oder, wenn $\alpha + \beta i = a$ gesetzt wird:

$$\lim_{\nu \to \infty} a_{n_\nu} = a, \tag{22}$$

sodaß in der Tat $|a - a_{n_\nu}|$ für alle hinlänglich großen ν beliebig klein wird, also a eine Häufungszahl der Folge (a_ν) ist.

Besitzt eine Folge (a_ν), deren $|a_\nu|$ unter einer endlichen Schranke bleiben, nur *eine einzige Häufungszahl* a, so ist sie offenbar *konvergent* und a ihr *Grenzwert*

Bleiben die $|a_\nu|$ *nicht* unter einer endlichen Schranke, so hat man zum mindesten:

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} |a_\nu| = +\infty, \tag{23}$$

und kann daher aus der Folge $(|a_\nu|)$ eine Folge $(|a_{m_\nu}|)$ so herausheben, daß:

$$\lim_{\nu \to \infty} |a_{m_\nu}| = +\infty,$$

also nach Gl. (14):

$$\lim_{\nu \to \infty} a_{m_\nu} = \infty. \tag{24}$$

In diesem Falle bezeichnet man die *„uneigentliche" Zahl* oder *Stelle* ∞ als *Häufungszahl* oder *-stelle* der Folge (a_ν), welche im übrigen noch beliebig viele *endliche* Häufungszahlen besitzen kann. Das letztere ist offenbar dann und *nur* dann *nicht* der Fall, wenn nicht nur die Beziehung (23), sondern die folgende besteht:

$$\underline{\lim_{\nu \to \infty}} |a_\nu| = +\infty, \tag{25}$$

also:

$$\lim_{\nu \to \infty} a_\nu = \infty. \tag{26}$$

5. Auch der Begriff der *Doppelfolge*, insbesondere der *konvergenten Doppelfolge* und des *Doppellimes* bzw. der *iterierten Limites* läßt sich nach dem Vorbilde des in Nr. 1 und 2 über einfache komplexe Zahlenfolgen und deren Grenzwerte Gesagten und im Anschluß an die entsprechenden Auseinandersetzungen über *reelle* Doppelfolgen (§ 40, S. 253 ff.) ohne Schwierigkeit auf *komplexe* Zahlen übertragen.

Versteht man unter $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ eine Doppelfolge komplexer Zahlen, so mag zunächst deren *Konvergenz* mit Benützung der Fassung (I), S. 255 (wenn man daselbst $\mu = n + \varrho$, $\nu = n + \sigma$ setzt), durch die Beziehung definiert werden:

$$\left| a_{(n+\varrho)}^{(n+\sigma)} - a_n^{(n)} \right| \leqq \varepsilon \text{ für: } \begin{cases} \varrho = 0, 1, 2, \cdots\cdots \\ \sigma = 0, 1, 2, \cdots\cdots. \end{cases} \tag{27}$$

Ist dabei:

$$a_\mu^{(\nu)} = \alpha_\mu^{(\nu)} + \beta_\mu^{(\nu)} i, \tag{28}$$

so ergibt sich mit Hilfe der in Nr. 1 dieses Paragraphen angewendeten Schlußweise, daß die durch die Bedingung (27) definierte *Konvergenz* der *komplexen* Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ *vollständig äquivalent* ist mit derjenigen der beiden *reellen* Doppelfolgen $\left(\alpha_\mu^{(\nu)}\right)$ und $\left(\beta_\mu^{(\nu)}\right)$.

Definiert man ferner die Existenz eines bestimmten *Doppellimes* a der $a_\mu^{(\nu)}$, in Zeichen:

$$\lim_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = a = \alpha + \beta i, \tag{29}$$

nach Analogie der Formel (2b), S. 254, durch eine Beziehung von der Form:

$$\left| a_{n+\varrho}^{(n+\sigma)} - a \right| \leqq \varepsilon \text{ für: } \begin{cases} \varrho = 0, 1, 2, \cdots\cdots \\ \sigma = 0, 1, 2, \cdots\cdots, \end{cases} \tag{30}$$

so findet man hieraus:

$$\lim_{\mu,\nu\to\infty} \alpha_\mu^{(\nu)} = \alpha, \quad \lim_{\mu,\nu\to\infty} \beta_\mu^{(\nu)} = \beta, \tag{31}$$

und umgekehrt ziehen die beiden letzten Beziehungen wieder die Beziehung (29) nach sich. Da andererseits für die *Existenz* der beiden Grenzwerte (31) die *Konvergenz* der beiden Doppelfolgen $\left(\alpha_\mu^{(\nu)}\right)$, $\left(\beta_\mu^{(\nu)}\right)$ *notwendig* und *hinreichend* ist, so findet man, mit Benützung des zuvor über die *Konvergenz* der Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ Gesagten, schließlich:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines endlichen Doppellimes $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} \left(\alpha_\mu^{(\nu)} + \beta_\mu^{(\nu)} i\right)$ *besteht in der Konvergenz der Doppelfolge* $\left(\alpha_\mu^{(\nu)} + \beta_\mu^{(\nu)} i\right)$, *welche zusammenfällt mit der Konvergenz der beiden reellen Doppelfolgen* $\left(\alpha_\mu^{(\nu)}\right)$, $\left(\beta_\mu^{(\nu)}\right)$, *und man hat sodann:*

$$\lim_{\mu,\nu\to\infty} \left(\alpha_\mu^{(\nu)} + \beta_\mu^{(\nu)} i\right) = \lim_{\mu,\nu\to\infty} \alpha_\mu^{(\nu)} + i \cdot \lim_{\mu,\nu\to\infty} \beta_\mu^{(\nu)}. \tag{32}$$

In ganz analoger Weise lassen sich auch die *iterierten* Limites der Doppelfolge $\left(\alpha_\mu^{(\nu)} + \beta_\mu^{(\nu)} i\right)$ auf diejenigen der *reellen* Doppelfolgen $\left(\alpha_\mu^{(\nu)}\right)$, $\left(\beta_\mu^{(\nu)}\right)$ zurückführen. Von den auf diese Weise sich ergebenden Be-

ziehungen wollen wir nur den folgenden, aus § 43, Satz (Ia), S. 284, unmittelbar hervorgehenden Satz, als für die Anwendungen wichtigsten, hervorheben:

Wenn der Doppellimes $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$ *und die einzelnen Zeilen- bzw. Kolonnenlimites (im engeren Sinne) existieren, die einzelnen Zeilen also* **konvergieren**, *so bestehen die Beziehungen:*

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\nu\to\infty}\lim\limits_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}\\ \lim\limits_{\mu\to\infty}\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}\end{array}\right\} = \lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}. \tag{33}$$

Zugleich ist, wie durch Spezialisierung des Satzes (IIb) von § 43, S. 290, sich ergibt (vgl. hierzu S. 279, letzter Absatz), für die Existenz eines *endlichen* $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$ *hinreichend*, daß die Konvergenz der Zeilen bzw. Kolonnen eine *gleichmäßige* ist (s. § 42, Nr. 8, S. 275) und daß der betreffende *iterierte* Limes im engeren Sinne existiert.

§ 74. Grenzwertsätze für komplexe Zahlen.

1. Die Beziehung (s. § 73, Gl. (11), S. 561):

$$\lim_{\nu\to\infty}(\alpha_\nu + \beta_\nu i) = \lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu + i\lim_{\nu\to\infty}\beta_\nu \tag{1}$$

gestattet offenbar, gewisse früher für *reelle* Zahlen bewiesene Grenzwertsätze ohne weiteres auf *komplexe* Zahlen zu übertragen.

Versteht man jetzt unter (a_ν), (b_ν), $\cdots$, (k_ν) irgendwelche konvergente Folgen *komplexer* Zahlen, unter $R(a_\nu, b_\nu \cdots, k_\nu)$ einen aus $a_\nu, b_\nu, \cdots, k_\nu$ zusammengesetzten *begrenzten rationalen Ausdruck* (vgl. § 22, Nr. 8, S. 133), so findet man unter der Voraussetzung, daß keiner der etwa auftretenden Nenner den Grenzwert 0 besitzt, übereinstimmend mit Formel (15), § 28, Nr. 3, S. 170:

$$R\left(\lim_{\nu\to\infty} a_\nu, \lim_{\nu\to\infty} b_\nu, \cdots, \lim_{\nu\to\infty} k_\nu\right) = \lim_{\nu\to\infty} R(a_\nu, b_\nu, \cdots, k_\nu), \tag{2}$$

worauf schon in § 73, Nr. 1 hingewiesen wurde und wie sich überdies mit Benützung von Gl. (1) unmittelbar ergibt, wenn man beachtet, daß auf Grund der für komplexe Zahlen geltenden Rechnungsregeln als reeller und (vom Faktor i befreiter) imaginärer Teil eines aus *komplexen* Zahlen zusammengesetzten rationalen Ausdruckes zwei aus *reellen* Zahlen gebildete Ausdrücke derselben Art erscheinen.

Des weiteren erkennt man, daß der als *Hauptsatz* bezeichnete Grenzwertsatz von § 37, Nr. 3, III (S. 229/30, Gl. (13)) für *komplexe* a_ν zunächst in der folgenden Form gilt:

Sind die M_ν reell und monoton, $\lim\limits_{\nu\to\infty} M_\nu = \pm\infty$, so hat man stets:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu}{M_\nu} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}} \tag{3}$$

sobald der rechts stehende Limes im engeren Sinne existiert,

und ebenso der für $M_\nu = \nu$ resultierende speziellere („Cauchysche") Grenzwertsatz (a. a. O. Gl. (14)).

Es ist:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu}{\nu} = \lim_{\nu\to\infty} (a_\nu - a_{\nu-1}), \tag{4}$$

sobald der rechts stehende Grenzwert im engeren Sinne existiert

Die beiden Sätze behalten aber, wie wiederum die Zerlegung in reelles und imaginäres zeigt, auch noch im Falle:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}} = \infty \text{ bzw. } \lim_{\nu\to\infty} (a_\nu - a_{\nu-1}) = \infty \tag{5}$$

Gültigkeit, falls mindestens der reelle oder der (vom Faktor i befreite) imaginäre Teil den Grenzwert $+\infty$ oder $-\infty$ besitzt, also die Folge $\left(\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}}\right)$ bzw $(a_\nu - a_{\nu-1})$ *eigentlich divergiert* (§ 73, Nr. 3, S. 565).

Auch kann man dem Cauchyschen Satze, wenn man a_ν durch $u_0 + u_1 + \cdots + u_\nu$ ersetzt und im Nenner $\nu + 1$ statt ν schreibt, analog mit § 45, Nr. 1, Gl. (4), S. 305, die Form geben:

Es ist:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_\nu}{\nu + 1} = \lim_{\nu\to\infty} u_\nu, \tag{6}$$

mit anderen Worten: das arithmetische Mittel einer unbegrenzt fortsetzbaren Folge (u_ν) beliebiger komplexer Zahlen besitzt den Grenzwert $\lim\limits_{\nu\to\infty} u_\nu$, falls dieser letztere endlich oder in dem soeben näher bezeichneten Sinne unendlich ausfällt.

Dabei sei wiederum noch ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß diese Sätze *nicht umkehrbar* sind, d. h. daß die Existenz des *links* stehenden Grenzwertes keinen Schluß auf diejenige des *rechts* stehenden gestattet (vgl. § 37, Nr. 3 am Schlusse, S. 230 und § 45, Nr. 1 am Schlusse, S. 305).

Beachtet man ferner, daß beim Beweis der in § 37, Nr. 4 (S 231, Gl. (17), (18)) enthaltenen Verallgemeinerung des dortigen *Hauptsatzes* (Gl. (13)) beständig nur mit *absoluten Beträgen* operiert wird und daß alle dort gemachten Schlüsse unveränderte Geltung behalten, wenn man die dort mit a_ν, b_ν, A bezeichneten *reellen* Zahlen durch beliebige *komplexe* ersetzt (während die daselbst mit B bezeichnete Zahl[1]) *reell* und *positiv* bleibt), so gewinnt man für den hier in Gl. (3) enthaltenen Satz die folgende Verallgemeinerung:

Ist für komplexe a_ν, b_ν:

$$(7)\qquad \lim_{\nu\to\infty} |b_\nu| = +\infty \quad \textit{und für jedes } n\textit{:}\ \left|\frac{1}{b_n}\right| \sum_1^n{}^{\nu} |b_\nu - b_{\nu-1}| < B\ ^{2)},$$

so hat man:

$$(8)\qquad \lim_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu}{b_\nu} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{b_\nu - b_{\nu-1}},$$

wenn der rechts stehende Grenzwert endlich ausfällt

Da die zweite der Bedingungen (7) offenbar erfüllt ist, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{1}{b_n}\right| \sum\limits_1^n{}^{\nu} |b_\nu - b_{\nu-1}|$ im engeren Sinne existiert, und da das letztere nach dem „Hauptsatze" sicher der Fall ist, wenn die $|b_\nu|$ mit ν *monoton* ins Unendliche wachsen und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|b_n - b_{n-1}|}{|b_n| - |b_{n-1}|}$ im engeren Sinne existiert, so ergibt sich als Spezialfall des soeben ausgesprochenen Satzes der folgende:

Sind (a_ν), (b_ν) komplexe Zahlenfolgen und wachsen die $|b_\nu|$ mit ν monoton ins Unendliche, so hat man:

$$(9)\qquad \lim_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu}{b_\nu} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{b_\nu - b_{\nu-1}},$$

wenn der rechts stehende Grenzwert und außerdem $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{|b_\nu - b_{\nu-1}|}{|b_\nu| - |b_{\nu-1}|}$ *im engeren Sinne existiert.*[3])

---

1) Auf S. 233, Zeile 1, steht infolge eines Druckfehlers: $G+1$ statt: $B+1$.

2) Anders ausgesprochen:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{1}{b_n}\right| \cdot \sum_1^n{}^{\nu} |b_\nu - b_{\nu-1}| < +\infty$$

3) Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß auch die Gültigkeit der Grenzwertsätze von § 59, Nr. 8, S. 422, und § 63, Nr. 2, S. 461, für *komplexe* a_ν durch Trennung des reellen und imaginären unmittelbar erkannt wird.

2. Mit Benützung dieses letzten Ergebnisses wollen wir noch den folgenden Satz beweisen, welcher eine bemerkenswerte Verallgemeinerung des Cauchyschen Grenzwertsatzes in der Fassung von Gl. (6) bildet:

Sind a, b zwei beliebige komplexe Zahlen, welche nur der Beschränkung unterworfen sind: $\Re\left(\frac{a}{a+b}\right) > 0$[1]*, ist ferner (u_ν) eine komplexe Zahlenfolge und:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(a u_n + b\,\frac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1}\right) = u \text{ (d. h. endlich)}, \tag{10}$$

so hat man

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1} = \frac{u}{a+b}.\text{[2]} \tag{11}$$

Beweis: Setzt man:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{1}{c}\ \left(\text{wo also: } \Re(c) > 0\right)$$

und daher:

$$\frac{b}{a+b} = 1 - \frac{1}{c},$$

so nimmt die Voraussetzung (10) nach Division mit $a+b$ die Form an:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{c}\cdot u_n + \left(1-\frac{1}{c}\right)\frac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1}\right) = \frac{u}{a+b} \tag{12}$$

Setzt man ferner:

$$\frac{u_0+u_1+\cdots+u_\nu}{\nu+1} = \mathfrak{M}(u_\nu) \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots), \tag{13}$$

also:

$$u_n = (n+1)\,\mathfrak{M}(u_n) - n\,\mathfrak{M}(u_{n-1}),$$

so wird:

$$\frac{1}{c}\cdot u_n + \left(1-\frac{1}{c}\right)\frac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1} = \frac{(c+n)\,\mathfrak{M}(u_n) - n\,\mathfrak{M}(u_{n-1})}{c}. \tag{14}$$

Wir multiplizieren Zähler und Nenner des letzten Ausdrucks mit dem Faktor $\frac{(c+n-1)(c+n-2)\cdots(c+1)}{n!}$ und bedienen uns für die weitere Durchführung einer abgekürzten Bezeichnung, welche genau derjenigen für die *Binomialkoeffizienten* bei ganzem positiven Exponenten n nach-

---

1) Damit ist implizite gesagt, daß $|a| > 0$, $|a+b| > 0$.

2) Insbesondere genügt also schon die (für $a = b = \frac{1}{2}$ resultierende) Voraussetzung:

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(u_\nu + \frac{u_0+u_1+\cdots+u_\nu}{\nu+1}\right) = 2u,$$

um daraus zu schließen, daß:

$$\lim_{\nu\to\infty} u_\nu = \lim_{\nu\to\infty}\frac{u_0+u_1+\cdots+u}{\nu+1} = u$$

gebildet ist (vgl. § 14, Nr. 4, S. 88, 89, Gl. (5), (7)), d. h. wir setzen, wenn c eine beliebige komplexe Zahl bedeutet:

$$(15)\qquad \begin{cases} (c)_k = \dfrac{c(c-1)\cdots(c-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} & (k=1,2,3,\cdots) \\ (c)_0 = 1. \end{cases}$$

Alsdann ergibt sich zunächst mit Hilfe der angegebenen Multiplikation:

$$(16)\qquad \frac{(c+n)\mathfrak{M}(u_n)-n\,\mathfrak{M}(u_{n-1})}{c}=\frac{(c+n)_n\mathfrak{M}(u_n)-(c+n-1)_{n-1}\mathfrak{M}(u_{n-1})}{(c+n-1)_n}.$$

Nun findet man aber auf Grund der Definition (15):

$$(17)\qquad \begin{aligned} (c)_k+(c)_{k-1} &= \left(\frac{c-k+1}{k}+1\right)(c)_{k-1} \\ &= \frac{c+1}{k}\cdot\frac{c(c-1)\cdots(c-k+2)}{1\cdot 2\cdots(k-1)} \\ &= (c+1)_k \qquad (k=1,2,3,\cdots), \end{aligned}$$

d. h. die (c_k) genügen bei beliebiger Wahl von c genau derselben Rekursionsformel wie im Falle $c=n$, wo n eine natürliche Zahl (vgl. § 14, S. 90, Gl. (12)). Da hiernach insbesondere:

$$(18)\qquad (c+n-1)_n+(c+n-1)_{n-1}=(c+n)_n,$$

so läßt sich der Nenner $(c+n-1)_n$ des Ausdrucks auf der rechten Seite von Gl. (16) durch: $(c+n)_n-(c+n-1)_{n-1}$ ersetzen, sodaß Gl. (12) mit Berücksichtigung von Gl. (14), (16) die Form annimmt:

$$(19)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{(c+n)_n\,\mathfrak{M}(u_n)-(c+n-1)_{n-1}\,\mathfrak{M}(u_{n-1})}{(c+n)_n-(c+n-1)_{n-1}}=\frac{u}{a+b}.$$

Um schließlich auf diesen Ausdruck den letzten Satz der vorigen Nummer anwenden zu können, hat man nur nachzuweisen, daß $|(c+n)_n|$ mit n *monoton ins Unendliche* wächst und daß

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|(c+n)_n-(c+n-1)_{n-1}|}{|(c+n)_n|-|(c+n-1)_{n-1}|}$$

im engeren Sinne existiert.

Man hat nun:

$$|(c+n)_n|=\left|\frac{(c+n)(c+n-1)\cdots(c+1)}{1\cdot 2\cdots n}\right|=\left|\frac{c+1}{1}\right|\cdots\left|\frac{c+n-1}{n-1}\right|\cdot\left|\frac{c+n}{n}\right|.$$

Ist sodann $c=\gamma+\delta i$, wo also: $\Re(c)=\gamma>0$, so folgt:

$$\left|\frac{c+n}{n}\right|\geqq\frac{\gamma+n}{n}>1,$$

sodaß also in der Tat $|(c+n)_n|$ mit n beständig zunimmt. Da überdies:

$$|(c+n)_n|\geqq\left(1+\frac{\gamma}{1}\right)\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)>1+\gamma\sum_1^n{}_\nu\frac{1}{\nu},$$

so findet man:

$$(20)\qquad \lim_{n\to\infty}|(c+n)_n|=+\infty.$$

Ferner ergibt sich mit Benützung der Rekursionsformel (18):

$$\frac{|(c+n)_n-(c+n-1)_{n-1}|}{|(c+n)_n|-|(c+n-1)_{n-1}|}=\frac{|(c+n-1)_n|}{|(c+n)_n|-|(c+n-1)_{n-1}|}$$

und, wenn man zunächst Zähler und Nenner des letzten Ausdrucks mit $n!$ multipliziert:

$$\begin{aligned}\frac{|(c+n)_n-(c+n-1)_{n-1}|}{|(c+n)_n|-|(c+n-1)_{n-1}|}&=\frac{|c+n-1|\cdot|c+n-2|\cdots|c|}{|c+n|\cdot|c+n-1|\cdots|c+1|-|c+n-1|\cdot|c+n-2|\cdots|c+1|\cdot n}\\&=\frac{|c|}{|c+n|-n}\\&=|c|\cdot\frac{|c+n|+n}{|c+n|^2-n^2}\\&=|c|\cdot\frac{|c+n|+n}{2\gamma n+\gamma^2+\delta^2},\end{aligned}$$

also:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|(c+n)_n-(c+n-1)_{n-1}|}{|(c+n)_n|-|(c+n-1)_{n-1}|}=\frac{|c|}{\gamma},\tag{21}$$

sodaß also die fraglichen Bedingungen erfüllt sind.

Die Anwendung des betreffenden Grenzwertsatzes auf die linke Seite von Gl. (19) gibt somit:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(c+n)_n\,\mathfrak{M}(u_n)}{(c+n)_n}=\lim_{n\to\infty}\mathfrak{M}(u_n)=\frac{u}{a+b},\tag{22}$$

woraus dann durch Einsetzen in die Voraussetzung (10) weiter folgt:

$$\lim_{n\to\infty}au_n=u-\frac{bu}{a+b}=\frac{au}{a+b},$$

also schließlich, wie behauptet:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\frac{u}{a+b}.\tag{23}$$

Kapitel II.

Unendliche Reihen mit komplexen Gliedern.

§ 75. Konvergenz und Divergenz. — Absolute und unbedingte Konvergenz. — Summen unendlich vieler absolut konvergenter Reihen mit komplexen Gliedern. — Multiplikation komplexer Reihen.

1. Bedeutet (a_ν) eine unbegrenzt fortsetzbare Folge komplexer Zahlen und setzt man:

$$a_0+a_1+\cdots+a_\nu=s_\nu\ (\nu=0,1,2,\cdots\cdots),\tag{1}$$

so heißt wiederum die *unendliche Reihe*:

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_\nu + \cdots\cdots$$

konvergent und s ihre *Summe*, in Zeichen:

$$(2) \qquad \sum_0^\infty a_\nu = s,$$

wenn die Folge der s_ν *konvergiert* und den bestimmten *Grenzwert* s besitzt, wenn also:

$$(2\text{a}) \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = s \quad \left(\text{d. h.} \lim_{n\to\infty} \sum_0^n a_\nu = s\right).$$

In jedem anderen Falle heißt die obige Reihe *divergent.*

Auf Grund der obigen Definition ergibt sich zunächst als *notwendige und hinreichende* Bedingung für die *Konvergenz* der Reihe nach § 78, Nr. 1, (II), S. 559, eine Beziehung von der Form:

$$(3) \qquad |s_{n+\varrho} - s_n| < \varepsilon \text{ für } \varrho = 1, 2, 3 \cdots\cdots,$$

anders geschrieben:

$$(3\text{a}) \qquad \left|\sum_{n+1}^{n+\varrho} a_\nu\right| < \varepsilon \quad (\varrho = 1, 2, 3, \cdots\cdots).$$

Da die Konvergenzbedingung (3) genau dieselbe Form hat wie für Reihen mit reellen Gliedern (§ 44, Nr. 2, Ungl. (5), S. 294), da ferner die Übertragbarkeit des Cauchyschen Grenzwertsatzes auf komplexe Zahlen bereits festgestellt wurde (§ 74, Nr. 1, S. 569), so gelten auch diejenigen Folgerungen und Umformungen, welche in § 45 an jene Konvergenzbedingung geknüpft wurden, insbesondere die folgende (a. a. O. Gl. (6), (7), S 307):

Für die Konvergenz der Reihe $\sum_0^\infty a_\nu$ gegen die Summe s ist **notwendig und hinreichend** *die gleichzeitige Existenz der beiden Beziehungen:*

$$(4) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} = s \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \cdots + n \cdot a_n}{n} = 0, \end{cases}$$

wobei (nach § 74, Gl. (6)) wiederum noch die Beziehung: $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$ sich als *hinreichend* für die Existenz der *zweiten* dieser Bedingungen erweist.

Die zweite der Bedingungen (4) läßt sich auf Grund der in § 74, Nr. 1 erfolgten Übertragung der erforderlichen Grenzwertsätze auf *kom-*

plexe Zahlen (s. S. 569, Gl. (3) und 570, Gl. (8)), entsprechend Gl. (16), S. 310, auch durch die folgende ersetzen:

$$(4a)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{M_0 a_0 + M_1 a_1 + \cdots + M_n a_n}{M_n} = 0, \text{ wo: } M_n \geqq M_{n-1} > 0, \lim_{n\to\infty} M_n = +\infty,$$

oder auch, entsprechend Gl. (15), S. 309, durch die noch etwas allgemeinere:

$$(4b)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{b_0 a_0 + b_1 a_1 + \cdots + b_n a_n}{b_n} = 0,$$

wobei die b_ν beliebige komplexe Zahlen bedeuten, die nur den Bedingungen zu genügen haben:

$$\lim_{n\to\infty} |b_n| = +\infty, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{1}{b_n}\right| \cdot \sum_1^n{}^\nu |b_\nu - b_{\nu-1}| < +\infty.$$

Andererseits läßt sich aber nach den in § 73, Nr. 1 gemachten Bemerkungen die Konvergenzbedingung (3) auch durch solche ersetzen, in denen nur *reelle* Zahlen vorkommen.

Ist wiederum:

$$a_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu i$$

und setzt man:

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \sigma_n \\ \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_n = \tau_n \end{array}\right\} \text{ also: } s_n = \sigma_n + \tau_n i,$$

so ist für die Existenz eines bestimmten $\lim_{n\to\infty} s_n$ *notwendig und hinreichend* diejenige von $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$ und $\lim_{n\to\infty} \tau_n$, und man hat sodann (S. 561, Gl. (11)):

$$(6)\qquad \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n + i \cdot \lim_{n\to\infty} \tau_n.$$

Somit ergibt sich:

> *Für die Konvergenz der Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu (\alpha_\nu + \beta_\nu i)$ ist* **notwendig und hinreichend** *diejenige der beiden Reihen $\sum_0^\infty{}^\nu \alpha_\nu$, $\sum_0^\infty{}^\nu \beta_\nu$, und zwar hat man:*

$$(7)\qquad \sum_0^\infty{}^\nu (\alpha_\nu + \beta_\nu i) = \sum_0^\infty{}^\nu \alpha_\nu + i \cdot \sum_0^\infty{}^\nu \beta_\nu.$$

Die Reihe $\sum(\alpha_\nu + \beta_\nu i)$ ist also *divergent*, wenn mindestens eine der beiden Reihen $\sum \alpha_\nu$, $\sum \beta_\nu$ *divergiert*. Sie soll *eigentlich* divergent heißen, wenn mindestens eine jener beiden Reihen *eigentlich* (d. h. nach

$+\infty$ oder nach $-\infty$) divergiert[1]; *endlich unbestimmt* oder *innerhalb endlicher Grenzen oszillierend*, wenn *keine* der beiden Reihen $\sum \alpha_\nu$, $\sum \beta_\nu$ einen *unendlichen* Hauptlimes besitzt, anders ausgesprochen, wenn $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |s_n|$ *endlich* ausfällt.

2. Die Zurückführung der Konvergenz von $\sum a_\nu$ auf diejenige der beiden reellen Reihen $\sum \alpha_\nu$, $\sum \beta_\nu$ bietet den Vorteil, daß sie die Übertragung der für Reihen mit reellen Gliedern geltenden Hauptsätze auf solche mit komplexen Gliedern sehr vereinfacht.

Die Reihe $\sum a_\nu$ ist offenbar dann und nur dann *unbedingt* konvergent, wenn *jede* der beiden Reihen $\sum \alpha_\nu$, $\sum \beta_\nu$ *unbedingt* konvergiert. Hierfür ist aber *notwendig und hinreichend* deren *absolute* Konvergenz, folglich auch die Konvergenz der Reihe $\sum(|\alpha_\nu| + |\beta_\nu|)$. Da aber, wegen: $|a_\nu| \leqq |\alpha_\nu| + |\beta_\nu|$, gleichzeitig mit dieser letzteren Reihe stets auch $\sum |a_\nu|$ konvergiert und umgekehrt, wegen $|\alpha_\nu| \leqq |a_\nu|$, $|\beta_\nu| \leqq |a_\nu|$, gleichzeitig mit $\sum |a_\nu|$ auch die beiden Reihen $\sum |\alpha_\nu|$, $\sum |\beta_\nu|$ konvergieren, so findet man:

> *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die unbedingte Konvergenz der Reihe $\sum a_\nu$ besteht in deren absoluter Konvergenz, d. h. in der Konvergenz der Reihe $\sum |a_\nu|$.*[2])

(Hiernach ist z. B die „geometrische" Reihe $\sum a^\nu$ auch bei komplexem a *unbedingt konvergent*, wenn $|a| < 1$, da ja unter dieser Voraussetzung $\sum |a|^\nu$ konvergiert: s. § 44, Nr. 5, S. 301)

---

1) Für diese Bezeichnung sind wiederum gewisse erst in der Funktionenlehre hervortretende Zweckmäßigkeitsgründe maßgebend. Man würde sonst zum mindesten erwarten, daß $\sum(\alpha_\nu + \beta_\nu i)$ erst dann als *eigentlich* divergent gelten sollte, wenn *beide* Reihen $\sum \alpha_\nu$, $\sum \beta_\nu$ diese Eigenschaft besitzen Genau genommen wäre aber selbst diese Bezeichnungsweise noch inkonsequent. Denn da eine *reelle* Zahlenfolge (σ_ν) nur dann *eigentlich* divergent genannt wurde, wenn $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sigma_\nu = +\infty$ oder $= -\infty$, so würde das Analogon für eine *komplexe* Folge (s_ν), wenn $s_\nu = |s_\nu| \cdot \mathfrak{e}_{s_\nu}$, darin bestehen, daß $\lim\limits_{\nu\to\infty} |s_\nu| = +\infty$ und außerdem $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mathfrak{e}_{s_\nu}$ eine *bestimmte* Zahl (mit dem absoluten Betrage 1) vorstellt.

2) Daß aus der Konvergenz von $\sum |a_\nu|$ stets diejenige von $\sum a_\nu$ folgt, mit anderen Worten, daß eine „absolut" konvergierende Reihe stets auch an sich *konvergiert*, folgt schon unmittelbar aus der Beziehung:

$$\left|\sum_{n+1}^{n+\varrho} a_\nu\right| \leqq \sum_{n+1}^{n+\varrho} |a_\nu|.$$

Im Anschluß hieran sei noch folgendes bemerkt. Nach dem Satze über den absoluten Betrag einer Summe (§ 72, Nr. 2, S. 553) hat man ja *im allgemeinen:*

Im übrigen gilt auch hier die *Unbedingtheit* der Konvergenz in dem erweiterten Sinne (vgl. § 46, Nr. 3, § 58, Nr. 3), daß die Konvergenz erhalten bleibt und auch der Summenwert keine Änderung erleidet, wenn man die als *absolut* konvergent vorausgesetzte Reihe $\sum a_\nu$ in eine endliche oder unendliche Menge von *Teilreihen* zerlegt und deren *Summen* wieder zu einer endlichen oder unendlichen Reihe vereinigt. Wird etwa eine derartige Zerlegung der Reihe $\sum a_\nu$ in eine unendliche Menge von Teilreihen dargestellt durch das Schema:

$$(8)\qquad \begin{cases} \quad a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + \cdots + a_\mu^{(0)} + \cdots \\ + a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + \cdots + a_\mu^{(1)} + \cdots \\ + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} + \cdots + a_\mu^{(\nu)} + \cdots \\ + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot , \end{cases}$$

$$\left|\sum_0^n{}_\nu\, a_\nu\right| < \sum_0^n{}_\nu\, |a_\nu|$$

(mit Ausschluß der Gleichheit). Hieraus dürfte man aber für $n \to \infty$ nach bekannter Schlußweise (s. § 28, Nr 3, S. 171, Ungl. (22)) zunächst nur folgern, daß:

$$\left|\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu\right| \leqq \sum_0^\infty{}_\nu\, |a_\nu|.$$

Nichtsdestoweniger ist das *Gleichheits*zeichen in Wahrheit hier auch definitiv unmöglich, wenn auch nur *für irgendein einzelnes* n, wie oben angenommen, das Zeichen $<$ gilt. Denn man hat zunächst:

$$\left|\sum_0^{n+\varrho}{}_\nu\, a_\nu\right| \leqq \left|\sum_0^n{}_\nu\, a_\nu\right| + \left|\sum_{n+1}^{n+\varrho}{}_\nu\, a_\nu\right|$$
$$\leqq \left|\sum_0^n{}_\nu\, a_\nu\right| + \sum_{n+1}^{n+\varrho}{}_\nu\, |a_\nu|$$

und daher:

$$\left|\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu\right| \leqq \left|\sum_0^n{}_\nu\, a_\nu\right| + \sum_{n+1}^\infty{}_\nu\, |a_\nu|$$
$$< \sum_0^\infty{}_\nu\, |a_\nu|.$$

Nur in dem *einzigen* Falle, daß *ausnahmslos* $a_\nu = \lambda_\nu \cdot a_0$ (λ_ν reell und $\geqq 0$ für $\nu = 1, 2, 3, \cdots$) wird:

$$\left|\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu\right| = \left|a_0 \sum_0^\infty{}_\nu\, \lambda_\nu\right| = \sum_0^\infty{}_\nu\, |a_\nu|.$$

und setzt man:

$$a_\mu^{(\nu)} = \alpha_\mu^{(\nu)} + \beta_\mu^{(\nu)} i \qquad \binom{\mu}{\nu} = 0, 1, 2, \cdots),$$

so hängt die Summe der zweifach unendlichen bzw. iterierten Reihe (8) bei irgendeiner beliebigen Anordnung lediglich ab von den entsprechenden Summen der beiden Reihen:

$$(9)\begin{cases} \alpha_0^{(0)} + \alpha_1^{(0)} + \cdots + \alpha_\mu^{(0)} + \cdots & \beta_0^{(0)} + \beta_1^{(0)} + \cdots + \beta_\mu^{(0)} + \cdots \\ + \alpha_0^{(1)} + \alpha_1^{(1)} + \cdots + \alpha_\mu^{(1)} + \cdots & + \beta_0^{(1)} + \beta_1^{(1)} + \cdots + \beta_\mu^{(1)} + \cdots \\ + \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot & + \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ + \alpha_0^{(\nu)} + \alpha_1^{(\nu)} + \cdots + \alpha_\mu^{(\nu)} + \cdots & + \beta_0^{(\nu)} + \beta_1^{(\nu)} + \cdots + \beta_\mu^{(\nu)} + \cdots \\ + \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot & + \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot , \end{cases}$$

welche die dem Schema (8) entsprechenden Zerlegungen der Reihen $\sum \alpha_\nu$ und $\sum \beta_\nu$ vorstellen. Da auf Grund der Voraussetzung die Reihen $\sum \alpha_\nu$, $\sum \beta_\nu$ *absolut* konvergieren, so folgt aus § 58, Nr. 3, S. 408, die Gültigkeit der Beziehungen (a. a. O. Gl (13), (15)):

$$(10)\qquad \sum_0^\infty {}^\nu \alpha_\nu \begin{cases} = \sum_0^\infty {}^\nu \sum_0^\infty {}^\mu \alpha_\mu^{(\nu)} \\ = \sum_0^\infty {}^\mu \sum_0^\infty {}^\nu \alpha_\mu^{(\nu)} \end{cases} \qquad \sum_0^\infty {}^\nu \beta_\nu \begin{cases} = \sum_0^\infty {}^\nu \sum_0^\infty {}^\mu \beta_\mu^{(\nu)} \\ = \sum_0^\infty {}^\mu \sum_0^\infty {}^\nu \beta_\mu^{(\nu)}, \end{cases}$$

wobei jede der betreffenden Teilreihen und die aus ihnen gebildete Reihe *absolut* konvergiert, die letztere sogar konvergent bleibt, wenn man (nicht nur die Summen der einzelnen Teilreihen, sondern) jedes einzelne Glied durch den absoluten Betrag ersetzt

Hieraus folgt aber, daß die Reihe $\sum u_\nu$ bzw. das Schema (8) das analoge Verhalten zeigt, d. h. es besteht die Beziehung:

$$(11)\qquad \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu \begin{cases} = \sum_0^\infty {}^\nu \sum_0^\infty {}^\mu a_\mu^{(\nu)} \\ = \sum_0^\infty {}^\mu \sum_0^\infty {}^\nu a_\mu^{(\nu)} \end{cases}$$

mit dem entsprechenden auf die *absolute* Konvergenz der rechten Seite bezüglichen Zusatz

Sind die Partialreihen nur in endlicher Anzahl n vorhanden, so findet man analog:

$$(12)\qquad \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu = \sum_0^n {}^\nu \sum_0^\infty {}^\mu a_\mu^{(\nu)}$$

3. Ist statt der *einfach unendlichen* Reihe $\sum a_\nu$ von vornherein das *zweifach unendliche* Schema (8) vorgelegt, so führt die Beziehung

$$\sum a_\mu^{(\nu)} = \sum \alpha_\mu^{(\nu)} + i \cdot \sum \beta_\mu^{(\nu)}$$

(welche ja allemal besteht, sobald die Summation links und rechts auf die nämlichen Zahlenwerte der Indizes μ, ν erstreckt wird, und auch für die etwaigen Grenzwerte bei $\mu \longrightarrow \infty$, $\nu \longrightarrow \infty$ bestehen bleibt) zur unmittelbaren Übertragung des in § 58, Nr. 4, S. 410, für *reelle* Reihen abgeleiteten Satzes auf *komplexe*, d. h es gilt der Satz:

Bedeutet s irgendeine endliche Zahl, so zieht jede der drei Gleichungen.

$$(13)\quad \begin{cases} \text{(a)}\ \sum_0^\infty{}^{\nu} \left(a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu-1)} + \cdots + a_\nu^{(0)}\right) = s & \textit{(Reihe der Diagonalen)} \\ \text{(b)}\ \sum_0^\infty{}^{\nu} \sum_0^\infty{}^{\mu} a_\mu^{(\nu)} = s & \textit{(Reihe der Zeilensummen)} \\ \text{(c)}\ \sum_0^\infty{}^{\mu} \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\mu^{(\nu)} = s & \textit{(Reihe der Kolonnensummen)} \end{cases}$$

die beiden anderen nach sich, sobald die in der Voraussetzung auftretende (einfache bzw. iterierte) Reihe bei Vertauschung der $a_\mu^{(\nu)}$ mit ihren absoluten Beträgen konvergent bleibt

Dabei ist, wenn etwa eine der beiden Gleichungen (13b), (13c) zur Voraussetzung genommen wird, die Reihe (13a) *absolut*, also auch *unbedingt* konvergent, nicht nur, wenn man die Klammerausdrücke, sondern auch dann, wenn man die einzelnen $a_\mu^{(\nu)}$ als Reihenglieder auffaßt.

Hebt man wiederum aus dem obigen Satze dasjenige Resultat heraus, welches sich lediglich auf die Gegenseitigkeit der beiden Beziehungen (13b), (13c) erstreckt, so ergibt sich der sog *Cauchysche Doppelreihensatz* in seiner Übertragung auf komplexe Reihen, nämlich:

Konvergieren alle Zeilen des Schemas (8) und bilden die Zeilensummen eine konvergente Reihe mit der Summe s, so gilt das nämliche von den einzelnen Kolonnen und von der Reihe der Kolonnensummen, falls die Konvergenz der einzelnen Zeilen und der Reihe der Zeilensummen bei Vertauschung der $a_\mu^{(\nu)}$ mit ihren absoluten Beträgen erhalten bleibt.

(Dabei steht es selbstverständlich frei, die Begriffe „Zeilen“ und „Kolonnen“ miteinander zu vertauschen.)

4. Der Hauptsatz (Gl. (13a, b, c)) der vorigen Nummer liefert naturgemäß auch die Übertragung der *Cauchyschen Multiplikationsregel* (vgl. § 58, Nr. 5, S. 412) auf absolut konvergierende *komplexe* Reihen, nämlich:

Sind die beiden Reihen $\sum_0^\infty a_\nu = s$, $\sum_0^\infty a'_\nu = s'$ *absolut konvergent, so hat man:*

$$ss' = \sum_0^\infty c_\nu, \text{ wo } c_\nu = a_0 a'_\nu + a_1 a'_{\nu-1} + \cdots + a_\nu a'_0 \tag{14}$$

und die Reihe $\sum c_\nu$ *konvergiert absolut, auch wenn man statt der* c_ν *deren Bestandteile* $a_\mu a'_{\nu-\mu}$ $(\mu = 0, 1, \cdots \nu)$ *als Reihenglieder auffaßt.*

Denn, bildet man das zweifach unendliche Schema:

$$\begin{cases} a_0 a'_0 + a_1 a'_0 + \cdots + a_\mu a'_0 + \cdots \\ + a_0 a'_1 + a_1 a'_1 + \cdots + a_\mu a'_1 + \cdots \\ + \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ + a_0 a'_\nu + a_1 a'_\nu + \cdots + a_\mu a'_\nu + \cdots \\ + \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot , \end{cases} \tag{15}$$

so erkennt man, daß das durch Vertauschung der Glieder $a_\mu a'_\nu$ mit den absoluten Beträgen $|a_\mu| \cdot |a'_\nu|$ daraus hervorgehende, nach Zeilen summiert, das Produkt der nach Voraussetzung konvergierenden Reihen $\sum_0^{\infty} |a_\nu|$ und $\sum_0^\infty |a'_\nu|$ liefert, also *konvergiert.* Das Schema (15) genügt also der Voraussetzung (13b) des vorigen Hauptsatzes und, da dasselbe nach *Zeilen* summiert die unendliche Reihe

$$s \cdot a'_0 + s \cdot a'_1 + \cdots + s \cdot a'_\nu + \cdots\cdots = ss'$$

liefert, so ergibt sich durch Summation nach *Diagonalen* die Richtigkeit der Multiplikationsformel (14) einschließlich des auf die *absolute* Konvergenz bezüglichen Zusatzes.

Im übrigen hätte man dieses Resultat auch wieder durch Zerlegung der betreffenden komplexen Reihen in ihre reellen und imaginären Bestandteile herleiten können. Dieser Weg bietet sogar den Vorteil, daß er gestattet, die früher (s. § 66, S. 483 ff.) für *reelle* Reihen aufgefundenen *erweiterten* Gültigkeitsbedingungen für die Cauchysche Multiplikationsformel auch auf *komplexe* Reihen anzuwenden. Es werde also wieder gesetzt:

$$a_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu i \text{ und ebenso: } a'_\nu = \alpha'_\nu + \beta'_\nu i,$$

sodann, unter der Voraussetzung, daß die Reihen $\sum a_\nu$, $\sum a'_\nu$ überhaupt konvergieren:

(16) $$\sum_0^\infty{}^\nu \alpha_\nu = \sigma, \quad \sum_0^\infty{}^\nu \beta_\nu = \tau \quad \text{und:} \quad \sum_0^\infty{}^\nu \alpha'_\nu = \sigma', \quad \sum_0^\infty{}^\nu \beta'_\nu = \tau',$$

so ergibt sich zunächst $\left(\text{wenn wieder: } \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu = s, \ \sum_0^\infty{}^\nu a'_\nu = s'\right)$:

(17) $$ss' = \sigma\sigma' - \tau\tau' + (\sigma\tau' + \tau\sigma')i.$$

Nach dem Satze von § 66, Nr. 1 (s. S. 484, Gl. (5)) hat man aber:

(18) $$\begin{cases} \sigma\sigma' = \sum_0^\infty{}^\nu \alpha_\nu \cdot \sum_0^\infty{}^\nu \alpha'_\nu = \sum_0^\infty{}^\nu \gamma_\nu, \ \text{wo: } \gamma_\nu = \sum_0^\nu{}^\lambda \alpha_\lambda \alpha'_{\nu-\lambda} \\ \tau\tau' = \sum_0^\infty{}^\nu \beta_\nu \cdot \sum_0^\infty{}^\nu \beta'_\nu = \sum_0^\infty{}^\nu \delta_\nu, \ \text{wo: } \delta_\nu = \sum_0^\nu{}^\lambda \beta_\lambda \beta'_{\nu-\lambda} \\ \sigma\tau' = \sum_0^\infty{}^\nu \alpha_\nu \cdot \sum_0^\infty{}^\nu \beta'_\nu = \sum_0^\infty{}^\nu \gamma'_\nu, \ \text{wo: } \gamma'_\nu = \sum_0^\nu{}^\lambda \alpha_\lambda \beta'_{\nu-\lambda} \\ \tau\sigma' = \sum_0^\infty{}^\nu \beta_\nu \cdot \sum_0^\infty{}^\nu \alpha'_\nu = \sum_0^\infty{}^\nu \delta'_\nu, \ \text{wo: } \delta'_\nu = \sum_0^\nu{}^\lambda \beta_\lambda \alpha'_{\nu-\lambda}, \end{cases}$$

sofern nur feststeht, daß die Reihen $\sum \gamma_\nu, \cdots \sum \delta'_\nu$ *überhaupt konvergieren.*

In diesem Falle ergibt sich aus Gl. (17), (18) des weiteren:

(19) $$ss' = \sum_0^\infty{}^\nu \left(\gamma_\nu - \delta_\nu + (\gamma'_\nu + \delta'_\nu)i\right)$$

Man findet nun:

(20) $$\begin{aligned} \gamma_\nu - \delta_\nu + (\gamma'_\nu + \delta'_\nu)i &= \sum_0^\nu{}^\lambda \left(\alpha_\lambda \alpha'_{\nu-\lambda} - \beta_\lambda \beta'_{\nu-\lambda} + (\alpha_\lambda \beta'_{\nu-\lambda} + \beta_\lambda \alpha'_{\nu-\lambda})i\right) \\ &= \sum_0^\nu{}^\lambda (\alpha_\lambda + \beta_\lambda i)(\alpha'_{\nu-\lambda} + \beta'_{\nu-\lambda} i) \\ &= \sum_0^\nu{}^\lambda a_\lambda a'_{\nu-\lambda} \ \text{d. h.} = c_\nu \quad \text{(s. Gl. (14))}, \end{aligned}$$

sodaß die Gleichung (19) in die folgende übergeht:

(21) $$ss' = \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu, \ \text{wo: } c_\nu = a_0 a'_\nu + a_1 a'_{\nu-1} + \cdots + a_\nu a'_0,$$

also in die Cauchysche Multiplikationsformel. Mithin ergibt sich:

Für die Anwendbarkeit der Cauchyschen Formel (14) auf die Multiplikation zweier konvergenter Reihen $\sum(\alpha_\nu + \beta_\nu i)$ *und* $\sum(\alpha'_\nu + \beta'_\nu i)$ *ist* ***hinreichend*** *die* ***Konvergenz*** *der vier in (18) mit* $\sum\gamma_\nu$, $\sum\delta_\nu$, $\sum\gamma'_\nu$, $\sum\delta'_\nu$ *bezeichneten Reihen (anders ausgesprochen, die Anwendbarkeit der Multiplikationsregel auf die vier in (18) auftretenden Produkte reeller Reihen)* [1])

Nun ist aber, wie ein Blick auf die vier in (18) auftretenden Reihenprodukte zeigt, nach dem Satze von § 66, Nr 3, S. 488, die letztere Forderung schon erfüllt, wenn *eins* der beiden durch die Summen σ, τ bzw. σ', τ' charakterisierten Reihenpaare, also schließlich *eine* der beiden Reihen $\sum a_\nu$, $\sum a'_\nu$ *absolut* konvergiert Somit findet man:

Die ***Cauchysche*** *Multiplikationsregel (14) ist allemal gültig, wenn mindestens eine der beiden Reihen* $\sum a_\nu$, $\sum a'_\nu$ ***absolut*** *konvergiert.*

Dagegen würde man auf diesem Wege *nicht* erschließen können, daß schon die *Konvergenz* der Reihe $\sum c_\nu$ für die Anwendbarkeit der Multiplikationsregel (14) ausreicht (was tatsächlich der Fall ist und in § 79, Nr. 4 sogar in vervollständigter Form sich noch ergeben wird). Denn aus der Konvergenz von $\sum c_\nu$ würde nach (20) nur diejenige der beiden Reihen $\sum(\gamma_\nu - \delta_\nu)$ und $\sum(\gamma'_\nu + \delta'_\nu)$, nicht aber die für die vorstehenden Schlüsse erforderliche Konvergenz der vier Reihen $\sum\gamma_\nu \cdots \sum\delta'_\nu$ hervorgehen.

Ist die Reihe $\sum|\alpha_\nu + \beta_\nu i|$ *divergent*, so soll die Reihe $\sum(\alpha_\nu + \beta_\nu i)$ wiederum (vgl § 58, Nr. 1, S 406) *absolut divergent* heißen (z. B. $\sum(\alpha + \beta i)^\nu$ für $|\alpha + \beta i| \geqq 1$). Sie kann dann noch *bedingt konvergieren.* Hierzu ist offenbar *notwendig,* daß $\lim\limits_{\nu\to\infty}(\alpha_\nu + \beta_\nu i) = 0$, *notwendig und hinreichend,* daß die Reihen $\sum\alpha_\nu$, $\sum\beta_\nu$ zwar *beide konvergieren,* aber mindestens *eine* von ihnen nur *bedingt.*

Der Vollständigkeit halber sei noch bemerkt, daß infolge der formalen Übereinstimmung der Konvergenzdefinition für Reihen mit *reellen* und mit *komplexen* Gliedern (vgl. § 44, S. 294, Ungl. (5) und § 75 S. 574, Ungl (3)) die in § 44, Nr. 6, S. 302, erwähnten Eigenschaften konvergenter Reihen mit *reellen* Gliedern ohne weiteres auf solche mit *komplexen* Gliedern *übertragbar sind.*

---

1) *Hinreichende* Bedingungen hierfür wurden, außer der im Text benützten, in § 66, Nr. 4—6 abgeleitet.

§ 76. Kriterien für die absolute Divergenz und Konvergenz von Reihen mit komplexen Gliedern.

1. Da die *absolute Divergenz* bzw. *Konvergenz* einer Reihe von der Form $\sum a_\nu = \sum(\alpha_\nu + \beta_\nu i)$ mit derjenigen der Reihe $\sum |a_\nu|$ identisch ist, so hat man zu deren Ermittlung lediglich die früher für Reihen mit *positiven* Gliedern entwickelten Kriterien auf den Ausdruck $|a_\nu| = \sqrt{\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2}$ anzuwenden [1]) Dabei wird es offenbar für die Ausführung der notwendigen Rechnung zumeist zweckmäßiger erscheinen, jene Kriterien so umzugestalten, daß die etwas unbequeme *Quadratwurzel* daraus verschwindet, d. h. daß die zu prüfenden Grenzausdrücke nicht $|a_\nu|$ selbst, sondern nur $|a_\nu|^2$ enthalten.

Da nun (unter a, A, D_ν, C_ν reelle positive Zahlen verstanden) die Ungleichungen:

$$|a_{\nu+p}| > \frac{a}{D_\nu} \quad \text{bzw.} \quad |a_{\nu+p}| < \frac{A}{C_\nu}$$

stets die folgenden nach sich ziehen:

$$|a_{\nu+p}|^2 > \frac{a^2}{D_\nu^2} \quad \text{bzw.} \quad |a_{\nu+p}|^2 < \frac{A^2}{C_\nu^2},$$

und umgekehrt, so kann man, wenn wieder D_ν^{-1} das allgemeine Glied einer *divergenten*, C_ν^{-1} dasjenige einer *konvergenten* Reihe bedeutet, die früheren Kriterien *erster* Art (s. § 47, Nr. 1, Gl. (3), S. 318) ohne weiteres durch die folgenden ersetzen:

$$(1) \qquad \begin{cases} \varliminf\limits_{\nu\to\infty} D_\nu^2 \cdot |a_{\nu+p}|^2 > 0: & \textit{Divergenz}, \\ \varlimsup\limits_{\nu\to\infty} C_\nu^2 \cdot |a_{\nu+p}|^2 < \infty: & \textit{Konvergenz}. \end{cases}$$

Und da analog aus den Ungleichungen:

$$\left|\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}\right| < \frac{D_{\nu+1}}{D_\nu} \quad \text{bzw.} \quad \left|\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}\right| > \frac{C_{\nu+1}}{C_\nu}$$

stets folgt:

$$\left|\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}\right|^2 < \frac{D_{\nu+1}^2}{D_\nu^2} \quad \text{bzw.} \quad \left|\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}\right|^2 > \frac{C_{\nu+1}^2}{C_\nu^2}$$

---

1) Für die Feststellung der *absoluten Divergenz* oder *Konvergenz* einer Reihe $\sum(\alpha_\nu + \beta_\nu i)$ wird sich die Zerlegung in die beiden Reihen $\sum\alpha_\nu$, $\sum\beta_\nu$ im allgemeinen *nicht* als zweckmäßig erweisen, zumal schon die Ausführung dieser Zerlegung oft auf Schwierigkeiten oder doch auf große Umständlichkeiten führt Man bemerke z. B., daß aus der überaus einfachen Reihe $\sum(\alpha + \beta i)^\nu$ durch Entwicklung der einzelnen Glieder nach dem binomischen Satze und Trennung der reellen und imaginären Bestandteile zwei Reihen von recht verwickelter Art resultieren würden, während die direkte Untersuchung der Reihe der absoluten Beträge, d. h. der Reihe $\sum|\alpha + \beta i|^\nu$ sofort zum Ziele führt (s Nr. 2 und 4 des vorigen Paragraphen).

— *vice versa* —, so lassen sich die Kriterien *zweiter* Art (vgl S. 321, Gl. (12)) auf die Form bringen:

$$(2)\quad \begin{cases} \overline{\lim\limits_{\nu \to \infty}} \left(D_\nu^2 \cdot \left| \dfrac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} \right|^2 - D_{\nu+1}^2 \right) < 0: \text{ Divergenz,} \\ \underline{\lim\limits_{\nu \to \infty}} \left(C_\nu^2 \cdot \left| \dfrac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} \right|^2 - C_{\nu+1}^2 \right) > 0: \text{ Konvergenz.} \end{cases}$$

2. Bezüglich des so resultierenden *Konvergenz*kriteriums ist aber folgendes zu bemerken. Während man das *Konvergenz*kriterium in seiner *ursprünglichen* Gestalt, nämlich:

$$(3)\qquad \underline{\lim\limits_{\nu \to \infty}} \left(C_\nu \cdot \left| \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} \right| - C_{\nu+1} \right) > 0: \text{ Konvergenz,}$$

auf Grund einer in § 54, Nr., 1 S. 378, gelehrten Umformung durch ein solches von der Form:

$$(4)\qquad \underline{\lim\limits_{\nu \to \infty}} \left(D_\nu \cdot \left| \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} \right| - D_{\nu+1} \right) > 0: \text{ Konvergenz,}$$

ersetzen und auf diese Weise mit dem entsprechenden *Divergenz*kriterium vereinigen kann, so ist eine derartige Transformation auf das *Konvergenz*kriterium (2) *nicht ohne weiteres anwendbar*, mit anderen Worten, man darf aus der Beziehung:

$$\underline{\lim\limits_{\nu \to \infty}} \left(D_\nu^2 \left| \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} \right|^2 - D_{\nu+1}^2 \right) > 0$$

nicht allemal auf die *Konvergenz* von $\sum |a_\nu|$ schließen Setzt man nämlich:

$$(5)\quad \begin{cases} l_\nu = D_\nu \cdot \left| \dfrac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} \right| - D_{\nu+1}, \\ l'_\nu = D_\nu^2 \cdot \left| \dfrac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} \right|^2 - D_{\nu+1}^2 = l_\nu \cdot \left(D_\nu \cdot \left| \dfrac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} \right| + D_{\nu+1} \right), \end{cases}$$

so erkennt man, daß l'_ν sich von l_ν um einen Faktor unterscheidet, der allemal dann, wenn $\lim\limits_{\nu \to \infty} D_\nu = \infty$ — was ja geradezu die Regel ist[1]) — gleichzeitig mit ν positiv ins Unendliche wächst. Daraus folgt aber, daß im Falle $\underline{\lim\limits_{\nu \to \infty}}\, l'_\nu > 0$ immerhin $\underline{\lim\limits_{\nu \to \infty}}\, l_\nu = 0$ werden und die Reihe $\sum |a_\nu|$ also *divergieren* kann.[2])

1) Die Annahme eines *endlichen* $\lim\limits_{\nu \to \infty} D_\nu > 0$ liefert lediglich das Cauchysche Fundamentalkriterium.

2) Beispiel. Man setze.

$$|a_{\nu+p}| = \frac{1}{\nu \cdot lg\,\nu}, \quad D_\nu = \nu,$$

also

$$l_\nu = (\nu + 1) \left(\frac{lg\,(\nu+1)}{lg\,\nu} - 1 \right)$$

Um diesem Übelstande abzuhelfen, führen wir statt des Ausdruckes l'_ν den folgenden ein:

$$(6)\qquad \bar{l}_\nu = D_\nu \cdot \left|\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}\right|^2 - \frac{D^2_{\nu+1}}{D_\nu} \begin{cases} = \dfrac{1}{D_\nu}\cdot l'_\nu \\ = l_\nu \left(\left|\dfrac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}\right| + \dfrac{D_{\nu+1}}{D_\nu}\right), \end{cases}$$

welcher ja gleichfalls nur $\left|\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}\right|^2$, nicht aber $\left|\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}\right|$ enthält, im übrigen aber, bei einer sogleich anzugebenden, durchaus unerheblichen Einschränkung in der Wahl der D_ν, für die Beurteilung der *Konvergens* von $\sum|a_\nu|$ genau dasselbe leistet wie l_ν. Angenommen, man habe:

$$(7)\qquad \varliminf_{\nu\to\infty} \bar{l}_\nu > 0,$$

so muß schon von einem bestimmten n ab eine Beziehung bestehen:

$$\bar{l}_\nu \geqq \varrho \text{ für } \nu \geqq n,$$

wo ϱ eine *positive* Zahl bedeutet. Man hat somit auf Grund der ersten Gleichung (6) für $\nu \geqq n$:

$$D^2_\nu \cdot \left|\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}\right|^2 \geqq D^2_{\nu+1} + \varrho \cdot D_\nu,$$

und, wenn man diese Ungleichung in die $\frac{1}{2}^{\text{te}}$ Potenz erhebt, mit Berücksichtigung von § 30, S. 180, Ungl. (Ia):

$$\begin{aligned} D_\nu \cdot \left|\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}\right| &\geqq D_{\nu+1}\left(1 + \varrho \cdot \frac{D_\nu}{D^2_{\nu+1}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &> D_{\nu+1}\left(1 + \frac{1}{2}\varrho \cdot \frac{D_\nu}{D^2_{\nu+1}} \cdot \frac{1}{1+\varrho\cdot\dfrac{D_\nu}{D^2_{\nu+1}}}\right) \end{aligned}$$

und daher:

$$(8)\qquad l_\nu > \frac{1}{2}\varrho \cdot \frac{D_\nu}{D_{\nu+1}} \cdot \frac{1}{1+\varrho\cdot\dfrac{D_\nu}{D^2_{\nu+1}}}$$

---

und daher (s § 38, S. 247, Gl. (36 a)):

$$\lim_{\nu\to\infty} l_\nu = 0.$$

Dagegen:

$$\begin{aligned} l'_\nu &= (\nu+1)^2\left(\left(\frac{lg(\nu+1)}{lg\nu}\right)^2 - 1\right) \\ &= \frac{(\nu+1)^2}{(lg\,\nu)^2}\left(lg(\nu+1) - lg\nu\right)\left(lg(\nu+1) + lg\nu\right) \\ &> 2\frac{(\nu+1)^2}{lg\,\nu}\cdot lg\left(1+\frac{1}{\nu}\right) \\ &> 2\cdot\frac{\nu+1}{lg\,\nu} \quad \text{(s. § 34, S 206, Ungl (3))}, \end{aligned}$$

also:

$$\lim_{\nu\to\infty} l'_\nu = +\infty.$$

Nichtsdestoweniger ist $\sum|a_\nu|$ *divergent.*

Unterwirft man jetzt die D_ν den für die praktische Kriterienbildung zweckmäßigen Beschränkungen:

$$(9) \qquad \underline{\lim}_{\nu\to\infty} D_\nu > 0, \qquad D_\nu \cong D_{\nu+1},$$

so folgt aus (8), daß gleichzeitig mit der Beziehung (7) auch:

$$(10) \qquad \underline{\lim}_{\nu\to\infty} l_\nu > 0$$

wird, sodaß also aus dem Bestehen der Relation (7) mit Sicherheit auf die *Konvergenz* von $\sum |a_\nu|$ geschlossen werden darf. Übrigens folgt dann auch umgekehrt aus der Existenz von Ungl. (10) stets diejenige von (7): denn der Faktor, um welchen sich $\bar{l}_\nu$ von l_ν unterscheidet (s. Gl. (6)), bleibt stets oberhalb einer festen *positiven* Zahl. Die Konvergenzkriterien (7) und (10) haben also in diesem Falle *vollkommen gleiche* Tragweite.

Da anderseits die Beziehung:

$$(11) \qquad \overline{\lim}_{\nu\to\infty} \bar{l}_\nu < 0$$

offenbar stets die Existenz der *Divergenz*bedingung (2) nach sich zieht[1]), so erhält man schließlich das folgende *disjunktive* Doppelkriterium:

$$(12) \qquad \overline{\underline{\lim}}_{\nu\to\infty} \bar{l}_\nu = \overline{\underline{\lim}}_{\nu\to\infty} \left(D_\nu \cdot \left| \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} \right|^2 - \frac{D^2_{\nu+1}}{D_\nu} \right) \begin{cases} < 0: \text{ Divergenz,} \\ > 0: \text{ Konvergenz.} \end{cases}$$

Setzt man hier zunächst wiederum (vgl. § 54, S. 381, Gl. (12)ff.):

$$(13) \qquad D_\nu = \frac{1}{M_\nu - M_{\nu-1}} \quad (\text{wo: } M_\nu > M_{\nu-1} > 0, \ \lim_{\nu\to\infty} M_\nu = +\infty),$$

so genügen die M_ν, wegen $D_\nu \cong D_{\nu-1}$, nach § 54, S. 381, Fußnote, der Bedingung:

$$(14) \qquad M_\nu \cong M_{\nu-1}.$$

Des weiteren gewinnt man durch Einführung von:

$$(15) \qquad \Delta_\nu^{(\varkappa)} = \frac{L_\varkappa(M_\nu)}{M_\nu - M_{\nu-1}} = L_\varkappa(M_\nu) \cdot D_\nu \quad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots)$$

---

1) Aber *nicht* umgekehrt! Die Bedingung (2) läßt sich ja folgendermaßen schreiben:

$$\overline{\lim}_{\nu\to\infty} D_\nu \cdot \bar{l}_\nu < 0.$$

In dem fast ausschließlich in Betracht kommenden Falle: $\lim_{\nu\to\infty} D_\nu = \infty$ *kann* aber eventuell $\overline{\lim}_{\nu\to\infty} D_\nu \cdot \bar{l}_\nu < 0$ ausfallen, wenn $\overline{\lim}_{\nu\to\infty} \bar{l}_\nu = 0$ wird. Wenn also das auf $\bar{l}_\nu$ bezügliche Divergenzkriterium in dieser Weise *versagt*, so steht es frei, auf die etwas vorteilhaftere Divergenzbedingung (2) zu rekurrieren.

an Stelle von D_ν neben dem Anfangskriterium (12) die Kriterienskala.

$$(16)\quad \overline{\underline{\lim}}_{\nu\to\infty}\,\bar{\lambda}_\nu^{(\varkappa)} = \overline{\underline{\lim}}_{\nu\to\infty}\left(L_\varkappa(M_\nu)\cdot D_\nu\cdot\left|\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}\right|^2 - \frac{L_\varkappa(M_{\nu+1})^2\cdot D_{\nu+1}^2}{L_\varkappa(M_\nu)\cdot D_\nu}\right)\begin{cases}<0:\ \textit{Divergenz},\\ >0:\ \textit{Konvergenz}\end{cases}$$

3. Die Kriterien der Skala (16) gestatten eine für ihre praktische Verwertung zweckmäßige Umformung (entsprechend der Transformation der Kriterienskala (K_2), § 54, S. 382, in die Skala (L), S. 383).

Man hat zunächst, wenn man zur Abkürzung $\left|\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}\right| = q_\nu$ setzt:

$$D_\nu\,\bar{l}_\nu = D_\nu^2\cdot q_\nu^2 - D_{\nu+1}^2$$

$$D_\nu\,\bar{\lambda}_\nu^{(0)} = M_\nu\cdot D_\nu^2 q_\nu^2 - \frac{M_{\nu+1}^2 D_{\nu+1}^2}{M_\nu}$$

und daher:

$$D_\nu(\bar{\lambda}_\nu^{(0)} - M_\nu\,\bar{l}_\nu) = -D_{\nu+1}^2\cdot\frac{M_{\nu+1}^2 - M_\nu^2}{M_\nu}$$

$$= -D_{\nu+1}\cdot\frac{M_{\nu+1}+M_\nu}{M_\nu}\quad\left(\text{wegen: } D_{\nu+1} = \frac{1}{M_{\nu+1}-M_\nu}\right).$$

Mithin ergibt sich:

$$(17)\quad \overline{\underline{\lim}}_{\nu\to\infty}\,\bar{\lambda}_\nu^{(0)} = \overline{\underline{\lim}}_{\nu\to\infty}\,M_\nu\,\bar{l}_\nu - 2\quad\left(\text{da: }\lim_{\nu\to\infty}\frac{D_{\nu+1}}{D_\nu} = 1,\ \lim_{\nu\to\infty}\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu} = 1\right),$$

wobei wiederum das Zeichen $\overline{\underline{\lim}}_{\nu\to\infty}$ so zu verstehen ist, daß gleichzeitig auf *beiden* Seiten der Gleichung entweder $\underline{\lim}_{\nu\to\infty}$ oder $\overline{\lim}_{\nu\to\infty}$ genommen werden soll.

Um das analoge Resultat für $\overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty}\,\bar{\lambda}_\nu^{(\varkappa+1)}$ ($\varkappa = 0, 1, 2, \cdots$) abzuleiten, hat man:

$$L_\varkappa(M_\nu)\cdot D_\nu\cdot\bar{\lambda}_\nu^{(\varkappa)} = L_\varkappa(M_\nu)^2\cdot D_\nu^2\cdot q_\nu^2 - L_\varkappa(M_{\nu+1})^2\cdot D_{\nu+1}^2$$

$$L_\varkappa(M_\nu)\cdot D_\nu\cdot\bar{\lambda}_\nu^{(\varkappa+1)} = lg_{\varkappa+1}M_\nu\cdot L_\varkappa(M_\nu)^2\cdot D_\nu^2 q_\nu^2 - \frac{L_{\varkappa+1}(M_{\nu+1})^2\cdot D_{\nu+1}^2}{lg_{\varkappa+1}M_\nu}$$

und daher:

$$L_\varkappa(M_\nu)\cdot D_\nu\left(\bar{\lambda}_\nu^{(\varkappa+1)} - lg_{\varkappa+1}M_\nu\cdot\bar{\lambda}_\nu^{(\varkappa)}\right) = -L_\varkappa(M_{\nu+1})^2\cdot D_{\nu+1}^2\,\frac{lg_{\varkappa+1}^2 M_{\nu+1} - lg_{\varkappa+1}^2 M_\nu}{lg_{\varkappa+1}M_\nu}$$

d. h.:

$$\bar{\lambda}_\nu^{(\varkappa+1)} - lg_{\varkappa+1}M_\nu\cdot\bar{\lambda}_\nu^{(\varkappa)}$$

$$= -\frac{L_\varkappa(M_{\nu+1})\,D_{\nu+1}}{L_\varkappa(M_\nu)\,D_\nu}\cdot L_\varkappa(M_{\nu+1})\,D_{\nu+1}\,(lg_{\varkappa+1}M_{\nu+1} - lg_{\varkappa+1}M_\nu)\cdot\frac{lg_{\varkappa+1}M_{\nu+1} + lg_{\varkappa+1}M_\nu}{lg_{\varkappa+1}M_\nu}.$$

Nun ist aber:

$$lg_{\varkappa+1} M_{\nu+1} - lg_{\varkappa+1} M_\nu \cong \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{L_\varkappa(M_{\nu+1})} = \frac{1}{L_\varkappa(M_{\nu+1}) D_{\nu+1}}$$ (s. § 38, S. 247, Gl. (34)), sodaß sich schließlich ergibt:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \bar{\lambda}_\nu^{(\varkappa+1)} = \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, lg_{\varkappa+1} M_\nu \cdot \bar{\lambda}_\nu^{(\varkappa)} - 2. \tag{18}$$

Mit Berücksichtigung der Relationen (17), (18) lassen sich also die Kriterien der Skala (16) nunmehr durch die folgenden ersetzen:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, M_\nu \cdot \bar{l}_\nu \begin{cases} < 1: \textit{Divergenz}, \\ > 1: \textit{Konvergenz} \end{cases} \\ &\frac{1}{2}\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, lg_{\varkappa+1} M_\nu \cdot \bar{\lambda}_\nu^{(\varkappa)} \begin{cases} < 1: \textit{Divergenz}, \\ > 1: \textit{Konvergenz}. \end{cases} \end{aligned}\right. \tag{19}$$

D. h.:

$$\left\{\begin{aligned} &\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \frac{M_\nu}{2 D_\nu}\left(D_\nu^2 \cdot \left|\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}\right|^2 - D_{\nu+1}^2\right) \begin{cases} < 1: \textit{Divergenz}, \\ > 1: \textit{Konvergenz}. \end{cases} \\ &\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \frac{lg_{\varkappa+1} M_\nu}{2 L_\varkappa(M_\nu) \cdot D_\nu}\left(L_\varkappa(M_\nu)^2 \cdot D_\nu^2 \cdot \left|\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}\right|^2 - L_\varkappa(M_{\nu+1})^2 D_{\nu+1}^2\right) \begin{cases} < 1: \textit{Divergenz}, \\ > 1: \textit{Konvergenz}, \end{cases} \\ &(\varkappa = 0, 1, 2, \cdots). \end{aligned}\right. \tag{20}$$

4. Wählt man wiederum speziell $M_\nu = \nu$, also $D_\nu = 1$, so erhält man aus (12) und (20) diejenigen Kriterienformen, welche dem Cauchyschen, Raabeschen und den Bertrandschen Kriterien (§ 54, Nr. 6, S. 385) entsprechen, nämlich:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\left(\left|\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}\right|^2 - 1\right) \begin{cases} < 0: \textit{Divergenz}, \\ > 0: \textit{Konvergenz}. \end{cases} \tag{21}$$

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \frac{\nu}{2}\left(\left|\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}\right|^2 - 1\right) \begin{cases} < 1: \textit{Divergenz}, \\ > 1: \textit{Konvergenz}. \end{cases} \tag{22}$$

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \frac{lg_{\varkappa+1}\nu}{2 L_\varkappa(\nu)}\left(L_\varkappa(\nu)^2 \left|\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}\right|^2 - L_\varkappa(\nu+1)^2\right) \begin{cases} < 1: \textit{Divergenz}, \\ > 1: \textit{Konvergenz}. \end{cases} \quad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots). \tag{23}$$

Für die hauptsächlichsten *Anwendungen* erweisen sich die Kriterien (21), (22) in Verbindung mit dem Anfangskriterium (23) als ausreichend. Das letztere mag aus diesem Grunde noch explizite angeschrieben werden:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \frac{lg\,\nu}{2\nu}\left(\nu^2 \cdot \left|\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}\right|^2 - (\nu+1)^2\right) \begin{cases} < 1: \textit{Divergenz}, \\ > 1: \textit{Konvergenz}. \end{cases} \tag{23a}$$

5. Wir wollen die eben bezeichneten Kriterien benützen, um wiederum die Beschaffenheit einer Reihe festzustellen, deren Glieder durch die Beziehung charakterisiert sind (vgl. § 55, S. 389, Gl. (16)):

$$(24)\qquad \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1 + \frac{k}{\nu} + \frac{r_\nu}{\nu^2}$$
$$= 1 + \frac{\varkappa + \lambda i}{\nu} + \frac{\varrho_\nu + \sigma_\nu i}{\nu^2}.$$

Dabei bedeutet wieder $k = \varkappa + \lambda i$ eine bestimmte, von ν unabhängige Zahl, während r_ν mit ν variieren kann, jedoch so, daß $|r_\nu|$ stets *unter einer endlichen Grenze* bleibt, also $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} |r_\nu| < \infty$ ausfällt Man hat sodann:

$$(25)\qquad \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 = \left(1 + \frac{\varkappa}{\nu} + \frac{\varrho_\nu}{\nu^2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\nu} + \frac{\sigma_\nu}{\nu^2}\right)^2$$
$$= 1 + \frac{2\varkappa}{\nu} + \frac{R_\nu}{\nu^2},$$

wo:

$$(26)\qquad R_\nu = \varkappa^2 + \lambda^2 + 2\varrho_\nu + 2\,\frac{\varkappa\varrho_\nu + \lambda\sigma_\nu}{\nu} + \frac{\varrho_\nu^2 + \sigma_\nu^2}{\nu^2},$$

sodaß auch:

$$(26\text{a})\qquad \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, R_\nu = \varkappa^2 + \lambda^2 + 2\,\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \varrho_\nu$$

endlich ausfällt. Die Anwendung des Kriteriums (22) ergibt nun:

$$(27)\qquad \lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu}{2}\left(\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - 1\right) = \lim_{\nu\to\infty}\left(\varkappa + \frac{R_\nu}{2\nu}\right)$$
$$= \varkappa,$$

und somit *divergiert* die Reihe $\sum |a_\nu|$, falls $\varkappa < 1$, sie *konvergiert*, falls $\varkappa > 1$.

Im Falle $\varkappa = 1$ *versagt* das betreffende Kriterium, sodaß man also zu dem Kriterium (23a) übergehen muß. Man hat nun nach Gl. (25):

$$\nu^2 \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 = \nu^2 + 2\nu + R_\nu \quad (\text{da ja: } \varkappa = 1),$$

also:

$$\nu^2 \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - (\nu+1)^2 = R_\nu - 1,$$

und daher:

$$(28)\qquad \lim_{\nu\to\infty} \frac{lg\,\nu}{2\nu}\left(\nu^2 \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - (\nu+1)^2\right) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{lg\,\nu \cdot (R_\nu - 1)}{2\nu} = 0,$$

sodaß also mit Rücksicht auf (23a) $\sum |a_\nu|$ in diesem Falle als *divergent* erkannt wird.

Übrigens lehren die Gleichungen (27) und (28), daß das obige Gesamtresultat keine Änderung erleidet, auch wenn R_ν mit ν positiv ins Unendliche wächst, sofern nur:

$$R_\nu \prec \frac{\nu}{lg\,\nu} \quad \left(\text{d. h. } \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{lg\,\nu \cdot R_\nu}{\nu} = 0\right).[1]$$

Und Gl. (26) zeigt sodann, daß diese Bedingung erfüllt ist, wenn $\varrho_\nu \prec \frac{\nu}{lg\,\nu}$, $\sigma_\nu^2 \prec \frac{\nu^2}{lg\,\nu}$, also schließlich, wenn $|r_\nu| \prec \frac{\nu}{lg\,\nu}$.

Wir finden also:

Die Reihe $\sum a_\nu$, *wo:* $\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1 + \frac{\varkappa + \lambda i}{\nu} + \frac{r_\nu}{\nu^2}$, und: $|r_\nu| \prec \frac{\nu}{lg\,\nu}$, *ist absolut konvergent für* $\varkappa > 1$, *absolut divergent für* $\varkappa \leqq 1$.

6 Das vorstehende Resultat[2]) ist offenbar die unmittelbare Verallgemeinerung des in § 55, Nr. 2 für Reihen mit *positiven* Gliedern abgeleiteten. Wir wollen dasselbe wiederum auf die *hypergeometrische* Reihe, also auf diejenige mit dem allgemeinen Gliede:

$$(29) \qquad a_\nu = \frac{a(a+1)}{1 \quad 2} \frac{(a+\nu-1) \cdot b(b+1)}{\nu \qquad c(c+1)} \frac{(b+\nu-1)}{\cdot (c+\nu-1)}$$

anwenden, wo jetzt a, b, c beliebig *komplex* sein können (immer nur mit Ausschluß *ganzzahliger negativer* Werte von a, b, c). Man hat hier zunächst:

$$(30) \qquad \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = \frac{(\nu+1)(\nu+c)}{(\nu+a)(\nu+b)} = \frac{\nu^2 + (1+c)\nu + c}{\nu^2 + (a+b)\nu + ab}.$$

Setzt man sodann:

$$\frac{\nu^2 + (1+c)\nu + c}{\nu^2 + (a+b)\nu + ab} = 1 + \frac{k}{\nu} + \frac{r_\nu}{\nu^2},$$

so ergibt sich durch Multiplikation mit $\left(\nu^2 + (a+b)\nu + ab\right)$:

$$(1+c-a-b)\nu + (c-ab) = k\nu + (a+b)\cdot k + \frac{ab}{\nu}k + \left(1 + \frac{a+b}{\nu} + \frac{ab}{\nu^2}\right) r_\nu$$

und daher:

---

1) Das Resultat für $\varkappa \gtrless 1$ bleibt nach Gl. (27) sogar gültig, wenn nur: $R \prec \nu$, d. h. nach Gl. (26): $\varrho_\nu \prec \nu$, $\sigma_\nu^2 \prec \nu^2$, also schließlich: $|r_\nu| \prec \nu$.

2) Dasselbe bildet — abgesehen von einem unwesentlichen Unterschiede in der Form — den Hauptbestandteil der von *Weierstraß* auf anderem Wege abgeleiteten Kriterien. Der noch fehlende Teil, welcher sich auf die *Divergenz* von $\sum a_\nu$ (schlechthin genommen) für $\varkappa \leqq 1$ und auf die *bedingte Konvergenz* von $\sum (-1)^\nu a_\nu$ für $0 < \varkappa \leqq 1$ bezieht, wird an späterer Stelle (§ 87, Nr. 3—5) mitgeteilt werden.

$$(31)\qquad \begin{cases} k = 1 + c - (a+b) \\ r_\nu = \dfrac{c - ab - (a+b)k - \dfrac{ab}{\nu}k}{1 + \dfrac{a+b}{\nu} + \dfrac{ab}{\nu^2}}, \quad \lim\limits_{\nu \to \infty} r_\nu = c - ab - (a+b)k. \end{cases}$$

Die Reihe $\sum |a_\nu|$ *konvergiert* also, wenn $\varkappa$ d. h. der *reelle* Teil von $1 + c - (a+b)$ *größer* als 1, d. h. wenn:

$$(32\text{a})\qquad \Re\big(c - (a+b)\big) > 0$$

ist; sie *divergiert*, wenn:

$$(32\text{b})\qquad \Re\big(c - (a+b)\big) \leqq 0.$$

In diesem Resultate ist wiederum das früher (§ 55, Nr. 1, S. 388) für *reelle* Werte von a, b, c gefundene als spezieller Fall enthalten.

Setzt man speziell $b = c$ und ersetzt a durch $-a$, so wird:

$$33)\qquad a_\nu = (-1)^\nu \cdot \frac{a(a-1)\cdot\ \ (a-\nu+1)}{1\cdot 2\cdot\ \ \nu} = (-1)^\nu (a)_\nu,$$

wo (vgl § 74, Nr. 2, S. 572, Gl. (15)):

$$(34)\qquad (a)_\nu = \frac{a(a-1)\cdot\cdot\ (a-\nu+1)}{1\ \ 2\ \cdot\ \nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ \cdots)$$

und speziell:

$$(34\text{a})\qquad (a)_0 = 1.$$

Während die im Falle eines positiven ganzzahligen $a = n$ resultierenden Binomialkoeffizienten $(n)_\nu$ für $\nu \geqq n+1$ zu *Null* werden, bilden die $(a)_\nu$, sobald a *keine* natürliche Zahl vorstellt (im übrigen kann a jede beliebige komplexe, insbesondere auch reelle Zahl bedeuten), eine *unbegrenzt* fortsetzbare Folge *von Null verschiedener* Zahlen, und an die Stelle der mit der n^{ten} Potenz von x abbrechenden binomischen Entwicklung $\sum\limits_0^n {}_\nu (n)_\nu x^\nu$ tritt die unendliche *binomische Reihe* $\sum\limits_0^\infty {}_\nu (a)_\nu x^\nu$. Da $\lim\limits_{\nu\to\infty} \left|\dfrac{(a)_{\nu+1} x^{\nu+1}}{(a)_\nu x^\nu}\right| = |x|$, so *konvergiert* dieselbe bei beliebig komplexen x, falls $|x| < 1$, sie *divergiert*, wenn $|x| > 1$. Die für $x = 1$ resultierende Reihe $\sum (a)_\nu$ ist nach (32a, b) (wenn man daselbst $b = c$ setzt und a durch $-a$ ersetzt) noch *absolut konvergent*, wenn

$$(35\text{a})\qquad \Re(a) > 0,$$

absolut divergent, wenn:

$$(35\text{b})\qquad \Re(a) \leqq 0.$$

Danach konvergiert im Falle (35 a) auch die Reihe $\sum_0^\infty {}_\nu (a)_\nu x^\nu$ noch *absolut* für $|x| = 1$. Es wird sich später zeigen, daß sie für $x = 1$, ja sogar für $|x| = 1$ mit einziger Ausnahme von $x = -1$, noch *bedingt konvergiert*, wenn:

$$(35c) \qquad -1 < \Re(a) \leqq 0$$

(in welchem Falle ja $\sum_0^\infty {}_\nu |(a)_\nu|$ bereits divergiert).

§ 77. Abelsche Transformation. — Ein Kriterium für effektive Konvergenz.

1. Als nützliches Hilfsmittel für die Feststellung *effektiver*, d. h. eventuell nur *bedingter* Konvergenz erweist sich auch für Reihen mit komplexen Gliedern die in § 59, Nr. 4, S. 416, erwähnte *Abelsche Transformation*. Bedeuten a_ν, b_ν, $(\nu = 0, 1, \cdots n)$ beliebige komplexe Zahlen und setzt man:

$$(1) \qquad b_0 + b_1 + \cdots + b_\nu = B_\nu \quad (\nu = 0, 1, \cdots n),$$

so ergibt sich genau so wie a. a. O. (S. 416, Gl. (15)) die Beziehung:

$$(2) \qquad \sum_0^n {}_\nu a_\nu b_\nu = \sum_0^{n-1} {}_\nu (a_\nu - a_{\nu+1}) \cdot B_\nu + a_n B_n.$$

Sind nun die Folgen (a_ν), (b_ν) unbegrenzt fortsetzbar, so kann diese Transformationsgleichung zur Feststellung der Konvergenz von $\sum_0^\infty {}_\nu a_\nu b_\nu$ dienen, falls $\sum_0^\infty {}_\nu (a_\nu - a_{\nu+1}) \cdot B_\nu$ *konvergiert* und $\lim_{n\to\infty} a_n B_n$ eine bestimmte Zahl (inkl. 0) vorstellt. Unter dieser Voraussetzung findet man nämlich (vgl. S. 417, Gl. (16)):

$$(3) \qquad \sum_0^\infty {}_\nu a_\nu b_\nu = \sum_0^\infty {}_\nu (a_\nu - a_{\nu+1}) \cdot B_\nu + \lim_{n\to\infty} a_n B_n,$$

und es ergeben sich dann zur Erfüllung der gemachten Annahmen *wörtlich* dieselben *hinreichenden* Bedingungen[1]), wie a. a. O. für den Fall ausschließlich reeller Zahlen, sodaß man also schließlich wie dort den Satz gewinnt:

1) Das analoge gilt bezüglich der a. a. O. Nr. 6 angegebenen Erweiterung bei reellem M_ν, jedoch komplexen v_ν — worauf indessen hier nicht näher eingegangen werden soll.

Ist die Reihe $\sum(a_\nu - a_{\nu+1})$ absolut und $\sum b_\nu$ effektiv konvergent[1]), *so konvergiert die Reihe $\sum a_\nu b_\nu$ zum mindesten in der durch die Indizes vorgeschriebenen Anordnung. Im Falle $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$ besteht dieses Resultat auch dann noch, wenn $\sum b_\nu$ endlich unbestimmt ist*

2. Als Beispiel wollen wir die Reihe $\sum\limits_0^\infty{}_\nu a_\nu x^\nu$ unter folgenden Voraussetzungen betrachten: $\sum|a_\nu|$ sei *divergent*, $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$ und x eine komplexe Zahl mit dem absoluten Betrage $|x| \leqq 1$.

Aus der über die a_ν gemachten Voraussetzung folgt zunächst, daß

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\ \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 1 \tag{4}$$

sein muß. Denn aus $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\sqrt[\nu]{|a_\nu|} < 1$ würde auf Grund des Cauchyschen Fundamentalkriteriums erster Art (§ 50, S. 343, Ungl. (5b)) folgen, daß $\sum|a_\nu|$ *konvergiert*. Und wäre $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\sqrt[\nu]{|a_\nu|} > 1$, etwa $= 1 + 2\delta$, so hätte man für unendlich viele Indizes m_ν: $\sqrt[m_\nu]{|a_{m_\nu}|} > 1 + \delta$, d. h. $a_{m_\nu} > (1+\delta)^{m_\nu}$, also $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}|a_\nu| = +\infty$.

Somit gilt in der Tat die Beziehung (4) Daraus folgt weiter, daß

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\ \sqrt[\nu]{|a_\nu x^\nu|} = |x|, \text{ also } < 1 \text{ für } |x| < 1, \tag{5}$$

und daß daher, wieder nach dem genannten Cauchyschen Kriterium, die Reihe $\sum\limits_0^\infty{}_\nu a_\nu x^\nu$ für $|x|<1$ *absolut konvergiert*. Zur Untersuchung der Reihe für $|x| = 1$ soll dann der eben genannte Satz (für $b_\nu = x^\nu$) dienen. Man hat, außer wenn $x = 1$:

$$\sum_0^{n-1}{}_\nu x^\nu = \frac{1-x^n}{1-x} \tag{6}$$

und daher:

$$\left|\sum_0^{n-1}{}_\nu x^\nu\right| \leqq \frac{2}{|1-x|} \text{ für } |x| = 1, \text{ mit Ausschluß von } x = 1 \tag{7}$$

---

1) Ist $\sum b_\nu$ *absolut* konvergent, so ist für die Konvergenz von $\sum a_\nu b_\nu$ schon hinreichend, daß die $|a_\nu|$ unter einer endlichen Schranke bleiben

Die Reihe $\sum_0^\infty {}_\nu x^\nu$ ist somit für jedes von 1 verschiedene x mit dem absoluten Betrage 1 zwar nicht konvergent, aber nur *endlich* unbestimmt. Kommt also zu den bisher gemachten Voraussetzungen noch diejenige der *absoluten* Konvergenz von $\sum(a_\nu - a_{\nu+1})$, so liefert der am Schlusse der vorigen Nummer ausgesprochene Satz das folgende Ergebnis:

> *Ist* $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu = 0$, *die Reihe* $\sum |a_\nu|$ *zwar divergent, dagegen* $\sum |a_\nu - a_{\nu+1}|$ *konvergent, so konvergiert die Reihe* $\sum a_\nu x^\nu$ *für alle* x *mit dem absoluten Betrage* 1 *mit eventuellem Ausschluß von* $x = 1$.

Was das Verhalten der Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für $x = 1$, d. h. schließlich dasjenige der Reihe $\sum a_\nu$ betrifft, so kann auf Grund der vorliegenden Methode nichts darüber ausgesagt werden, da ja Gl (6) bzw. Ungl. (7) für $x = 1$ hinfällig wird. In der Tat kann die Reihe auch für $x = 1$ noch *konvergieren*[1]), wenn auch in den zumeist vorkommenden Fällen[2]) *Divergenz* stattzufinden pflegt Im übrigen ist in *jedem* Falle (d. h. auch dann, wenn $\sum a_\nu$ *konvergieren* sollte) die Konvergenz von $\sum a_\nu x^\nu$ für $|x| = 1$ nur eine *bedingte*, da ja $\sum |a_\nu|$ ausdrücklich als *divergent* vorausgesetzt wurde.

§ 78. Reduktion uneigentlich divergenter Reihen durch iterierte Mittelbildung und durch iterierte Summation. — Gleichheit der Tragweite und des Endresultats beider Methoden.

1. In § 74, Nr 1, S. 569, Gl (6) wurde gezeigt, daß für den *Grenzwert des arithmetischen Mittels* einer unbegrenzt fortsetzbaren Folge komplexer Zahlen u_ν $(\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ die Beziehung besteht:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1}(u_0 + u_1 + \cdots + u_n) = \lim_{n \to \infty} u_n, \tag{1}$$

falls $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$ im weiteren Sinne *existiert*, d. h. falls entweder dieser Limes eine *bestimmte Zahl* vorstellt oder die Folge der u_ν *eigentlich divergiert*.

Schreibt man in dieser Beziehung s_ν statt u_ν, wo:

$$s_\nu = a_0 + a_1 + \cdots + a_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \tag{2}$$

---

1) Beispiele im 2. Bande dieser Vorlesungen.

2) Einfaches Beispiel: $\sum_1^\infty {}_\nu \frac{1}{\nu} \cdot x^\nu$. Eine allgemeinere Kategorie von Reihen der fraglichen Beschaffenheit s. § 87, Nr. 5, S. 663.

und die a_ν wieder eine unbegrenzt fortsetzbare Folge komplexer Zahlen bedeuten, so nimmt dieselbe die Form an:

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}(s_0 + s_1 + \cdots + s_n) = \sum_{0}^{\infty}{}_\nu\, a_\nu$$

und gilt dann unter der Voraussetzung, daß die rechts stehende Reihe *konvergiert* oder *eigentlich divergiert.*

Andererseits ist ja, wie a. a. O. ausdrücklich hervorgehoben wurde, die Existenz (im weiteren Sinne) des in Gl. (1) *links* stehenden Grenzwertes sehr wohl möglich, auch wenn der *rechts* stehende *nicht* existiert. Insbesondere kann also auch in Gl. (3) der *links* stehende Grenzwert eine *bestimmte Zahl* vorstellen, auch wenn die Reihe auf der *rechten* Seite *divergiert,* und zwar, nach dem zuvor Gesagten, ausschließlich dann, wenn sie *uneigentlich* divergiert. Es liegt nahe, einen derartigen Grenzwert, der ja im Falle der *Konvergenz* mit der *Summe* der Reihe übereingestimmt hätte, im Falle ihrer *Divergenz* in geeignetem Zusammenhange als eine Art *Ersatz* für die *fehlende Summe* zu betrachten. Die *Zweckmäßigkeit* dieser Auffassung zeigt sich im wesentlichen erst in der Funktionenlehre, doch wird sich weiter unten (s. § 79, Nr. 4, S 610) auch hier ein passendes Beispiel dafür ergeben. Zunächst aber soll gezeigt werden, wie das auf diese Weise geschaffene Prinzip, einer (uneigentlich) *divergenten* Reihe eine *bestimmte Zahl* zuzuordnen, welche geeignetenfalls eine ähnliche Rolle spielt wie die *Summe* einer *konvergenten* Reihe, noch erweitert werden kann, falls auch der in Gl. (3) *links* stehende Grenzwert *nicht existiert.*

2. Wir wollen wieder, wie schon in § 74, Gl. (13), S. 571, das arithmetische Mittel der ersten $n+1$ Zahlen $u_0, u_1, \cdots u_n$ einer unbegrenzten komplexen Zahlenfolge (u_ν) mit $\mathfrak{M}(u_n)$ bezeichnen, sodaß also:

$$(4_1) \quad \mathfrak{M}(u_n) = \frac{1}{n+1}(u_0 + u_1 + \cdots + u_n) \quad \text{(also speziell: } \mathfrak{M}(u_0) = u_0\text{)}.$$

Bildet man jetzt das arithmetische Mittel von $\mathfrak{M}(u_0), \mathfrak{M}(u_1), \cdots \mathfrak{M}(u_n)$, so soll dasselbe mit $\mathfrak{M}_2(u_n)$ bezeichnet werden, also:

$$(4_2) \qquad \mathfrak{M}_2(u_n) = \frac{1}{n+1}\big(\mathfrak{M}(u_0) + \mathfrak{M}(u_1) + \cdots + \mathfrak{M}(u_n)\big),$$

und allgemein werde dann $\mathfrak{M}_\varkappa(u_n)$ definiert durch die Rekursionsformel:

$$(4) \quad \mathfrak{M}_\varkappa(u_n) = \frac{1}{n+1}\big(\mathfrak{M}_{\varkappa-1}(u_0) + \mathfrak{M}_{\varkappa-1}(u_1) + \cdots + \mathfrak{M}_{\varkappa-1}(u_n)\big).^{1)}$$

1) Auf Grund dieser Definition ist offenbar:

$$\mathfrak{M}_\varkappa\big(\mathfrak{M}_\lambda(u_n)\big) = \mathfrak{M}_{\varkappa+\lambda}(u_n).$$

Diese Beziehung, welche zunächst nur für $\varkappa \geqq 3$ einen Sinn hat, gilt auch noch für $\varkappa = 2$ bzw. $\varkappa = 1$, wenn man $\mathfrak{M}_1(u_n)$ mit $\mathfrak{M}(u_n)$ bzw. $\mathfrak{M}_0(u_n)$ mit u_n identifiziert [1])

Schreibt man dann wieder s_ν statt u_ν $(\nu = 0, 1, \cdots n)$, wo s_ν die in Gl. (2) angegebene Bedeutung hat, und nimmt zunächst an, daß die Reihe $\sum a_\nu$ *konvergiere*, wobei:

$$\sum_0^\infty a_\nu = \lim_{n \to \infty} s_n = s \tag{5}$$

sein möge, so nimmt Gl. (3) die Form an:

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_1(s_n) = s \tag{6$_1$}$$

und, wenn man hier der Reihe nach $s_\varkappa$ durch $\mathfrak{M}_1(s_n)$, $\mathfrak{M}_2(s_n), \cdots$ ersetzt, so ergibt sich durch jedesmalige Anwendung des Grenzwertsatzes (1), daß allgemein:

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_\varkappa(s_n) = s \quad (\varkappa \geqq 1). \tag{6}$$

Wie aber die Existenz der Beziehung (6_1) noch keineswegs diejenige von Gl. (5) nach sich zieht, so folgt auch nicht aus der Existenz von Gl (6) für irgendein bestimmtes $\varkappa = k > 1$ diejenige für irgendein $\varkappa < k$, insbesondere (dem Werte $\varkappa = 0$ entsprechend) *nicht* die *Konvergenz* der Reihe $\sum a_\nu$. Es kann dann aber aus demselben Grunde wie zuvor $\lim\limits_{n \to \infty} \mathfrak{M}_1(s_n)$ jener Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} \mathfrak{M}_k(s_n) = s$ bei passender Gelegenheit als *Ersatz* für die *fehlende Reihensumme* angesehen werden. Von diesem Gesichtspunkte aus wollen wir, wenn etwa $\varkappa = k \geqq 1$ der *kleinste* Index ist, für welchen $\lim\limits_{n \to \infty} \mathfrak{M}_\varkappa(s_n)$ eine bestimmte Zahl s vorstellt, uns des Ausdrucks bedienen, die betreffende Reihe sei *durch kfache Mittelbildung reduzibel* und s der ihr *zugeordnete Grenzwert.*

Man kann leicht eine *notwendige* Bedingung herleiten, welcher die a_ν genügen müssen, wenn $\sum a_\nu$ durch $k$fache Mittelbildung *reduzibel* sein soll.

Aus Gl. (4) folgt nämlich:

$$\mathfrak{M}_{\varkappa-1}(s_n) = (n+1)\,\mathfrak{M}_\varkappa(s_n) - n\,\mathfrak{M}_\varkappa(s_{n-1}),$$

also:

$$\frac{|\mathfrak{M}_{\varkappa-1}(s_n)|}{n+1} \leqq |\mathfrak{M}_\varkappa(s_n)| + |\mathfrak{M}_\varkappa(s_{n-1})|.$$

---

1) Diese Bezeichnungen sind ganz analog den bei früherer Gelegenheit (§ 38, Nr 2 und 4, S. 241—243) angewendeten:

$$lg_1\,\omega = lg\,\omega, \quad lg_0\,\omega = \omega$$

Ist nun etwa:

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_k(s_n) = s,$$

so folgt zunächst:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|\mathfrak{M}_{k-1}(s_n)|}{n+1} \leqq 2\,|s|,$$

und hieraus weiter:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|\mathfrak{M}_{k-2}(s_n)|}{(n+1)^2} \leqq 2^2\,|s|,$$

also durch Fortsetzung dieser Schlußweise:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|\mathfrak{M}_0(s_n)|}{(n+1)^k} \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|s_n|}{(n+1)^k} \leqq 2^k\,|s|.$$

Dieses Ergebnis läßt sich folgendermaßen aussprechen:

Die Beziehung

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_n|}{n^k} < +\infty$$

bildet eine notwendige *Bedingung für die Reduzibilität der Reihe* $\sum a_\nu$ *durch* k*fache Mittelbildung.*

3. Das Bildungsgesetz der *iterierten Mittelwerte* $\mathfrak{M}_\varkappa(s_n)$ gestaltet sich bei wachsendem $\varkappa$ infolge der Häufung der in jedem Gliede beständig hinzutretenden Nenner äußerst verwickelt. Es erscheint daher für die Berechnung des einer reduziblen divergenten Reihe zugeordneten Grenzwertes vorteilhaft, daß sich die Möglichkeit bietet, die Grenzwerte jener iterierten Mittelbildungen durch diejenigen wesentlich einfacher gearteter Iterationen zu ersetzen. Zu diesem Zwecke führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$(7)\qquad \begin{cases} s_n^{(1)} = s_0 + s_1 + \cdots + s_n \\ s_n^{(2)} = s_0^{(1)} + s_1^{(1)} + \cdots + s_n^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_n^{(\varkappa)} = s_0^{(\varkappa-1)} + s_1^{(\varkappa-1)} + \cdots + s_n^{(\varkappa-1)}. \end{cases}$$

Dabei umfaßt die letzte, zunächst nur für $\varkappa \geqq 2$ gültige Beziehung auch den Fall $\varkappa = 1$, wenn man $s_\nu^{(0)}$ $(\nu = 0, 1, \cdots, n)$ die Bedeutung von s_ν beilegt. Ferner hat man:

$$(8)\qquad \frac{s_n^{(1)}}{n+1} = \mathfrak{M}_1(s_n).$$

Fährt man hiervon ausgehend in der Weise fort, daß man die

nächste Mittelbildung nicht auf die Ausdrücke $\frac{s_\nu^{(1)}}{\nu+1}$ $(\nu = 0, 1, \cdots, n)$, sondern lediglich auf die s_ν ausübt, so folgt:

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{s_0^{(1)} + s_1^{(1)} + \cdots + s_n^{(1)}}{n+1} = \frac{s_n^{(2)}}{(n+1)^2},$$

und es ergibt sich bei weiterer Fortsetzung dieses Prozesses eine Folge von Ausdrücken der Form:

$$\frac{s_n^{(\varkappa)}}{(n+1)^\varkappa} \quad (\varkappa = 2, 3, \cdots\cdots).$$

Auf Grund des verallgemeinerten Cauchyschen Grenzwertsatzes (§ 74, Nr. 1, Gl. (3), S. 569) findet man sodann für $\varkappa \geqq 1$:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_n^{(\varkappa)}}{(n+1)^\varkappa} = \lim_{n \to \infty} \frac{s_n^{(\varkappa)} - s_{n-1}^{(\varkappa)}}{(n+1)^\varkappa - n^\varkappa}, \tag{9}$$

falls der *rechts* auftretende Grenzwert (im *engeren* bzw. in dem a. a. O. näher bezeichneten *weiteren* Sinne) existiert Nun ist aber:

$$s_n^{(\varkappa)} - s_{n-1}^{(\varkappa)} = \sum_0^n {}_\nu\, s_\nu^{(\varkappa-1)} - \sum_0^{n-1} {}_\nu\, s_\nu^{(\varkappa-1)} = s_n^{(\varkappa-1)}$$

$$(n+1)^\varkappa - n^\varkappa = n^\varkappa \left(\frac{\varkappa}{n} + \frac{\varkappa(\varkappa-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^\varkappa}\right)$$
$$\cong \varkappa n^{\varkappa-1} \cong \varkappa (n+1)^{\varkappa-1} \quad (\text{für } n \to \infty),$$

sodaß die Gleichung (9) durch die folgende ersetzt werden kann:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_n^{(\varkappa)}}{(n+1)^\varkappa} = \lim_{n \to \infty} \frac{s_n^{(\varkappa-1)}}{\varkappa (n+1)^{\varkappa-1}}, \tag{10}$$

wieder unter der Voraussetzung, daß der *rechts* stehende Grenzwert (im oben angegebenen Sinne) *existiert*.

Ist nun die Reihe $\sum a_\nu$ *konvergent* und wird ihre Summe wieder mit s bezeichnet, also:

$$\lim_{n \to \infty} s_n^{(0)} = s,$$

so folgt aus Gl. (10) sukzessive:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_n^{(1)}}{n+1} = s, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{s_n^{(2)}}{(n+1)^2} = \frac{1}{2} s, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{s_n^{(3)}}{(n+1)^3} = \frac{1}{2 \cdot 3} s$$

und daher schließlich allgemein:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\varkappa!\, s_n^{(\varkappa)}}{(n+1)^\varkappa} = s \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \cdots\cdots) \tag{11}$$

Wenn dagegen die Reihe $\sum a_\nu$ (uneigentlich) *divergiert* und dennoch für irgendein $\varkappa = k \geqq 2$[1]) eine Beziehung von der Form (11) besteht, so kann man den betreffenden Grenzwert mit demselben Grade von Berechtigung, wie zuvor im analogen Falle den Grenzwert $\lim\limits_{\varkappa \to \infty} \mathfrak{M}_\varkappa(s_n)$, als Ersatz für die fehlende Summe der Reihe $\sum a_\nu$ ansehen. Dabei steht es offenbar noch frei, den Zahlenfaktor: $\frac{\varkappa!}{(n+1)^\varkappa}$ für jedes $\varkappa$ durch einen ihm *infinitär gleichen* zu ersetzen, der sich für die weiteren Betrachtungen als zweckmäßiger erweist, nämlich durch den reziproken Wert der Binomialkoeffizienten $(n+\varkappa)_\varkappa$, da ja in der Tat:

$$\frac{(n+1)^\varkappa}{\varkappa!} \cong \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+\varkappa)}{1\cdot 2\cdots \varkappa} = (n+\varkappa)_\varkappa.$$

Setzt man jetzt für $\varkappa = 1, 2, 3, \cdots$:

$$(12) \qquad S_n^{(\varkappa)} = \frac{s_n^{(\varkappa)}}{(n+\varkappa)_\varkappa} \left(\text{also speziell: } S_n^{(1)} = \frac{s_n^{(1)}}{n+1} = \mathfrak{M}_1(s_n)\right),$$

so besteht *gleichzeitig* mit jeder einzelnen für $\varkappa = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ sich ergebenden Beziehung von der Form (11) die entsprechende:

$$(13) \qquad \lim_{n\to\infty} S_n^{(\varkappa)} = s$$

und umgekehrt.

Da die Bildung der verschiedenen $S_n^{(\varkappa)}$ *im wesentlichen* (d. h. lediglich abgesehen von der Hinzufügung des Konvergenzfaktors $\frac{1}{(n+\varkappa)_\varkappa}$) auf einer *iterierten Summation* beruht, so wollen wir, falls eine Beziehung von der Form (13) für einen gewissen *kleinsten* Index $\varkappa = k \geqq 2$[2]) (und sodann nach Gl. (10) für jedes $\varkappa > k$) besteht, dies mit dem Ausdruck bezeichnen, die Reihe $\sum a_\nu$ sei *durch kfach iterierte Summation reduzibel* und s der ihr *zugeordnete Grenzwert.*

Es erscheint nun wichtig, festzustellen, daß die beiden im vorstehenden auseinandergesetzten Möglichkeiten, einer (uneigentlich) *divergenten* Reihe eine bestimmte Zahl s zuzuordnen, stets *dasselbe Resultat* liefern bzw. auch *gleichzeitig versagen,* mit anderen Worten, daß aus der für irgendein bestimmtes $k \geqq 2$ gemachten Annahme:

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(k)} = s$$

---

1) Die Annahme $k = 1$ würde ja nach Gl. (8) nur auf den bereits erledigten Fall der einfachen Mittelbildung $\mathfrak{M}_1(s_n)$ führen.

2) Vgl. die vorige Fußnote.

allemal folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_k(s_n) = s$$

und umgekehrt.[1]) Ist dieser Nachweis geführt, so wird man eine Reihe schlechthin als *reduzibel von der Ordnung k mit dem Grenzwert s* bezeichnen können, unabhängig davon, ob zunächst nur die Existenz

$$\text{von: } \lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_k(s_n) = s \quad \text{oder von: } \lim_{n\to\infty} S_n^{(k)} = s$$

feststeht. Und allgemein wollen wir dann eine Reihe als *reduzibel* ohne jeden weiteren Zusatz bezeichnen, sobald nur feststeht, daß *für irgendein k* eine der obigen Beziehungen besteht. (Danach ist also jede *konvergente* Reihe auch *reduzibel.*)

Aus dem Satze am Schlusse von Nr. 2 würde dann folgen, daß eine Reihe $\sum a_\nu$ nur *reduzibel* sein kann, wenn für irgendein k:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_n|}{n^k} < +\infty.$$

Hiernach wäre also z. B. die Reihe $\sum(-1)^\nu \cdot e^{\sqrt{\nu}}$ (allgemeiner: $\sum(-1)^\nu \cdot e^{m_\nu}$, wo: $lg\,\nu \prec m_\nu \prec \nu$) von keiner noch so hohen Ordnung reduzibel (obschon $\sum(-1)^\nu \cdot e^{\sqrt{\nu}}\alpha^\nu$ bzw. $\sum(-1)^\nu \cdot e^{m_\nu}\alpha^\nu$ für $|\alpha| < 1$ noch (absolut) *konvergiert*).

4. Die Grundlage des fraglichen Nachweises bildet eine Rekursionsformel, welche eine einfache Beziehung zwischen $S_n^{(\varkappa)}$, $\mathfrak{M}\left(S_n^{(\varkappa)}\right)$ und $\mathfrak{M}\left(S_n^{(\varkappa-1)}\right)$ herstellt.

Aus (7) folgt für $\varkappa \geqq 1$:

$$s_n^{(\varkappa-1)} = s_n^{(\varkappa)} - s_{n-1}^{(\varkappa)},$$

und daher findet man:

$$\begin{aligned}
S_n^{(\varkappa-1)} &= \frac{s_n^{(\varkappa-1)}}{(n+\varkappa-1)_{\varkappa-1}} = \frac{s_n^{(\varkappa)}}{(n+\varkappa-1)_{\varkappa-1}} - \frac{s_{n-1}^{(\varkappa)}}{(n+\varkappa-1)_{\varkappa-1}} \\
&= \frac{n+\varkappa}{\varkappa} \cdot \frac{s_n^{(\varkappa)}}{(n+\varkappa)_\varkappa} - \frac{n}{\varkappa} \cdot \frac{s_{n-1}^{(\varkappa)}}{(n-1+\varkappa)_\varkappa} \\
&= \frac{n+\varkappa}{\varkappa} \cdot S_n^{(\varkappa)} - \frac{n}{\varkappa} \cdot S_{n-1}^{(\varkappa)} \\
&= \frac{1}{\varkappa}\left((n+1)\,S_n^{(\varkappa)} - nS_{n-1}^{(\varkappa)}\right) + \frac{\varkappa-1}{\varkappa} \cdot S_n^{(\varkappa)}.
\end{aligned}$$

---

1) Die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_\varkappa(s_n)$ werden gewöhnlich als Höldersche, die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} S_n^{(\varkappa)}$ als Cesàrosche bezeichnet.

Ersetzt man hier n der Reihe nach durch $n-1$, $n-2, \cdots 1$, addiert die resultierenden Gleichungen zu der vorstehenden und dazu noch die (wegen: $S_0^{(\varkappa)} = S_0^{(\varkappa-1)} = s_0$ bestehende) Identität:

$$S_0^{(\varkappa-1)} = \frac{1}{\varkappa} \cdot S_0^{(\varkappa)} + \frac{\varkappa-1}{\varkappa} S_0^{(\varkappa)},$$

so ergibt sich:

$$\sum_0^n S_\nu^{(\varkappa-1)} = \frac{1}{\varkappa}(n+1) S_n^{(\varkappa)} + \frac{\varkappa-1}{\varkappa} \sum_0^n S_\nu^{(\varkappa)}$$

und durch Division mit $(n+1)$:

$$(14) \qquad \mathfrak{M}\left(S_n^{(\varkappa-1)}\right) = \frac{1}{\varkappa} S_n^{(\varkappa)} + \frac{\varkappa-1}{\varkappa} \mathfrak{M}\left(S_n^{(\varkappa)}\right)$$
$$= \mathfrak{T}_\varkappa\left(S_n^{(\varkappa)}\right),$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$(15) \qquad \mathfrak{T}_\varkappa(u_n) = \frac{1}{\varkappa} u_n + \frac{\varkappa-1}{\varkappa} \mathfrak{M}(u_n).$$

Wird jetzt aus $\mathfrak{T}_\varkappa(u_0)$, $\mathfrak{T}_\varkappa(u_1) \cdots$, das arithmetische Mittel gebildet, so hat man zu beachten, daß allgemein:

$$\mathfrak{M}(a u_n + b v_n) = a \mathfrak{M}(u_n) + b \mathfrak{M}(v_n)\ ^{1)},$$

und daß sich daher aus Gl. (15) ergibt:

$$\mathfrak{M}\left(\mathfrak{T}_\varkappa(u_n)\right) = \frac{1}{\varkappa} \mathfrak{M}(u_n) + \frac{\varkappa-1}{\varkappa} \mathfrak{M}_2(u_n),$$

also, wenn man auf die rechte Seite die Gleichung (15) anwendet:

$$\mathfrak{M}\left(\mathfrak{T}_\varkappa(u_n)\right) = \mathfrak{T}_\varkappa\left(\mathfrak{M}(u_n)\right),$$

wofür wir mit Weglassung der äußeren Klammern schreiben wollen:

$$(16) \qquad \mathfrak{M}\mathfrak{T}_\varkappa(u_n) = \mathfrak{T}_\varkappa \mathfrak{M}(u_n),$$

in Worten: die Reihenfolge der beiden „*Operationen*" $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{T}_\varkappa$, also der einfachen Mittelbildung und der durch die Formel (15) definierten, etwas zusammengesetzteren Operation[2]), darf (sc. ohne Änderung des Endresultats) *vertauscht* werden.

Ersetzt man ferner in Gl (16) u_n durch $\mathfrak{T}_\lambda(u_n)$, so folgt zunächst

$$\mathfrak{M}\mathfrak{T}_\varkappa\left(\mathfrak{T}_\lambda(u_n)\right) = \mathfrak{T}_\varkappa \mathfrak{M}\left(\mathfrak{T}_\lambda(u_n)\right),$$

also, wenn man *rechts* auf $\mathfrak{M}\left(\mathfrak{T}_\lambda(u_n)\right)$ die soeben als zulässig erwiesene

---

1) In Worten: Die Mittelwertbildung ist eine *distributive* Operation.

2) Man beachte, daß der Index $\varkappa$ bei $\mathfrak{T}_\varkappa$ *nicht* wie bei $\mathfrak{M}_\varkappa$ oder $S^{(\varkappa)}$ eine *Iteration* bezeichnet, sondern sich lediglich auf die in der Definition (15) vorkommende positive Zahl $\varkappa$ bezieht.

Vertauschung der Operationen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{T}_\lambda$ ausübt und nur die innerste Klammer beibehält:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{T}_\varkappa \mathfrak{T}_\lambda(u_n) = \mathfrak{T}_\varkappa \mathfrak{T}_\lambda \mathfrak{M}(u_n) \tag{17}$$

und durch wiederholte Anwendung dieser Schlußweise:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{T}_{\varkappa_1}\mathfrak{T}_{\varkappa_2}\cdots\mathfrak{T}_{\varkappa_m}(u_n) = \mathfrak{T}_{\varkappa_1}\mathfrak{T}_{\varkappa_2}\cdots\mathfrak{T}_{\varkappa_m}\mathfrak{M}(u_n). \tag{18}$$

Bildet man jetzt auf Grund der Rekursionsformel (14) das arithmetische Mittel von $\mathfrak{M}\left(S_0^{(\varkappa-1)}\right)$, $\mathfrak{M}\left(S_1^{(\varkappa-1)}\right)$, $\cdots \mathfrak{M}\left(S_n^{(\varkappa-1)}\right)$, so ergibt sich zunächst:

$$\mathfrak{M}_2\left(S_n^{(\varkappa-1)}\right) = \mathfrak{M}\mathfrak{T}_\varkappa\left(S_n^{(\varkappa)}\right) = \mathfrak{T}_\varkappa\mathfrak{M}\left(S_n^{(\varkappa)}\right),$$

also, wenn man *rechts* auf $\mathfrak{M}\left(S_n^{(\varkappa)}\right)$ nochmals die Rekursionsformel (14) anwendet, indem man daselbst $\varkappa$ durch $\varkappa + 1$ ersetzt:

$$\mathfrak{M}_2\left(S_n^{(\varkappa-1)}\right) = \mathfrak{T}_\varkappa\mathfrak{T}_{\varkappa+1}\left(S_n^{(\varkappa+1)}\right). \tag{19}$$

Hieraus folgt durch nochmalige Mittelbildung mit Benützung von Gl. (17):

$$\mathfrak{M}_3\left(S_n^{(\varkappa-1)}\right) = \mathfrak{M}\mathfrak{T}_\varkappa\mathfrak{T}_{\varkappa+1}\left(S_n^{(\varkappa+1)}\right) = \mathfrak{T}_\varkappa\mathfrak{T}_{\varkappa+1}\mathfrak{M}\left(S_n^{(\varkappa+1)}\right)$$

und, wenn man wieder noch rechts die Rekursionsformel (14) (mit Ersetzung von $\varkappa$ durch $\varkappa + 2$) anwendet:

$$\mathfrak{M}_3\left(S_n^{(\varkappa-1)}\right) = \mathfrak{T}_\varkappa\mathfrak{T}_{\varkappa+1}\mathfrak{T}_{\varkappa+2}\left(S_n^{(\varkappa+2)}\right). \tag{20}$$

Durch Fortsetzung dieser Mittelbildungen mit Benützung der allgemeinen Vertauschungsformel (18) und Einführung der Rekursionsformel (14) für den *rechts* auftretenden Mittelwert ergibt sich allgemein für $k \geq 2$:

$$\mathfrak{M}_{k-1}\left(S_n^{(\varkappa-1)}\right) = \mathfrak{T}_\varkappa\mathfrak{T}_{\varkappa+1}\cdots\mathfrak{T}_{\varkappa+k-2}\left(S_n^{(\varkappa+k-2)}\right). \tag{21}$$

Setzt man hier $\varkappa = 2$ und berücksichtigt noch die in (12) enthaltene Beziehung $S_n^{(1)} = \mathfrak{M}_1(s_n)$, sowie die Fußnote 1, S. 595, so findet man:

$$\mathfrak{M}_k(s_n) = \mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3\cdots\mathfrak{T}_k\left(S_n^{(k)}\right), \tag{22}$$

also eine Formel, welche eine explizite Darstellung von $\mathfrak{M}_k(s_n)$ durch $S_n^{(k)}$ liefert.

Nun folgt aus der Definitionsgleichung (15), daß:

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{T}_\varkappa(u_n) = s, \ \textit{wenn:} \lim_{n\to\infty} u_n = s, \tag{23}$$

da ja nach dem Cauchyschen Grenzwertsatze gleichzeitig mit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = s$, auch $\lim\limits_{n\to\infty}\mathfrak{M}(u_n) = s$.

Wird also zunächst angenommen, daß:

(24) $$\lim_{n\to\infty} S_n^{(k)} = s,$$

so findet man sukzessive:

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{T}_k\left(S_n^{(k)}\right) = s$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{T}_{k-1}\mathfrak{T}_k\left(S_n^{(k)}\right) = s$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3\cdots\mathfrak{T}_k\left(S_n^{(k)}\right) = s$$

und somit schließlich mit Benützung von Gl. (22):

(25) $$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_k(s_n) = s.$$

Des weiteren erweist sich aber die Grenzwertbeziehung (23), welche ja die Grundlage der zuletzt gefundenen bildet, als *umkehrbar*, d. h es ist allemal:

(26) $$\lim_{n\to\infty} u_n = s, \quad \textit{wenn:} \quad \lim_{n\to\infty} \mathfrak{T}_\varkappa(u_n) = s$$

für *irgendein* $\varkappa \geqq 2.$[1]) Dies folgt nämlich aus dem Grenzwertsatze von § 74, Nr. 2, S. 571, wenn man daselbst: $a = \frac{1}{\varkappa}$, $b = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}$ setzt.[2])

---

1) Im Falle $\varkappa = 1$ wird ja $\mathfrak{T}_\varkappa(u_n)$ *identisch* mit u_n.

2) Will man sich nicht auf den zitierten allgemeineren Satz stützen, so läßt sich der vorliegende, durch die *Ganzzahligkeit* von $\varkappa$ merklich vereinfachte Fall folgendermaßen erledigen. Aus der Definitionsgleichung (4), S. 595, folgt:

$$u_n = (n+1)\mathfrak{M}(u_n) - n\mathfrak{M}(u_{n-1}),$$

sodaß nach Gl. (15):

$$\mathfrak{T}_\varkappa(u_n) = \frac{(n+\varkappa)\mathfrak{M}(u_n) - n\mathfrak{M}(u_{n-1})}{\varkappa}.$$

Multipliziert man Zähler und Nenner dieses Ausdrucks mit dem Faktor:

$$(n+\varkappa-1)(n+\varkappa-2)\cdots(n+1)$$

und benützt für das im Nenner stehende $\varkappa$ die Identität·

$$\varkappa = (n+\varkappa) - n,$$

so wird:

$$\mathfrak{T}_\varkappa(u_n) = \frac{(n+\varkappa)(n+\varkappa-1)\cdots(n+1)\mathfrak{M}(u_n) - (n+\varkappa-1)(n+\varkappa-2)\cdots n\mathfrak{M}(u_{n-1})}{(n+\varkappa)(n+\varkappa-1)\cdots(n+1) \qquad -(n+\varkappa-1)(n+\varkappa-2)\cdots n}.$$

Besteht jetzt die Voraussetzung:

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{T}_\varkappa(u_n) = s,$$

so folgt aus dem vorstehenden Ausdruck mit Benützung des verallgemeinerten Cauchyschen Grenzwertsatzes, daß:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+\varkappa)(n+\varkappa-1)\cdots(n+1)}{(n+\varkappa)(n+\varkappa-2)\cdots(n+1)}\mathfrak{M}(u_n) = s,$$

also:

$$\lim \mathfrak{M}(u_n) = s$$

Wird also jetzt die Beziehung (25) zur Voraussetzung gemacht, sodaß also mit Benützung von Gl. (22):

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_3 \cdots \mathfrak{T}_k \left(S_n^{(k)}\right) = s, \tag{27}$$

so ergibt sich nach (26) sukzessive:

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{T}_3 \mathfrak{T}_4 \cdots \mathfrak{T}_k \left(S_n^{(k)}\right) = s$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{T}_4 \cdots \mathfrak{T}_k \left(S_n^{(k)}\right) = s$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{T}_k \left(S_n^{(k)}\right) = s$$

und schließlich:

$$\lim_{n\to\infty} \left(S_n^{(k)}\right) = s \tag{28}$$

Damit ist dann also der am Schlusse der vorigen Nummer geforderte Nachweis geliefert, d. h. es gilt der Satz:

Jede der beiden Beziehungen

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_k(s_n) = s, \quad \lim_{n\to\infty} S_n^{(k)} = s$$

(wo s eine beliebige endliche Zahl bedeutet) zieht stets die andere nach sich.

Beispiel:

Es sei: $a_\nu = (-1)^{\nu-1} \cdot \nu$, also:

$$\begin{cases} s_{2\mu-1} = 0 + 1 - 2 + 3 - \cdots - (2\mu - 2) + (2\mu - 1) = \mu \\ s_{2\mu} \quad = s_{2\mu-1} + a_{2\mu} = \mu - 2\mu = -\mu. \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_{2\mu-1}^{(1)} = 0 + 1 - 1 + 2 - \cdots - (\mu - 1) + \mu = \mu \\ s_{2\mu}^{(1)} \quad = s_{2\mu-1}^{(1)} + s_{2\mu} = \mu - \mu = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_{2\mu-1}^{(2)} = 0 + 1 + 0 + 2 + \cdots + 0 + \mu = \frac{\mu(\mu+1)}{2} \\ s_{2\mu}^{(2)} \quad = s_{2\mu-1}^{(2)} + s_{2\mu}^{(1)} = \frac{\mu(\mu+1)}{2}. \end{cases}$$

Hiernach ergibt sich (s. Gl. (12)):

$$\begin{cases} S_{2\mu-1}^{(2)} = \frac{s_{2\mu-1}^{(2)}}{(2\mu+1)_2} = \frac{\mu\cdot(\mu+1)}{2} \cdot \frac{2}{(2\mu+1)\cdot 2\mu} = \frac{\mu+1}{2(2\mu+1)} \\ S_{2\mu}^{(2)} \quad = \frac{s_{2\mu}^{(2)}}{(2\mu+2)_2} = \frac{\mu(\mu+1)}{2} \cdot \frac{2}{(2\mu+2)(2\mu+1)} = \frac{\mu}{2(2\mu+1)} \end{cases}$$

und somit:

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(2)} = \frac{1}{4}.$$

Andererseits hat man:

$$\begin{cases} \mathfrak{M}_1(s_{2\mu-1}) = \dfrac{s^{(1)}_{2\mu-1}}{2\mu} = \dfrac{\mu}{2\mu} = \dfrac{1}{2} \\ \mathfrak{M}_1(s_{2\mu}) \quad = \dfrac{s^{(1)}_{2\mu}}{2\mu+1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{M}_2(s_{2\mu-1}) = \dfrac{\mu \cdot \frac{1}{2}}{2\mu} = \dfrac{1}{4} \\ \mathfrak{M}_2(s_{2\mu}) \quad = \dfrac{\mu \cdot \frac{1}{2}}{2\mu+1} = \dfrac{\mu}{4\mu+2}, \end{cases}$$

und somit:

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_2(s_n) = \frac{1}{4} \left(= \lim_{n\to\infty} S_n^{(2)}\right),$$

übereinstimmend mit dem zuvor bewiesenen Satze. Im übrigen ist also die Reihe $\sum_0^\infty (-1)^{\nu+1} \cdot \nu$ reduzibel von der *zweiten* Ordnung und $\frac{1}{4}$ der zugeordnete Grenzwert.

5. Die Einführung des Mittelbildungssymbols $\mathfrak{M}$ und des Begriffes der Reduzibilität gestattet zunächst, die in § 45, Nr. 3, S. 307, Gl. (6), (7), und § 75, Nr. 1, S. 574, Gl. (4), gegebene Form der Konvergenzbedingung in folgender Weise auszusprechen: Steht bereits fest, daß die Reihe $\sum a_\nu$ von der ersten Ordnung reduzibel, so ist für ihre *Konvergenz notwendig* und *hinreichend*, daß: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{M}(na_n) = 0$, also *hinreichend*, daß: $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

Dieses Resultat läßt sich noch in der Weise verallgemeinern, daß der Zusatz *„von der ersten Ordnung“* wegfällt. Hierzu gehen wir von der Identität aus:

$$(29) \qquad (n+1)\sum_0^n a_\nu = \sum_0^n (n+1-\nu) a_\nu + \sum_0^n \nu a_\nu,$$

welche wegen:

$$s_0 + s_1 + \cdots + s_n = (n+1)a_0 + na_1 + \cdots + 2a_{n-1} + 1a_n$$

nach Division mit $n+1$ die Beziehung liefert:

$$(30) \qquad \sum_0^n a_\nu = \frac{1}{n+1}\sum_0^n s_\nu + \frac{1}{n+1}\sum_0^n \nu a_\nu,$$

anders geschrieben:

$$(30_0) \qquad s_n = \mathfrak{M}_1(s_n) + \mathfrak{M}_1(na_n).$$

Ersetzt man n der Reihe nach durch $n-1, n-2, \cdots 1, 0$, addiert die resultierenden Gleichungen zu Gl. (30_0) und dividiert mit $n+1$, so folgt:

$$(30_1) \qquad \mathfrak{M}_1(s_n) = \mathfrak{M}_2(s_n) + \mathfrak{M}_2(n a_n).$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens ergibt sich allgemein:

$$(30_{k-1}) \qquad \mathfrak{M}_{k-1}(s_n) = \mathfrak{M}_k(s_n) \quad + \mathfrak{M}_k(n a_n)$$

$$(30_k) \qquad \mathfrak{M}_k \quad (s_n) = \mathfrak{M}_{k+1}(s_n) + \mathfrak{M}_{k+1}(n a_n).$$

Angenommen nun, man habe:

$$(31) \qquad \lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_{k+1}(s_n) = s,$$

so wird nach Gl. (30_k) auch:

$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_k(s_n) = s$ *dann* und *nur* dann, wenn: $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_{k+1}(n a_n) = 0$

Ist diese letztere Bedingung erfüllt, so wird nach Gl. (30_{k-1}) wiederum auch:

$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_{k-1}(s_n) = s$ *dann* und *nur* dann, wenn: $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_k(n a_n) = 0.$

In dieser Weise weiter fortfahrend, findet man aus Gl. (30_0), daß schließlich:

$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_1(s_n) = s$ *dann* und *nur* dann, wenn: $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_1(n a_n) = 0.$

Da aber umgekehrt die letzte dieser Bedingungen nach dem Cauchyschen Grenzwertsatze die Existenz aller folgenden von der Form: $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_\varkappa(n a_n) = 0$ $(\varkappa = 2, 3, \cdots)$ nach sich zieht, so ergibt sich:

> *Steht nur so viel fest, daß die Reihe $\sum a_\nu$ überhaupt reduzibel ist, so ist für ihre Konvergenz notwendig und hinreichend, daß:*
>
> $$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}(n a_n) = 0,$$
>
> *also (wiederum nach dem Cauchyschen Grenzwertsatze) hinreichend, daß:*
>
> $$\lim_{n\to\infty} n a_n = 0.$$ [1]

§ 79. Doppelreihen mit komplexen Gliedern. — Reduzibilität der Diagonalreihe nebst Anwendung auf die Cauchysche Multiplikationsregel. — Feststellung der absoluten Konvergenz einer wichtigen Doppelreihe.

1. In § 75, Nr. 2, S. 577, haben wir bereits eine *Doppelfolge* additiv verbundener komplexer Zahlen, also ein Schema von der Form:

1) Eine erweiterte Form dieser Konvergenzbedingung findet man im Anhang.

$$(1)\qquad \begin{cases} a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + \cdots + a_\mu^{(0)} + \cdots\cdots \\ + a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + \cdots + a_\mu^{(1)} + \cdots\cdots \\ + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} + \cdots + a_\mu^{(\nu)} + \cdots\cdots \\ + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

betrachtet, und zwar dort lediglich in der Weise, daß wir ein solches zweifach unendliches Schema unter der Voraussetzung absoluter Konvergenz nach *Zeilen* oder *Kolonnen* bzw. nach *Diagonalen* summierten, also als *iterierte* bzw. als *einfach unendliche* Reihe behandelten. Die Vollständigkeit erfordert, auch den Begriff der *Doppelreihe* auf ein aus komplexen Zahlen bestehendes Schema von der Form (1) zu übertragen.

Bezeichnet man in analoger Weise, wie früher im Falle ausschließlich reeller Summanden (vgl. § 62, S. 450, Gl. (3)), mit $s_\mu^{(\nu)}$ die Summe derjenigen Glieder des Schemas (1), welche in dem von der $(\mu+1)^{\text{ten}}$ Kolonne und $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Zeile begrenzten Abschnitt enthalten sind, so heißt die *Doppelreihe* der $a_\mu^{(\nu)}$ *konvergent* und s ihre *Summe*, in Zeichen:

$$(2)\qquad \sum_0^\infty{}^{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)} = s,$$

wenn:

$$(3)\qquad \lim_{\mu,\nu\to\infty} s_\mu^{(\nu)} = s.$$

In jedem anderen Falle, d. h. wenn kein endlicher Doppellimes für die Folge $\left(s_\mu^{(\nu)}\right)$ existiert, heißt jene Doppelreihe *divergent*.

Setzt man wieder:

$$(4)\qquad a_\mu^{(\nu)} = \alpha_\mu^{(\nu)} + \beta_\mu^{(\nu)} i,$$

und entsprechend:

$$(5)\qquad s_\mu^{(\nu)} = \sigma_\mu^{(\nu)} + \tau_\mu^{(\nu)} i,$$

so folgt:

$$\lim_{\mu,\nu\to\infty} s_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu,\nu\to\infty} \sigma_\mu^{(\nu)} + i \lim_{\mu,\nu\to\infty} \tau_\mu^{(\nu)}$$

(in dem Sinne, daß die Existenz des links stehenden Grenzwertes diejenige der beiden rechts stehenden nach sich zieht und umgekehrt), anders geschrieben:

$$(6)\qquad \sum_0^\infty{}'^{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}^{\mu,\nu}\, \alpha_\mu^{(\nu)} + i\cdot \sum_0^\infty{}^{\mu,\nu}\, \beta_\mu^{(\nu)}.$$

Da auf diese Weise die Summe einer konvergenten Doppelreihe mit komplexen Gliedern auf diejenigen zweier ebensolchen mit reellen Gliedern zurückgeführt wird, so lassen sich wieder ohne Schwierigkeit

die früher für reelle Doppelreihen abgeleiteten Resultate auf solche der vorliegenden Art übertragen. Wir begnügen uns in dieser Beziehung mit den folgenden Bemerkungen.

2. Die Doppelreihe der $a_\mu^{(\nu)}$ soll wieder *absolut* konvergent heißen, wenn die Doppelreihe der $|a_\mu^{(\nu)}|$ konvergiert. Aus der Beziehung:

$$\left.\begin{array}{l} |\alpha_\mu^{(\nu)}| \leqq \\ |\beta_\mu^{(\nu)}| \leqq \end{array}\right\} |a_\mu^{(\nu)}| \leqq |\alpha_\mu^{(\nu)}| + |\beta_\mu^{(\nu)}|$$

ergibt sich dann, daß die *Konvergenz* der (ja aus lauter *positiven* Gliedern bestehenden) Doppelreihe $\sum^{\mu,\nu} |a_\mu^{(\nu)}|$ diejenige der beiden Doppelreihen $\sum^{\mu,\nu} |\alpha_\mu^{(\nu)}|$ und $\sum^{\mu,\nu} |\beta_\mu^{(\nu)}|$ zur Folge hat *und umgekehrt.* Da aber nach § 64, Nr. 1, S. 469, gleichzeitig mit den beiden letztgenannten auch die Doppelreihen $\sum^{\mu,\nu} \alpha_\mu^{(\nu)}$ und $\sum^{\mu,\nu} \beta_\mu^{(\nu)}$ *konvergieren,* so erkennt man auf Grund der Beziehung (6), daß die im Sinne der oben gegebenen Definition *absolut* konvergente Doppelreihe $\sum^{\mu,\nu} a_\mu^{(\nu)}$ auch wirklich an sich *konvergiert.* Im übrigen liefert die Beziehung (6) ohne weiteres die folgende wörtliche Übertragung der früher gefundenen Hauptsätze:

I. *Ist die Doppelreihe der $a_\mu^{(\nu)}$ **absolut** konvergent und*

$$\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu} a_\mu^{(\nu)} = s, \tag{7}$$

*so konvergiert auch jede einzelne Zeile und Kolonne, sowie die Reihe der Zeilen- bzw. Kolonnensummen **absolut**, und man hat:*

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} \sum_0^\infty{}^{\mu} a_\mu^{(\nu)} = s \text{ (Reihe der Zeilensummen).} \tag{8}$$

$$\sum_0^\infty{}^{\mu} \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\mu^{(\nu)} = s \text{ (Reihe der Kolonnensummen).} \tag{9}$$

*Ebenso konvergiert die Reihe der Diagonalen **absolut**, und zwar auch dann noch, wenn man die einzelnen $a_\mu^{(\nu)}$ als Glieder der Reihe auffaßt. Zugleich hat man:*

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} \left(a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu-1)} + \cdots + a_\nu^{(0)}\right) = s \text{ (Reihe der Diagonalen)} \tag{10}$$

(vgl. § 64, Nr. 2, S. 470).

II. Dieser Satz ist wieder umkehrbar und läßt sich mit seinen sämtlich möglichen Umkehrungen folgendermaßen zusammenfassen:

Von den vier Gleichungen

$$(11)\qquad \sum_0^{\infty}{}^{\mu,\nu} a_\mu^{(\nu)} = s, \quad \sum_0^{\infty}{}^{\nu} \sum_0^{\infty}{}^{\mu} a_\mu^{(\nu)} = s, \quad \sum_0^{\infty}{}^{\mu} \sum_0^{\infty}{}^{\nu} a_\mu^{(\nu)} = s,$$

$$\sum_0^{\infty}{}^{\nu} \left(a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu-1)} + \cdots + a_\nu^{(0)}\right) = s$$

zieht jede die drei anderen nach sich, wenn die in der Voraussetzung auftretende Reihe bei Vertauschung der $a_\mu^{(\nu)}$ mit ihren absoluten Beträgen konvergent bleibt (a. a. O. Nr 3).

III. *Jede absolut konvergente Doppelreihe ist unbedingt konvergent und umgekehrt* (a. a. O. Nr. 4 und 6).

3. Die Doppelreihe $\sum^{\mu,\nu} a_\mu^{(\nu)}$ ist nur *bedingt* konvergent, wenn von den beiden Reihen $\sum^{\mu,\nu} \alpha_\mu^{(\nu)}$, $\sum^{\mu,\nu} \beta_\mu^{(\nu)}$ *mindestens eine* nur *bedingt* konvergiert (die *andere* mag dann eventuell auch *unbedingt* konvergieren). Es sei daran erinnert, daß bei einer *bedingt,* also *nicht absolut* konvergierenden Doppelreihe mit reellen Gliedern keine einzige Zeile oder Kolonne zu konvergieren braucht (vgl. § 62, Nr. 5, Satz (I), S. 455). Dagegen ergibt sich (s. a. a. O. Satz (II), S. 456), falls man diese Möglichkeit durch die Voraussetzung in geeignetem Umfange ausschließt, der folgende Satz:

(IV) *Ist außer der Doppelreihe* $\sum_0^{\infty}{}^{\mu,\nu} a_\mu^{(\nu)} = s$ *jede einzelne Zeile* $\sum_0^{\infty}{}^{\mu} a_\mu^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ *oder jede einzelne Kolonne* $\sum_0^{\infty}{}^{\nu} a_\mu^{(\nu)}$ $(\mu = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ *konvergent, so konvergieren auch die entsprechenden iterierten Reihen gegen die Summe s, d. h. man hat:*

$$(12)\qquad \sum_0^{\infty}{}^{\nu} \sum_0^{\infty}{}^{\mu} a_\mu^{(\nu)} = s, \text{ bzw. } \sum_0^{\infty}{}^{\mu} \sum_0^{\infty}{}^{\nu} a_\mu^{(\nu)} = s.$$

4. Der Satz über das Verhalten der *Diagonalreihe* und ihre Beziehung zu der als *konvergent* vorausgesetzten *Doppelreihe* (s. § 63, Nr. 3, S. 462) läßt sich vermittelst des im vorigen Paragraphen eingeführten Begriffes der Reduzibilität merklich vervollständigen. Setzt man:

$$a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu-1)} + \cdots + a_\nu^{(0)} = c_\nu, \quad c_0 + c_1 + \cdots + c_\nu = C_\nu, \tag{13}$$

(sodaß also die Buchstaben: a, c, C den a. a. O. gebrauchten: u, w, W entsprechen), so gilt unter der Voraussetzung, daß die Zeilen und Kolonnen der *konvergenten* Doppelreihe $\sum_0^\infty {}^{\mu,\nu} a_\mu^{(\nu)} = s$ gleichfalls *konvergieren* oder *innerhalb endlicher Grenzen oszillieren,* die Beziehung (S. 464, Gl. (27)):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_0^n {}^\nu C_\nu = s, \text{ anders geschrieben: } \lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}(C_n) = s \tag{14}$$

Verbindet man dieses Resultat mit dem Schlußsatze des vorigen Paragraphen, S. 606, so läßt sich der fragliche Satz über das Verhalten der *Diagonalreihe* $\sum_0^\infty {}^\nu c_\nu$ in folgender Form aussprechen:

(V) *Besitzt die konvergente Doppelreihe:*

$$\sum_0^\infty {}^{\mu,\nu} a_\mu^{(\nu)} = s \tag{15}$$

die Eigenschaft, daß jede einzelne Zeile und Kolonne konvergiert oder innerhalb endlicher Grenzen oszilliert, so ist die Reihe der Diagonalen $\sum_0^\infty {}^\nu c_\nu$ *in jedem Falle zum mindesten reduzibel, und zwar von der ersten Ordnung, mit dem Grenzwert s, also:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}(C_n) = s \quad (\text{wo: } C_\nu = c_0 + c_1 + \cdots + c_\nu). \tag{16}$$

Für ihre Konvergenz (und zwar dann selbstverständlich auch gegen die Summe s) ist notwendig und hinreichend, daß:

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}(n c_n) = 0, \tag{17}$$

also hinreichend, daß:

$$\lim_{n\to\infty} n c_n = 0. \tag{17a}$$

Aus diesem Satze folgt aber unmittelbar die auf S. 582 angekündigte Vervollständigung der Cauchyschen Multiplikationsregel. Ist $\sum_0^\infty {}^\mu a_\mu = A$, $\sum_0^\infty {}^\nu b_\nu = B$, so ergibt sich zunächst durch die in § 66, Nr. 1, S. 483, angewendete Schlußweise, daß die *Doppelreihe*

$\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu} a_\mu b_\nu$ *konvergiert* bei gleichzeitiger *Konvergenz* jeder einzelnen *Zeile* und *Kolonne*. Mit Benützung des letzten Satzes ergibt sich also:

(VI) *Ist:*

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu = A, \quad \sum_0^\infty{}^\nu b_\nu = B \tag{18}$$

und setzt man:

$$a_0 b_\nu + a_1 b_{\nu-1} + \cdots + a_\nu b_0 = c_\nu, \quad c_0 + c_1 + \cdots + c_\nu = C_\nu, \tag{19}$$

so ist die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu$ *zum mindesten von der ersten Ordnung reduzibel mit dem Grenzwerte AB, also:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}(C_n) = AB, \tag{20}$$

und daher, falls sie konvergiert, auch:

$$\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu = AB. \tag{21}$$

Für das letztere ist notwendig und hinreichend, daß:

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}(n c_n) = 0, \tag{22}$$

also hinreichend, daß:

$$\lim_{n\to\infty} n c_n = 0.^{1)} \tag{22a}$$

---

1) Daß diese Bedingung sehr weit davon entfernt ist, eine *notwendige* zu sein, zeigt ein früher gefundenes auf die Multiplikation sog. *alternierender* Reihen bezügliches Ergebnis. Sei etwa:

$$a_\nu = (-1)^\nu \alpha_\nu, \quad b_\nu = (-1)^\nu \beta_\nu,$$

wo die α_ν, β_ν *positive*, mit wachsendem ν *monoton* gegen Null konvergierende Zahlen bedeuten, so hat man (nach § 66, Nr. 6, S. 496):

$$c_n = (-1)^n \cdot \sum_0^n{}^\nu \alpha_\nu \beta_{n-\nu}$$

und findet in diesem Falle (a. a. O. (Gl. 48))

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

als *notwendige* und *hinreichende* Bedingung für die Gültigkeit der Cauchyschen Multiplikationsregel. Hier erweist sich also an Stelle von $\lim_{n\to\infty} n c_n = 0$ schon die obige *wesentlich schwächere* Forderung als *hinreichend*, was offenbar daher rührt, daß hier die c_n, als aus lauter Gliedern *gleichen* Vorzeichens bestehend, die *größten* Absolutwerte besitzen, deren sie bei gegebenen $|a_\nu|$, $|b_\nu|$ überhaupt fähig sind, während dann andererseits das Zustandekommen der nach Satz (VI) gleichfalls *notwendigen* und *hinreichenden* Bedingung (22) auf dem Umstande beruht, daß die c_n *alternierende* Vorzeichen besitzen.

5. Eine einfachere und zugleich vorteilhaftere Form einer *hinreichenden* Bedingung liefert der folgende Satz:

(VII) *Für die Gültigkeit der Multiplikationsformel (21) ist* **hinreichend**, *daß* $|\nu a_\nu|$, $|\nu b_\nu|$ *unter einer endlichen Schranke bleiben, etwa:*

$$(22\text{b}) \qquad |\nu a_\nu| < G, \quad |\nu b_\nu| < G \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots).^{1)}$$

Beweis. Es ist lediglich zu zeigen, daß unter der gemachten Voraussetzung die Beziehung (22) besteht. Hierzu führen wir die Bezeichnungen ein:

$$(23) \begin{cases} \sum_0^n a_\nu = A_n, & \sum_0^n b_\nu = B_n, & \sum_0^n c_\nu = C_n \text{ (wie bereits in (19))} \\ \sum_0^n \nu a_\nu = A'_n, & \sum_0^n \nu b_\nu = B'_n, & \sum_0^n \nu c_\nu = C'_n. \end{cases}$$

Alsdann hat man mit Benützung von (19):

$$C'_n = \sum_0^n \nu(a_0 b_\nu + a_1 b_{\nu-1} + \cdots + a_\nu b_0),$$

ausführlicher geschrieben:

$$\begin{aligned} C'_n = {} & 0 \cdot a_0 b_0 \\ & + 1 \cdot a_0 b_1 + 1 \cdot a_1 b_0 \\ & + 2 \cdot a_0 b_2 + 2 \cdot a_1 b_1 + 2 \cdot a_2 b_0 \\ & + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ & + \overline{n-1} \cdot a_0 b_{n-1} + \overline{n-1} \cdot a_1 b_{n-2} + \overline{n-1} \cdot a_2 b_{n-3} + \cdots + \overline{n-1} \cdot a_{n-1} b_0 \\ & + n \cdot a_0 b_n + n \cdot a_1 b_{n-1} + n \cdot a_2 b_{n-2} + \cdots + n \cdot a_{n-1} b_1 + n \cdot a_n \end{aligned}$$

Addiert man die einzelnen Kolonnen, so läßt sich jede dieser Kolonnensummen mit Ausnahme der ersten und letzten in zwei Bestandteile zerlegen, nämlich:

$$\begin{aligned} C'_n = a_0 B'_n + a_1 B'_{n-1} & + a_2 B'_{n-2} + \cdots + a_{n-1} B'_1 \\ & + 1 \cdot a_1 B_{n-1} + 2 \cdot a_2 B_{n-2} + \cdots + (n-1)\, a_{n-1} B_1 + n \cdot a_n B_0 \end{aligned}$$

oder, wenn man der Symmetrie zuliebe der ersten Zeile noch das Glied $a_n B'_0$ (wo: $B'_0 \equiv 0 \cdot b_0 = 0$), der zweiten das Glied $0 \cdot a_0 B_n$ hinzufügt:

$$(24) \qquad C'_n = \sum_0^n a_\nu B'_{n-\nu} + \sum_0^n \nu \cdot a_\nu B_{n-\nu}.$$

---

1) Anders geschrieben:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, |n a_n| < +\infty, \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}}\, |n b_n| < +\infty.$$

Die Anwendung der **Abelschen** Transformation auf die erste dieser Summen ergibt:

$$\sum_0^n{}_\nu a_\nu B'_{n-\nu} = \sum_0^{n-1}{}_\nu A_\nu\left(B'_{n-\nu} - B'_{n-\nu-1}\right) + A_n B'_0$$

$$= \sum_0^{n-1}{}_\nu (n-\nu)\cdot b_{n-\nu} A_\nu + 0\cdot b_0 A_n$$

$$= \sum_0^n{}_\nu \nu\cdot b_\nu A_{n-\nu}$$

und daher wird:

$$(25)\quad C'_n = \sum_0^n{}_\nu \nu\cdot b_\nu A_{n-\nu} + \sum_0^n{}_\nu \nu\cdot a_\nu B_{n-\nu}$$

$$= \sum_0^n{}_\nu \nu\cdot b_\nu (A_{n-\nu} - A) + \sum_0^n{}_\nu \nu\cdot a_\nu (B_{n-\nu} - B)$$

$$+ A\sum_0^n{}_\nu \nu b_\nu + B\sum_0^n{}_\nu \nu a_\nu \quad \text{(s. Gl. (18))},$$

also, mit Berücksichtigung der Voraussetzung (22b):

$$(26)\quad |C'_n| < G\cdot\sum_0^n{}_\nu |A_\nu - A| + G\cdot\sum_0^n{}_\nu |B_\nu - B| + \left|A\sum_0^n{}_\nu \nu b_\nu\right| + \left|B\sum_0^n{}_\nu \nu a_\nu\right|$$

und durch Division mit $n+1$:

$$(27)\quad |\mathfrak{M}(nc_n)| < G\cdot\mathfrak{M}(|A_n - A|) + G\cdot\mathfrak{M}(|B_n - B|) + |A\cdot\mathfrak{M}(nb_n)| + |B\cdot\mathfrak{M}(na_n)|.$$

Da aber, wegen $\lim\limits_{n\to\infty}|A_n - A| = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty}|B_n - B| = 0$, auch:

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{M}(|A_n - A|) = 0,\quad \lim_{n\to\infty}\mathfrak{M}(|B_n - B|) = 0$$

und, infolge der Konvergenz von $\sum a_\nu$, $\sum b_\nu$, auch:

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{M}(na_n) = 0,\quad \lim_{n\to\infty}\mathfrak{M}(nb_n) = 0,$$

so findet man schließlich, wie zu beweisen war:

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{M}(nc_n) = 0. \text{ —}$$

Zu den (bedingt konvergenten) Reihen, für welche auf Grund des eben bewiesenen Satzes die Gültigkeit der **Cauchyschen** Multiplikationsformel nunmehr feststeht, gehören insbesondere diejenigen

von der Form $\sum u_\nu v_\nu$, sobald zu den für deren *Konvergenz* als *hinreichend* erkannten Bedingungen (s. § 77, Nr. 1, S. 593), nämlich:

$$\sum |u_\nu - u_{\nu+1}| \text{ *konvergent*}, \sum_0^\infty v_\nu \text{ *höchstens endlich unbestimmt*}, \lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

an die Stelle der letztgenannten die folgende tritt:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n u_n < +\infty.$$

(Beispiel: $u_\nu = \frac{1}{p+q\nu}$, wo p, q beliebige, nur der Bedingung $p+q\nu \neq 0$ unterworfene Zahlen; $v_\nu = (-1)^{m_\nu}$, wo $m_\nu = 0$ oder 1 mit der einzigen Beschränkung, daß $\sum_0^n{}_\nu (-1)^{m_\nu}$ unter einer endlichen Grenze bleibt.)

6. Für die Feststellung der *absoluten* Konvergenz oder Divergenz einer Doppelreihe mit komplexen Gliedern $\sum_{\mu,\nu} a_\mu^{(\nu)}$ wird, geradeso wie bei der Lösung der entsprechenden Aufgabe für einfache Reihen, im allgemeinen die direkte Untersuchung von $|a_\mu^{(\nu)}|$ der Zerlegung von $a_\mu^{(\nu)}$ in seinen reellen und imaginären Teil vorzuziehen sein.

Als Beispiel einer solchen Konvergenzbestimmung wollen wir eine Doppelreihe betrachten, die in der Theorie der elliptischen Funktionen eine wichtige Rolle spielt, übrigens, wie sich zeigen wird, zu der in § 67, Nr. 6, S. 511, behandelten Doppelreihe mit reellen positiven Gliedern in naher Beziehung steht. Es werde gesetzt:

$$(28)\quad a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{(\mu\omega+\nu\omega')^\varrho} \left\{ \begin{aligned} \text{wo: } \mu &= 0, 1, 2, \cdots\cdots \\ \nu &= 0, 1, 2, \cdots\cdots \end{aligned} \right\} \text{ mit Ausschluß der Kombination } \mu = 0,\ \nu = 0.$$

Dabei sollen ω und ω' zwei komplexe Zahlen bedeuten, welche nur der Beschränkung unterliegen, daß ihr Quotient: $t = \frac{\omega'}{\omega}$ *nicht reell* sein soll. Es handelt sich dann darum zu entscheiden, für welche Werte des Exponenten ϱ die aus den $a_\mu^{(\nu)}$ gebildete Doppelreihe absolut konvergiert bzw. divergiert. Da Potenzen mit komplexer Basis bisher nur für ganzzahlige Exponenten und für den Exponenten $\frac{1}{2}$ *definiert* sind, also nur in diesen Fällen $(\mu\omega+\nu\omega')^\varrho$ eine bestimmte Zahl vorstellt, so wird man vorläufig, soweit es sich um die $a_\mu^{(\nu)}$ handelt, unter ϱ entweder eine ganze Zahl oder ein ungerades Multiplum von $\frac{1}{2}$ zu verstehen haben, während in bezug auf die $|\mu\omega+\nu\omega'|^\varrho$ diese Beschränkung natürlich wegfallen kann.

Man hat nun zunächst:

$$(29)\qquad a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{\omega^\varrho} \cdot \frac{1}{(\mu + \nu t)^\varrho}$$

und, wenn

$$t = \tau + \tau' i \quad (\text{wo } |\tau'| > 0)$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} |\mu + \nu t|^2 &= (\mu + \nu\tau)^2 + \nu^2\tau'^2 \\ &= \mu^2 + 2\mu\nu\tau + \nu^2(\tau^2 + \tau'^2), \end{aligned}$$

mithin:

$$(30)\qquad |\mu + \nu t|^\varrho = \left(\mu^2 + 2\mu\nu\tau + \nu^2(\tau^2 + \tau'^2)\right)^{\frac{\varrho}{2}}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem a. a. O. (S. 511, Nr. 6) behandelten:

$$(a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2)^\sigma,$$

so ergibt sich:

$$b^2 - ac = -\tau'^2, \text{ also: } < 0,$$

d. h. der fragliche Ausdruck ist, wie dort, eine (positive) *quadratische Form* mit *negativer Determinante*. Da sodann:

$$(31)\qquad |a_\mu^{(\nu)}| = \frac{1}{|\omega|^\varrho} \cdot \frac{1}{\left(\mu^2 + 2\mu\nu\tau + \nu^2(\tau^2 + \tau'^2)\right)^{\frac{1}{2}\varrho}},$$

so folgt aus dem a. a. O. gefundenen Ergebnis (wegen $\sigma = \frac{1}{2}\varrho$), daß die Doppelreihe der $|a_\mu^{(\nu)}|$ für $\varrho > 2$ *konvergiert*, für $\varrho \leqq 2$ *divergiert*. Da es schließlich freisteht, dieses Resultat auch wieder auf negative μ *oder* ν bzw. μ *und* ν zu übertragen, so ergibt sich schließlich.

Die Doppelreihe:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{\mu,\nu} \frac{1}{(\mu\omega + \nu\omega')^\varrho},$$

wo der Akzent den Ausschluß der Kombination $\mu = 0$, $\nu = 0$ andeuten und $\frac{\omega'}{\omega}$ nicht reell sein soll, ist absolut konvergent oder absolut divergent, je nachdem $\varrho > 2$ oder $\varrho \leqq 2$.

Kapitel III
Unendliche Produkte.

§ 80. Konvergenz und Divergenz unendlicher Produkte.

1. Es sei eine unbegrenzte Folge komplexer Zahlen b_ν ($\nu = 0, 1, 2, \cdots$) von der Beschaffenheit gegeben, daß zu jedem bestimmten Index ν eine bestimmte, insbesondere *von Null verschiedene* Zahl b_ν gehört (womit zunächst nicht ausgeschlossen ist, daß die $|b_\nu|$ mit unbegrenzt wachsendem ν sämtlich oder zum Teil über jede Grenze wachsen oder unter jede Grenze hinabsinken können, sodaß also eventuell $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, |b_\nu| = +\infty$, $\underline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, |b_\nu| = 0$). Setzt man sodann für $n = 0, 1, 2, \cdots$

$$P_n = b_0 \cdot b_1 \cdots b_n, \tag{1}$$

kürzer geschrieben:

$$P_n = \prod_0^n {}_\nu\, b_\nu, \tag{2}$$

so heißt die *unendliche Faktorenfolge* oder das *unendliche Produkt*: $b_0 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdots$, kürzer geschrieben: $\prod\limits_0^\infty {}_\nu\, b_\nu$, *konvergent*, wenn, bei hinlänglich groß gewähltem n, P_n durch Hinzunahme *beliebig* vieler weiterer Faktoren: $b_{n+1} \cdot b_{n+2} \cdots b_{n+\varrho}$ nur noch Änderungen erleidet, die im Vergleich zu dem bereits gewonnenen Werte *beliebig klein* sind, sodaß also, wenn gesetzt wird:

$$P_{n+\varrho} = P_n \cdot (1 + k_{n,\varrho}),$$

$|k_{n,\varrho}|$ bei hinlänglich groß gewähltem n für jedes $\varrho = 1, 2, 3, \cdots$ *beliebig klein* wird.

Hiernach ergibt sich als *notwendige und hinreichende* Bedingung für die *Konvergenz* des betreffenden unendlichen Produktes die folgende:

Zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ muß sich n so fixieren lassen, daß:

$$\left| \frac{P_{n+\varrho}}{P_n} - 1 \right| < \varepsilon \text{ für } \varrho = 1, 2, 3, \cdots. \tag{3}$$

2. Die Ungleichung (3) hat also zunächst als *Definition* für die Konvergenz des unendlichen Produktes zu gelten. Es ergibt sich nun aber weiter folgendes:

Ist die Bedingung (3) *erfüllt, so besitzt P_n für $n \to \infty$ einen bestimmten von Null verschiedenen Grenzwert, etwa:*

$\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P$, *welcher der Wert*[1]) *des unendlichen Produktes* $b_0 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdots$ *genannt wird, in Zeichen:*

$$\prod_0^{\infty}{}_{\nu}\, b_\nu = P \tag{4}$$

Umgekehrt. Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ *als endlich und von Null verschieden, so konvergiert das fragliche unendliche Produkt in dem früher bezeichneten Sinne der Ungleichung* (3).

Beweis Bedeutet ϑ einen ganz beliebig anzunehmenden echten Bruch, so kann man demselben auf Grund der Voraussetzung (3) eine natürliche Zahl m so zuordnen, daß:

$$\left|\frac{P_{m+\varrho}}{P_m} - 1\right| < \vartheta \text{ für } \varrho = 1, 2, 3, \cdots\cdot,$$

also, wegen $|a - a'| \geqq \big||a| - |a'|\big|$, *a fortiori:*

$$\left|\left|\frac{P_{m+\varrho}}{P_m}\right| - 1\right| < \vartheta \quad (\varrho = 1, 2, 3, \cdots\cdot),$$

---

1) Man bezeichnet nicht selten zur Abkürzung den *Wert eines unendlichen Produktes* schlechthin als *das unendliche Produkt* und sagt also in diesem Falle nicht nur „eine Zahl werde *dargestellt* durch ein gewisses *unendliches Produkt*" (d. h. *rein formal* durch ein *Zeichen* von der Form. $b_0 b_1 \cdots b_\nu \cdots \cdot$, welches in diesem Falle zweckmäßiger als *unendliche Faktorenfolge* zu bezeichnen wäre), sondern auch geradezu: „sie sei *gleich diesem unendlichen Produkte*". Die Zwiespältigkeit dieser Ausdrucksweise tritt besonders deutlich hervor, wenn man sich der entsprechenden Bezeichnungen bei den *unendlichen Reihen* erinnert Hier wird stets scharf unterschieden zwischen der *unendlichen Reihe*, d. h. einem *Zeichen* von der Form $a_0 + a_1 + \cdots + a_\nu + \cdots\cdot$, und *der Summe der unendlichen Reihe*, d. h. dem *Grenzwerte* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_0^n{}_\nu\, a_\nu$ Man sagt demnach, „eine Zahl werde durch eine gewisse *unendliche Reihe dargestellt*" oder „sie sei *gleich* der *Summe dieser unendlichen Reihe*" (aber *nicht: „gleich der unendlichen Reihe"*). Allerdings besteht eine gewisse Zweideutigkeit der Bezeichnung, von der auch hier beständig Gebrauch gemacht wird, schon darin, daß durch das Symbol $\sum\limits_0^{\infty}{}_\nu\, a_\nu$ bzw $\prod\limits_0^{\infty}{}_\nu\, b_\nu$ sowohl *rein formal* die unendliche *Reihe* $a_0 + a_1 + \cdots + a_\nu + \cdots\cdot$ bzw. das unendliche *Produkt* $b_0 b_1 \cdots b_\nu \cdots\cdot$ (insbesondere ohne Rücksicht auf *Konvergenz* oder *Divergenz*), als auch die *Summe* der unendlichen Reihe bzw der *Wert* des unendlichen Produktes bezeichnet wird. Es empfiehlt sich diese kürzere Schreibweise jedoch nicht nur wegen der Raumersparnis, sondern auch des leichteren Überblickes halber, da die beständige Benützung jener ausführlicheren Bezeichnungen dem Texte nicht selten ein recht schwerfälliges und unübersichtliches Aussehen verleiht. Übrigens erscheint jedes Mißverständnis durch den Zusammenhang wohl stets ausgeschlossen

und daher, wenn man ν statt $m+\varrho$ schreibt:

$$-\vartheta < \left|\frac{P_\nu}{P_m}\right| - 1 < \vartheta \quad (\nu = m+1,\ m+2,\ m+3, \cdots\cdots),$$

somit schließlich:

$$(5) \qquad (1-\vartheta)\cdot|P_m| < |P_\nu| < (1+\vartheta)\cdot|P_m| \qquad (\nu > m).$$

Da hier $|P_m|$ eine *bestimmte positive* Zahl vorstellt, so sagt diese Ungleichung zunächst aus, daß alle $|P_\nu|$ für $\nu > m$ zwischen zwei festen *positiven* Zahlen liegen. Da das gleiche selbstverständlich auch für $|P_0|, |P_1|, \cdots |P_m|$ gilt, so existieren *positive* Zahlenpaare g, G von der Beschaffenheit, daß:

$$(6) \qquad g \leqq |P_\nu| \leqq G \text{ für } \nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots$$

Wird jetzt $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so läßt sich infolge der Voraussetzung (3) n so fixieren, daß:

$$\left|\frac{P_{n+\varrho}}{P_n} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{G} \quad (\varrho = 1, 2, 3, \cdots\cdots),$$

und da andererseits nach dem zweiten Teil der Ungleichung (6) jedenfalls:

$$|P_n| \leqq G,$$

so folgt durch Multiplikation der beiden letzten Ungleichungen:

$$(7) \qquad |P_{n+\varrho} - P_n| < \varepsilon \quad (\varrho = 1, 2, 3, \cdots\cdots),$$

eine Beziehung, welche ja die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines bestimmten $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ darstellt. Zugleich ergibt sich dann aber aus dem ersten Teil von Ungl. (6), daß:

$$(8) \qquad \lim_{n\to\infty} |P_n| \geqq g,$$

also, wie behauptet, $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ *endlich und von Null verschieden* ausfällt.

Geht man umgekehrt von der Voraussetzung (8) aus, so besteht eine Ungleichung von der Form:

$$|P_\nu| > g - \delta > 0 \qquad (\text{wo } \delta \geqq 0)$$

zum mindesten für alle ν, welche eine passend gewählte Zahl m übersteigen, und da andererseits $|P_0|, |P_1|, \cdots |P_m|$ oberhalb einer gewissen positiven Zahl liegen müssen, so kann man setzen:

$$(9) \qquad |P_\nu| \geqq g' > 0 \text{ für } \nu = 0, 1, 2 \cdots\cdots.$$

Wird dann wieder $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so läßt sich auf Grund der vorausgesetzten Existenz eines bestimmten $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ ein n so fixieren, daß:

$$|P_{n+\varrho} - P_n| < g' \cdot \varepsilon \quad (\varrho = 1, 2, 3, \cdots\cdots),$$

und da nach Ungl. (9) jedenfalls:

$$\left|\frac{1}{P_n}\right| \leqq \frac{1}{g'},$$

so folgt durch Multiplikation der beiden letzten Ungleichungen:

$$\left|\frac{P_{n+\varrho}}{P_n} - 1\right| < \varepsilon,$$

also, wie behauptet, die Existenz der Ungleichung (3).

3. Nach dem letzten Ergebnis kann man also die Existenz eines *endlichen, von Null verschiedenen* $\lim_{n \to \infty} P_n$ auch geradezu als *Definition* für die *Konvergenz* des unendlichen Produktes ansehen. Wenn also ein solcher Limes überhaupt *nicht existiert* (in welchem Falle man das unendliche Produkt auch als *unbestimmt* oder *oszillierend* bezeichnet) oder wenn er *unendlich* ausfällt (was nur so viel heißt, daß $\lim_{n \to \infty} |P_n| = +\infty$, während der Einheitsfaktor von P_n keinen bestimmten Grenzwert zu besitzen braucht), aber auch dann, wenn $\lim_{n \to \infty} P_n = 0$ wird, heißt das Produkt *divergent*. In den beiden letztgenannten Fällen schreibt man analog wie im Falle der Konvergenz:

$$(10) \qquad \prod_0^\infty {}_\nu\, b_\nu = \infty \text{ bzw. } \prod_0^\infty {}_\nu\, b_\nu = 0$$

und sagt, der *Wert* des unendlichen Produktes sei *unendlich groß* bzw. *Null*, oder auch: das Produkt *divergiere* nach *Unendlich* bzw. nach *Null*.

Daß auch das Auftreten des $\lim_{n \to \infty} P_n = 0$ in dem vorliegenden Zusammenhange als ein Fall von *Divergenz* angesehen wird, während man doch andererseits die *Zahlenfolge* der P_ν $(\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ im gleichen Falle als *konvergent* zu bezeichnen hätte, hat seinen Grund darin, daß es sich hier doch nicht lediglich um die *Konvergenz* einer *beliebigen Zahlenfolge* (P_ν), sondern darum handelt, in angemessener Weise festzusetzen, was man unter *Konvergenz* eines unbegrenzt fortsetzbaren *Multiplikations*prozesses verstehen soll. Wie nun bei der unbegrenzt fortzusetzenden *Summation* $\sum_0^\infty {}_\nu\, b_\nu$ die *Konvergenz* sich dadurch dokumentiert, daß die Summe $b_0 + b_1 + \cdots + b_n$ bei hinlänglich groß gewähltem n durch Hinzufügung beliebig vieler weiterer Summanden $b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+\varrho}$ nicht mehr wesentlich alteriert wird, was dann und nur dann der Fall ist, wenn $|b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+\varrho}|$ durch Wahl von n *beliebig klein* wird, so wird hier der Ein-

fluß der hinlänglich weit hinausgerückten Faktoren $b_{n+1} \cdot b_{n+2} \cdots b_{n+\varrho}$ dann und nur dann nach Möglichkeit eingeschränkt, wenn ihr Produkt, wie groß man auch ihre Anzahl ϱ annehmen möge, bei geeigneter Wahl von n sich *beliebig wenig von* 1 *unterscheidet.* Das aber ist gerade der Inhalt unserer definierenden Ungleichung (3). Und da diese letztere, wie bewiesen, allemal die Existenz eines endlichen, *von Null verschiedenen* $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ nach sich zieht, so ergibt sich daraus die logische Notwendigkeit, die unendlichen Produkte mit dem Grenzwerte *Null* zu den *divergenten* zu zählen. Im übrigen besitzen solche Produkte in der Tat einen anderen Charakter als die nach unserer Definition als *konvergent* bezeichneten.

4. Es verdient noch bemerkt zu werden, daß analog, wie mit $|P_{n+\varrho} - P_n|$ stets auch $|P_{\nu+\varrho} - P_\nu|$ für $\nu \geqq n$ beliebig klein wird, die Voraussetzung (3), d. h.:

$$\left|\frac{P_{n+\varrho}}{P_n} - 1\right| < \varepsilon \tag{3}$$

stets eine analoge Ungleichung für $\left|\frac{P_{\nu+\varrho}}{P_\nu} - 1\right|$ und $\nu \geqq n$ nach sich zieht Aus (3) folgt nämlich, wenn man statt ϱ einmal $\mu + \varrho$, das andere Mal μ schreibt und die betreffenden Ungleichungen mit $|P_n|$ multipliziert:

$$\begin{aligned} |P_{n+\mu+\varrho} - P_n| &< \varepsilon \cdot |P_n| \\ |P_{n+\mu} - P_n| &< \varepsilon \cdot |P_n| \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, 2, \cdots\cdots \\ \varrho = 0, 1, 2, \cdots\cdots \end{pmatrix},$$

und hieraus nach bekannter Schlußweise:

$$|P_{n+\mu+\varrho} - P_{n+\mu}| < 2\varepsilon \cdot |P_n|$$

oder, wenn man ν statt $n + \mu$ schreibt und die Ungleichung durch $|P_\nu|$ dividiert:

$$\left|\frac{P_{\nu+\varrho}}{P_\nu} - 1\right| < 2\varepsilon \cdot \left|\frac{P_n}{P_\nu}\right| \quad (\nu \geqq n,\ \varrho = 0, 1, 2, \cdots\cdots). \tag{11}$$

Andererseits folgt aus (3), daß für $\nu \geqq n$:

$$\left|\left|\frac{P_\nu}{P_n}\right| - 1\right| \leqq \left|\frac{P_\nu}{P_n} - 1\right| < \varepsilon$$

und daher:

$$1 - \varepsilon < \left|\frac{P_\nu}{P_n}\right| < 1 + \varepsilon$$

also insbesondere:

$$\left|\frac{P_n}{P_\nu}\right| < \frac{1}{1-\varepsilon},$$

sodaß Ungleichung (11) sich durch die folgende ersetzen läßt:

$$\left|\frac{P_{\nu+\varrho}}{P_\nu}-1\right|<\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\ (\nu \geqq n, \varrho = 0, 1, 2, \cdots\cdots), \tag{12}$$

d. h. der fragliche Ausdruck wird in der Tat für $\nu \geqq n$ mit ε beliebig klein.

Diese letzte Ungleichung (12), welche ja für den besonderen Wert $\nu = n$ dem Inhalt nach mit unserer definierenden Ungleichung (3) zusammenfällt und somit eine *hinreichende* Bedingung für die *Konvergenz* des Produktes bildet, erscheint also zugleich auch als eine *notwendige.* Setzt man speziell $\varrho = 1$, so ergibt sich daraus als eine jedenfalls *notwendige* (aber wie leicht zu sehen, nicht hinreichende) Konvergenzbedingung die folgende:

$$\left|\frac{P_{\nu+1}}{P_\nu}-1\right| = |b_{\nu+1}-1| < \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad (\nu \geqq n) \tag{13}$$

d. h. schließlich:

$$\lim_{\nu\to\infty} b_\nu = 1 \tag{14}$$

Wir wollen daher von jetzt ab b_ν in die Form setzen:

$$b_\nu = 1 + a_\nu, \tag{15}$$

sodaß die *notwendige* Konvergenzbedingung (14) die Gestalt annimmt:

$$\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0. \tag{16}$$

§ 81. Absolute Konvergenz eines unendlichen Produktes als hinreichende Bedingung für unbedingte Konvergenz.

1. Es sei zunächst α_ν $(\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ eine unbegrenzte Folge *reeller positiver* Zahlen. Dann gilt der Satz:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Produktes $\prod\limits_0^\infty{}_\nu (1+\alpha_\nu)$ *besteht in der Konvergenz der Reihe* $\sum\limits_0^\infty{}_\nu \alpha_\nu$. *Ist dieselbe erfüllt, so ist überdies der Wert des Produktes unabhängig von der Anordnung der Faktoren.*

Beweis. Setzt man:

$$\prod_0^m{}_\nu (1+\alpha_\nu) = \mathsf{A}_m \quad (m = 0, 1, 2, \cdots\cdots), \tag{1}$$

so wird:

$$\left|\frac{A_{n+\varrho}}{A_n}-1\right| = (1+\alpha_{n+1})(1+\alpha_{n+2})\cdots(1+\alpha_{n+\varrho})-1$$
$$= \alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\cdots+\alpha_{n+\varrho}$$
$$+\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}+\alpha_{n+1}\alpha_{n+3}+\cdots+\alpha_{n+\varrho-1}\alpha_{n+\varrho}$$
$$+\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$+\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\cdots\alpha_{n+\varrho}$$

und daher, wenn:

$$\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\cdots+\alpha_{n+\varrho}=\alpha_{n,\varrho} \tag{2}$$

gesetzt wird:

$$\left|\frac{A_{n+\varrho}}{A_n}-1\right| \begin{cases} > \alpha_{n,\varrho} \\ < \alpha_{n,\varrho}+\alpha_{n,\varrho}^2+\cdots+\alpha_{n,\varrho}^{\varrho} \text{ [1]} \end{cases} \tag{3}$$

Soll die linke Seite dieser Ungleichungen durch Wahl von n beliebig klein werden, so muß das gleiche jedenfalls für $\alpha_{n,\varrho}$ d. h. für $\sum_{n+1}^{n+\varrho}\alpha_\nu$ gelten, mit anderen Worten $\sum_0^{\infty}\alpha_\nu$ muß *konvergieren* Die *Konvergenz* dieser Reihe erweist sich also als *notwendig* für diejenige des fraglichen Produktes.

Ist nun aber diese Bedingung erfüllt, so läßt sich zu beliebig kleinem $\delta>0$ ein n so fixieren, daß:

$$\alpha_{n,\varrho}<\delta \quad (\varrho=1,2,3,\cdots\cdot)$$

und daher auf Grund der zweiten Ungleichung (3):

$$\left|\frac{A_{n+\varrho}}{A_n}-1\right| < \delta+\delta^2+\cdots+\delta^{\varrho} \tag{4}$$
$$=\delta\cdot\frac{1-\delta^{\varrho}}{1-\delta}<\frac{\delta}{1-\delta}, \text{also} <\varepsilon, \text{wenn } \frac{\delta}{1-\delta}\leqq\varepsilon, \text{ d.h. } \delta\leqq\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Die *Konvergenz* von $\sum_0^{\infty}\alpha_\nu$ ist somit auch *hinreichend* für diejenige des in Frage stehenden Produktes.[2])

---

1) Ist $\nu>1$, so enthält $(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+\varrho})^{\nu}$ offenbar mit Sicherheit jede Kombination zur ν^{ten} Klasse von $a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots a_{n+\varrho}$ mindestens *einmal*, außerdem u. a. die Glieder $a_{n+1}^{\nu}, a_{n+2}^{\nu}, \cdots a_{n+\varrho}^{\nu}$, sodaß also jedenfalls $(a_{n+1}+a_{n+2}\cdots+a_{n+\varrho})^{\nu}$ *größer* ist als die Summe jener Kombinationen zur ν^{ten} Klasse

2) Die vorliegende Beweisform wurde gewählt, teils um sich auf die Benützung der allereinfachsten Hilfsmittel zu beschränken, teils um den Beweis mit Rücksicht auf das in Nr 2 abzuleitende allgemeinere Resultat direkt auf die

Sei nun das Produkt konvergent und etwa:

$$(5) \qquad \prod_0^\infty {}_\nu (1 + \alpha_\nu) = \mathsf{A} \text{ (wo also } \mathsf{A} > 0).$$

Man bemerke zunächst, daß, wegen $1 + \alpha_\nu > 1$, A_ν mit ν *monoton zunimmt* und daher:

$$(6) \qquad \mathsf{A}_\nu < \mathsf{A} \text{ (für jedes } \nu).$$

Bezeichnet man sodann mit n_ν $(\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ irgendeine *Umordnung* der Zahlen $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ und setzt:

$$(7) \qquad \prod_0^\mu {}_\nu \left(1 + \alpha_{n_\nu}\right) = \mathsf{A}'_\mu,$$

so kann man *jeder* Zahl μ eine Zahl $\nu \geqq \mu$ so zuordnen, daß A_ν *alle* Faktoren enthält, welche in A'_μ vorkommen.[1]) Alsdann ist aber:

$$(8) \qquad \mathsf{A}'_\mu \leqq \mathsf{A}_\nu < \mathsf{A},$$

woraus zunächst ersichtlich ist, daß ein bestimmter $\lim_{\mu \to \infty} \mathsf{A}'_\mu = \mathsf{A}'$ *existiert*, also das umgeordnete Produkt $\prod \left(1 + \alpha_{n_\nu}\right)$ jedenfalls *konvergiert*. Zugleich ergibt sich aus Ungl. (8), daß:

$$(9) \qquad \mathsf{A}' \leqq \mathsf{A}.$$

Andererseits kann man, nachdem jetzt die Konvergenz von $\prod \left(1 + \alpha_{n_\nu}\right)$ gegen den Wert A' bereits feststeht, in ganz analoger Weise erschließen, daß auch:

$$(10) \qquad \mathsf{A} \leqq \mathsf{A}'.$$

Bedingung $\left|\frac{\mathsf{A}_{n+\varrho}}{\mathsf{A}_n} - 1\right| < \varepsilon$ zu stützen. Sonst könnte man kürzer folgendermaßen verfahren. Man findet unmittelbar.

$$\mathsf{A}_n > \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$

die *Konvergenz* der Reihe $\sum \alpha_\nu$ ist also jedenfalls eine *notwendige* Bedingung für diejenige des Produktes.

Andererseits hat man (s. § 33, S. 203, Ungl. (21)):

$$\mathsf{A}_n < e^{\alpha_0} \cdot e^{\alpha_1} \cdots e^{\alpha_n}$$
$$= e^{\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n},$$

die *Konvergenz* von $\sum \alpha_\nu$ ist also jedenfalls *hinreichend* dafür, daß A_n unter einer endlichen Grenze bleibt. Da aber A_n mit n *monoton* zunimmt, so folgt, daß dann $\lim_{n \to \infty} \mathsf{A}_n$ eine bestimmte positive Zahl > 1 vorstellt, also $\prod (1 + \alpha_\nu)$ *konvergiert*.

1) Man braucht nur für ν die *größte* der Zahlen. $n_0, n_1, \cdots n_\mu$ zu nehmen.

Aus der Verbindung der beiden Beziehungen (9) und (10) ergibt sich also:

$$(11)\qquad \mathsf{A}' = \mathsf{A},\ \text{d. h.}\ \prod_0^\infty{}_{\nu} \left(1 + \alpha_{n_\nu}\right) = \prod_0^\infty{}_{\nu} (1 + \alpha_\nu),$$

womit der oben ausgesprochene Satz vollständig bewiesen ist.

2. Es sei jetzt (a_ν) eine Folge beliebiger *komplexer* Zahlen (d. h. *reelle* Zahlen als spezielle Fälle der komplexen immer inbegriffen, mit einziger Ausnahme von $a_\nu = -1$, da das Auftreten eines Faktors $1 + a_\nu = 0$ hier ein für allemal ausgeschlossen bleiben soll). Alsdann gilt der Satz:

Ist $\prod_0^\infty{}_{\nu} (1 + |a_\nu|)$ *konvergent, so konvergiert auch das Produkt* $\prod_0^\infty{}_{\nu} (1 + a_\nu)$ *und sein Wert ist von der Anordnung der Faktoren unabhängig.*

Beweis. Setzt man:

$$(12)\qquad |a_\nu| = \alpha_\nu,\quad \prod_0^k{}_{\nu} (1 + \alpha_\nu) = \mathsf{A}_k,\quad \prod_0^k{}_{\nu} (1 + a_\nu) = A_k,$$

so folgt:

$$\begin{aligned}\frac{A_{\nu+\varrho}}{A_\nu} - 1 &= (1 + a_{\nu+1})(1 + a_{\nu+2}) \cdots (1 + a_{\nu+\varrho}) - 1 \\ &= a_{\nu+1} + a_{\nu+2} + a_{\nu+1} \cdot a_{\nu+2} + \cdots + a_{\nu+1} \cdot a_{\nu+2} \cdots a_{\nu+\varrho}\end{aligned}$$

und analog:

$$\begin{aligned}\frac{\mathsf{A}_{\nu+\varrho}}{\mathsf{A}_\nu} - 1 &= \alpha_{\nu+1} + \alpha_{\nu+2} + \alpha_{\nu+1} \cdot \alpha_{\nu+2} + \cdots + \alpha_{\nu+1} \cdot \alpha_{\nu+2} \cdots \alpha_{\nu+\varrho} \\ &= |a_{\nu+1}| + |a_{\nu+2}| + |a_{\nu+1} \cdot a_{\nu+2}| + \cdots + |a_{\nu+1} \cdot a_{\nu+2} \cdots a_{\nu+\varrho}|,\end{aligned}$$

somit:

$$(13)\qquad \left|\frac{A_{\nu+\varrho}}{A_\nu} - 1\right| \leqq \frac{\mathsf{A}_{\nu+\varrho}}{\mathsf{A}_\nu} - 1 \quad \begin{pmatrix}\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots \\ \varrho = 0, 1, 2, \cdots\cdots\end{pmatrix}.$$

Da aber das Produkt $\prod (1 + \alpha_\nu)$ nach Voraussetzung *konvergiert*, so läßt sich die rechte Seite dieser Ungleichung durch Wahl von $\nu = n$ beliebig klein machen, also auch die linke, womit die *Konvergenz* des Produktes A_ν für $\nu \longrightarrow \infty$ bewiesen ist.

Sei nun:

$$(14) \qquad \prod_0^\infty {}_\nu (1 + a_\nu) = A, \quad \prod_0^\infty {}_\nu (1 + \alpha_\nu) = \mathsf{A}$$

Bedeutet dann wiederum (n_ν) irgendeine Umordnung der Zahlenreihe (ν) und setzt man:

$$(15) \qquad \prod_0^\mu {}_\nu (1 + a_{n_\nu}) = A'_\mu, \quad \prod_0^\mu {}_\nu (1 + \alpha_{n_\nu}) = \mathsf{A}'_\mu,$$

so *konvergiert* zunächst nach Nr. 1 das *zweite* dieser Produkte für $\mu \longrightarrow \infty$ gegen den Wert A, also:

$$(16) \qquad \prod_0^\infty {}_\nu (1 + \alpha_{n_\nu}) = \lim_{\mu \to \infty} \mathsf{A}'_\mu = \mathsf{A}.$$

Aus der *Konvergenz* dieses Produktes folgt dann aber nach dem soeben bewiesenen Satze diejenige von $\prod_0^\infty {}_\nu (1 + a_{n_\nu})$, sodaß man setzen kann:

$$(17) \qquad \prod_0^\infty {}_\nu (1 + a_{n_\nu}) = \lim_{\mu \to \infty} A'_\mu = A',$$

wo A' eine bestimmte, von Null verschiedene Zahl bedeutet, von welcher nur noch nachzuweisen ist, daß sie mit A zusammenfällt.

Man kann nun jeder natürlichen Zahl μ eine andere p_μ so zuordnen, daß A_{p_μ} und um so mehr A_ν für $\nu \geqq p_\mu$ *alle* Faktoren enthält, welche in A'_μ vorkommen, sodaß also $\frac{\mathsf{A}_\nu}{\mathsf{A}'_\mu} - 1 > 0$ ausfällt. Alsdann wird — ganz nach Analogie von Ungl. (13):

$$(18) \qquad 0 \leqq \left| \frac{A_\nu}{A'_\mu} - 1 \right| \leqq \frac{\mathsf{A}_\nu}{\mathsf{A}'_\mu} - 1 \text{ für jedes } \mu \text{ und für } \nu \geqq p_\mu,$$

und daher für $\nu \longrightarrow \infty$:

$$(19) \qquad 0 \leqq \left| \frac{A}{A'_\mu} - 1 \right| \leqq \frac{\mathsf{A}}{\mathsf{A}'_\mu} - 1 \text{ für jedes } \mu.$$

Daraus folgt aber schließlich für $\mu \longrightarrow \infty$ mit Berücksichtigung von Gl. (16), (17):

$$\left| \frac{A}{A'} - 1 \right| = 0, \text{ d. h. } A' = A, \text{ q. e. d.}$$

3. Da die Konvergenz des unendlichen Produktes $\prod(1+|a_\nu|)$ nach dem Satze von Nr. 1 von derjenigen der Reihe $\sum|a_\nu|$ abhängt, so kann man den Inhalt des eben bewiesenen Satzes auch folgendermaßen aussprechen:

Das unendliche Produkt $\prod\limits_0^\infty{}_\nu (1+a_\nu)$ *besitzt einen bestimmten, von der Anordnung der Faktoren unabhängigen Wert, wenn die Reihe* $\sum\limits_0^\infty{}_\nu a_\nu$ *absolut (bzw unbedingt) konvergiert.*

Nennt man ferner das unendliche Produkt $\prod(1+a_\nu)$ *absolut* konvergent, wenn das Produkt $\prod(1+|a_\nu|)$ konvergiert[1]), dagegen *unbedingt* konvergent, wenn es *unabhängig von der Anordnung der Faktoren* einen eindeutig bestimmten (von Null verschiedenen) Wert hat, so kann man die vorstehenden Resultate folgendermaßen zusammenfassen:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die absolute Konvergenz des unendlichen Produktes $\prod(1+a_\nu)$ *besteht in der absoluten Konvergenz der Reihe* $\sum a_\nu$.

Das absolut konvergente Produkt konvergiert auch stets unbedingt.

Hiernach bildet also die *absolute* Konvergenz des Produktes $\prod(1+a_\nu)$ eine *hinreichende* Bedingung für dessen *unbedingte* Konvergenz. In den folgenden beiden Paragraphen soll nun gezeigt werden, daß diese Bedingung auch eine *notwendige* ist, sodaß aus der *unbedingten* Konvergenz eines Produktes stets auch auf dessen *absolute* Konvergenz geschlossen werden kann.

§ 82. Besondere Produkte, welche nicht anders als absolut konvergieren können.

1. Die in Nr. 1 des vorigen Paragraphen betrachteten Produkte von der Form $\prod(1+\alpha_\nu)$, wo α_ν *reell und* >0, *konvergieren* und *divergieren* gleichzeitig mit der Reihe $\sum\alpha_\nu$: das letztere folgt daraus, daß ja die *Konvergenz* von $\sum\alpha_\nu$ auch eine *notwendige* Bedingung für diejenige des unendlichen Produktes bildet. Im übrigen erkennt man auch ohne weiteres aus der Ungleichung:

---

1) Daß das Produkt $\prod(1+a_\nu)$ in diesem Falle auch wirklich stets selbst *konvergiert*, folgt ja aus dem Satze von Nr. 2.

$$(1) \qquad \prod_0^n{}_\nu (1+\alpha_\nu) > 1 + \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$

daß $\prod_0^\infty{}_\nu (1+\alpha_\nu)$ mit $\sum_0^\infty{}_\nu \alpha_\nu$ nach $+\infty$ *divergiert*. Ein Produkt dieser Art konvergiert somit *absolut* (und dann *eo ipso unbedingt*) oder *gar nicht*.

Sei jetzt:

$$(2) \qquad A'_n = (1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\cdots(1-\alpha_n),$$

wo wiederum $\alpha_\nu > 0$ (mit Ausschluß von $\alpha_\nu = 1$). Da wir uns auf die Betrachtung solcher Produkte beschränken können, für welche $\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = 0$, so dürfen wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit annehmen, daß die α_ν durchweg *unter der Einheit* liegen (da man dies ja nötigenfalls durch Abtrennung einer *endlichen* Anzahl von Faktoren, also ohne Änderung der Konvergenz bzw. Divergenz des betreffenden Produktes erzielen kann). Alsdann hat man:

$$0 < 1 - \alpha_\nu^2 < 1,$$

also auch:

$$0 < 1 - \alpha_\nu < \frac{1}{1+\alpha_\nu},$$

und somit:

$$(3) \qquad A'_n < \frac{1}{(1+\alpha_0)(1+\alpha_1)\cdots(1+\alpha_n)},$$

sodaß im Falle der *Divergenz* von $\prod(1+\alpha_\nu)$ bzw. $\sum \alpha_\nu$ sich ergibt:

$$(4) \qquad \lim_{n\to\infty} A'_n = 0,$$

d. h. das fragliche Produkt *divergiert* in diesem Falle *nach Null*. Da dasselbe andererseits nach dem Satze Nr. 2 des vorigen Paragraphen gleichzeitig mit $\prod(1+\alpha_\nu)$ *absolut konvergiert*, so ergibt sich, daß auch ein Produkt von der Form $\prod(1-\alpha_\nu)$ entweder *absolut* (und dann *eo ipso unbedingt*) oder *überhaupt nicht konvergiert*.

2. Es erscheint für das Folgende wichtig, zunächst festzustellen, daß die analoge Eigenschaft auch den unendlichen Produkten von der Form:

$$\prod_0^\infty{}_\nu (1+\alpha_\nu i), \quad \prod_0^\infty{}_\nu (1-\alpha_\nu i)$$

zukommt. Es werde gesetzt:

$$(5) \qquad \prod_0^n{}_\nu (1+\alpha_\nu i) = A_n, \quad \prod_0^n{}_\nu (1-\alpha_\nu i) = \overline{A}_n.$$

Alsdann soll gezeigt werden, daß diese Produkte für $n = \infty$ gleichzeitig mit der unendlichen Reihe $\sum \alpha_\nu$ stets in einer sogleich näher zu charakterisierenden Weise *divergieren*. Man hat zunächst:

$$(6) \qquad \left. \begin{array}{l} |A_n|^2 \\ |\overline{A}_n|^2 \end{array} \right\} = A_n \cdot \overline{A}_n = \prod_0^n {}_\nu (1 + \alpha_\nu^2),$$

und man erkennt hieraus, daß $\lim_{n\to\infty} |A_n| = \lim_{n\to\infty} |\overline{A}_n|$ entweder *endlich und bestimmt* (und zwar offenbar > 1) oder *positiv unendlich* sein müssen. Das *erstere* findet offenbar dann und nur dann statt, wenn $\sum \alpha_\nu^2$ *konvergiert* (gleichgültig ob $\sum \alpha_\nu$ konvergieren oder divergieren mag), das *letztere*, wenn $\sum \alpha_\nu^2$ *divergiert*. Wir zeigen nun, daß in *jedem* dieser beiden Fälle der *Einheitsfaktor* von A_n bzw. $\overline{A}_n$ für $n \longrightarrow \infty$ *keinen bestimmten Grenzwert* besitzt, falls $\sum \alpha_\nu$ *divergiert*

Setzt man allgemein:

$$(7) \qquad A_\nu = \mathsf{B}_\nu + \Gamma_\nu \cdot i$$

und daher:

$$(8) \qquad \overline{A}_\nu = \mathsf{B}_\nu - \Gamma_\nu i$$

(wegen: $A_\nu \cdot \overline{A}_\nu = |A_\nu|^2 = B_\nu^2 + \Gamma_\nu^2$), so werden die *Einheitsfaktoren* von A_ν bzw. $\overline{A}_\nu$ dargestellt durch die Ausdrücke:

$$(9) \quad C_\nu = \frac{\mathsf{B}_\nu}{|A_\nu|} + \frac{\Gamma_\nu}{|A_\nu|} \cdot i \ \text{ bzw. } \ \overline{C}_\nu = \frac{\mathsf{B}_\nu}{|A_\nu|} - \frac{\Gamma_\nu}{|A_\nu|} \cdot i \ \ (\text{wo: } |A_\nu| = \sqrt{\mathsf{B}_\nu^2 + \Gamma_\nu^2}).$$

Man erkennt hieraus zunächst, daß für $\nu \longrightarrow \infty$ entweder C_ν und $\overline{C}_\nu$ *gleichzeitig* bestimmte Grenzwerte besitzen oder *gleichzeitig* unbestimmt werden. Es genügt daher, sich des weiteren mit *einem* dieser Ausdrücke, etwa mit C_ν zu beschäftigen.

Soll nun C_ν für $\nu \longrightarrow \infty$ einen *bestimmten Grenzwert* besitzen, so sind nach dem zuvor Gesagten folgende zwei Möglichkeiten zu unterscheiden:

Entweder hat $\lim_{\nu\to\infty} |A_\nu| = \lim_{\nu\to\infty} \sqrt{\mathsf{B}_\nu^2 + \Gamma_\nu^2}$ einen *bestimmten, von Null verschiedenen* Wert, sodaß auch *mindestens einer* der Grenzwerte $\lim_{\nu\to\infty} \mathsf{B}_\nu$, $\lim_{\nu\to\infty} \Gamma_\nu$ *bestimmt und von Null verschieden* sein müßte (NB. der andere könnte dann auch $= 0$ sein).

Oder: es ist $\lim_{\nu\to\infty} |A_\nu| = \infty$, in welchem Falle offenbar *mindestens einer* jener Grenzwerte *mit bestimmtem Vorzeichen unendlich* werden müßte.

In *jedem* dieser beiden Fälle müßte aber eine ganze positive Zahl m existieren, sodaß für $\nu \geqq m$ *mindestens eine* der beiden Zahlen B_ν,

Γ_ν absolut genommen *über* einer gewissen positiven Zahl g liegt und beständig *dasselbe Vorzeichen* besitzt. Es bleibt also nur nachzuweisen, daß *jede* dieser Annahmen mit der *Divergenz* von $\sum \alpha_\nu$ unverträglich ist.

Hierbei genügt es aber vollständig, diesen Beweis für die *eine* Annahme zu führen, daß B_ν — d. h. der *reelle Teil* von A_ν — für $\nu \geqq m$ beständig *positiv* und $> g$ bleibt.

Wäre nämlich B_ν für $\nu \geqq m$ *negativ* (also: $-\mathrm{B}_\nu > g$), so brauchte man statt des Produktes A_ν nur das folgende:

$$A'_\nu = -A_\nu = (-\mathrm{B}_\nu) + (-\Gamma_\nu) i$$

zu betrachten, welches jetzt einen für $\nu \geqq m$ *positiven* reellen Teil $> g$ besitzt. Und soll eine der betreffenden Annahmen für Γ_ν gelten, so kann man statt A_ν eins der folgenden Produkte einführen:

$$A''_\nu = \mp i \cdot A_\nu = (\pm \Gamma_\nu) + (\mp \mathrm{B}_\nu) \cdot i,$$

von denen dann eins wiederum einen für $\nu \geqq m$ *positiven* reellen Teil $> g$ besitzt. Hat dann der Einheitsfaktor von A'_ν bzw. A''_ν für $\nu \longrightarrow \infty$ *keinen* bestimmten Grenzwert, so gilt offenbar wegen $|A'_\nu| = |A''_\nu| = |A_\nu|$ das gleiche für den Einheitsfaktor von A_ν (bzw. $\overline{A}_\nu$).

Nehmen wir also jetzt an, man habe:

$$\mathrm{B}_\nu > g > 0 \text{ für } \nu \geqq m. \tag{10}$$

Aus:

$$A_{\nu+1} = \mathrm{B}_{\nu+1} + \Gamma_{\nu+1} \cdot i = (\mathrm{B}_\nu + \Gamma_\nu \cdot i)(1 + \alpha_{\nu+1} \cdot i)$$

folgt nun:

$$\begin{cases} \text{(a)} \ \mathrm{B}_{\nu+1} = \mathrm{B}_\nu - \alpha_{\nu+1} \cdot \Gamma_\nu \\ \text{(b)} \ \Gamma_{\nu+1} = \Gamma_\nu + \alpha_{\nu+1} \cdot \mathrm{B}_\nu. \end{cases} \tag{11}$$

Setzt man in der zweiten dieser Gleichungen der Reihe nach:

$$\nu = m,\ m+1, \cdots m + \varrho - 1,$$

so ergibt sich durch Addition der betreffenden Gleichungen:

$$\Gamma_{m+\varrho} = \Gamma_m + (\alpha_{m+1} \cdot \mathrm{B}_m + \alpha_{m+2} \cdot \mathrm{B}_{m+1} + \cdots + \alpha_{m+\varrho} \cdot \mathrm{B}_{m+\varrho-1})$$

und daher mit Berücksichtigung von Ungl. (10):

$$\Gamma_{m+\varrho} > \Gamma_m + g \cdot \alpha_{m,\varrho}, \tag{12}$$

sofern wiederum:

$$\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} + \cdots + \alpha_{m+\varrho} = \alpha_{m,\varrho} \tag{13}$$

gesetzt wird.

Da nun infolge der vorausgesetzten Divergenz von $\sum \alpha_\nu$ die *positive* Zahl $\alpha_{m,\varrho}$ durch Wahl von ϱ beliebig groß gemacht werden kann, so läßt sich insbesondere eine Zahl $\varrho = n$ so fixieren, daß:

$$\Gamma_m + g \cdot \alpha_{m,n} \geqq 1,$$

also nach Ungl. (12):

$$\Gamma_{m+n} > 1 \tag{14}$$

wird. Da aber aus Gl. (11b) mit Berücksichtigung von Ungl. (10) folgt, daß:

$$\Gamma_{\nu+1} > \Gamma_\nu \quad \text{für: } \nu \geqq m,$$

so zieht die Ungleichung (14) sofort die folgende allgemeinere nach sich:

$$\Gamma_{m+n+\lambda} > 1 \quad \text{für: } \lambda = 0, 1, 2, \cdots\cdots \tag{15}$$

Legt man jetzt in Gl. (11a) dem Index ν der Reihe nach die Werte:

$$m + n,\ m + n + 1, \cdots, m + n + \varrho - 1$$

bei, so ergibt die Addition der resultierenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_{m+n+\varrho} = \mathrm{B}_{m+n} - (\alpha_{m+n+1} \cdot \Gamma_{m+n} + \alpha_{m+n+2} \cdot \Gamma_{m+n+1} + \cdots \\ + \alpha_{m+n+\varrho} \Gamma_{m+n+\varrho-1}) \\ < \mathrm{B}_{m+n} - \alpha_{m+n,\varrho} \quad \text{(nach Ungl. (14), (15))}. \end{aligned} \tag{16}$$

Da aber $\alpha_{m+n,\varrho}$ für hinlänglich große Werte von ϱ jede noch so große Zahl übersteigt, so muß $\mathrm{B}_{m+n+\varrho}$ von einem gewissen Werte ϱ ab *negativ* ausfallen: die Annahme, daß B_ν für $\nu \geqq m$ sein Vorzeichen nicht mehr wechseln sollte, erweist sich somit als unzulässig.

Hieraus folgt aber in Verbindung mit dem zuvor Gesagten, daß der Einheitsfaktor von A_ν — und somit auch derjenige von $\bar{A}_\nu$ — für $\nu \longrightarrow \infty$ *keinen* bestimmten Grenzwert besitzen kann, falls $\sum \alpha_\nu$ *divergiert*, und es gilt somit der Satz:

> *Ein unendliches Produkt von der Form* $\prod\limits_0^\infty{}_\nu (1 + \alpha_\nu i)$ *bzw.* $\prod\limits_0^\infty{}_\nu (1 - \alpha_\nu i)$ (*wo* $\alpha_\nu > 0$) ***divergiert*** *stets gleichzeitig mit der Reihe* $\sum\limits_0^\infty{}_\nu \alpha_\nu$, *und zwar in der Weise, daß der Einheitsfaktor* ***unbestimmt wird*** (gleichgültig, ob der absolute Betrag einen endlichen Grenzwert besitzt oder unendlich groß wird, was von der Konvergenz bzw. Divergenz der Reihe $\sum\limits_0^\infty{}_\nu \alpha_\nu^2$ abhängt).
>
> *Ein solches Produkt kann daher, wenn es überhaupt konvergiert, nur* ***absolut*** *konvergieren.*

3 Wir betrachten schließlich unendliche Produkte von der Form $\prod_0^\infty{}_\nu (1 + \gamma_\nu + \delta_\nu i)$, wo die γ_ν und ebenso die δ_ν reelle Zahlen *gleichen* Vorzeichens mit dem Grenzwerte Null für $\nu \longrightarrow \infty$ bedeuten (d. h. die γ_ν sollen *unter sich*, desgleichen die δ_ν *unter sich* — aber nicht notwendig die γ_ν mit den δ_ν — gleiches Vorzeichen besitzen). Hierbei kann man wiederum ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit voraussetzen, daß die $|\gamma_\nu|$, $|\delta_\nu|$ durchweg < 1 sind; auch dürfen beliebig viele der Zahlen γ_ν, δ_ν gleich Null sein. Setzt man alsdann:

$$\prod_0^n{}_\nu (1 + \gamma_\nu + \delta_\nu i) = P_n \tag{17}$$

und zerlegt jeden Faktor dieses Produktes folgendermaßen:

$$1 + \gamma_\nu + \delta_\nu i = (1 + \gamma_\nu)\left(1 + \frac{\delta_\nu}{1+\gamma_\nu} \cdot i\right),$$

so wird der *Einheitsfaktor* dieses Ausdruckes wegen $1 + \gamma_\nu > 0$ nur von dem Teilfaktor:

$$\left(1 + \frac{\delta_\nu}{1+\gamma_\nu} \cdot i\right)$$

abhängen (da ja der Einheitsfaktor einer komplexen Zahl durch Multiplikation mit einem *positiven* Faktor keine Änderung erleidet). Infolgedessen wird auch der Einheitsfaktor des Produktes:

$$\begin{cases} P_n = \prod_0^n{}_\nu (1 + \gamma_\nu) \cdot \prod_0^n{}_\nu \left(1 + \frac{\delta_\nu}{1+\gamma_\nu} i\right) \\ \quad = P_n' \cdot P_n'' \end{cases} \tag{18}$$

lediglich von dem *zweiten* Teilprodukte P_n'' und daher schließlich derjenige von $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \prod_0^\infty{}_\nu (1 + \gamma_\nu + \delta_\nu i)$ lediglich von $\lim\limits_{n\to\infty} P_n'' = \prod_0^\infty{}_\nu \left(1 + \frac{\delta_\nu}{1+\gamma_\nu} i\right)$ abhängen. Daraus folgt aber (nach dem Satze von Nr. 2), daß der Einheitsfaktor von P_n für $n \longrightarrow \infty$ *unbestimmt* werden müßte, wenn das Produkt

$$\lim_{n\to\infty} P_n'' = \prod_0^\infty{}_\nu \left(1 + \frac{\delta_\nu}{1+\gamma_\nu} \cdot i\right) \tag{19}$$

divergierte, sodaß also die *Konvergenz* dieses Produktes als eine *notwendige* Bedingung für diejenige des Produktes $(1 + \gamma_\nu + \delta_\nu i)$ erscheint. Setzt man sodann Gl. (18) in die Form:

$$P_n' = \frac{P_n}{P_n''},$$

so erkennt man, daß mit den Produkten P_n, P''_n auch stets das Produkt P'_n *konvergieren* muß, sodaß sich die *Konvergenz* dieses letzteren Produktes als eine zweite *notwendige* (und übrigens, wie Gl. (18) lehrt, in Verbindung mit jener ersten auch *hinreichende*) Bedingung ergibt. Die Konvergenz der beiden unendlichen Produkte $\Pi(1+\gamma_\nu)$, $\Pi\left(1+\frac{\delta_\nu}{1+\gamma_\nu}i\right)$ erfordert aber (da die γ_ν, desgleichen die δ_ν gleiches Vorzeichen besitzen und $1+\gamma_\nu > 0$) nach Nr. 1 und 2 die Konvergenz der *beiden* Reihen $\sum|\gamma_\nu|$, $\sum\frac{|\delta_\nu|}{1+\gamma_\nu}$. Da aber die letztere Reihe — wegen: $\lim\limits_{\nu\to\infty}\gamma_\nu = 0$ — stets *gleichzeitig* mit der Reihe $\sum|\delta_\nu|$ *konvergiert* und *divergiert*, so lassen sich diese *zwei* Bedingungen auch ersetzen durch die Konvergenz der Reihe $\sum(|\gamma_\nu| + |\delta_\nu|\cdot i)$ oder schließlich durch diejenige von $\sum|\gamma_\nu + \delta_\nu i|$, und man erhält somit den Satz:

> *Die notwendige (und hinreichende) Bedingung für die Konvergenz des Produktes:*
>
> $$\prod_0^\infty{}_\nu (1+\gamma_\nu+\delta_\nu i),$$
>
> *wo die reellen Zahlen γ_ν unter sich, desgleichen die δ_ν unter sich gleiches Vorzeichen besitzen, besteht in der (absoluten) Konvergenz der Reihe $\sum(\gamma_\nu+\delta_\nu i)$.*
>
> *Ein solches Produkt kann daher, wenn es überhaupt konvergiert, nur absolut konvergieren*

§ 83. Absolute Konvergenz eines unendlichen Produktes als notwendige Bedingung für unbedingte Konvergenz.

1. Um das zuletzt gewonnene Resultat auf ein unendliches Produkt von der Form $\Pi(1+a_\nu)$ anwenden zu können, falls die a_ν beliebige komplexe Zahlen bedeuten, bedürfen wir nur noch des folgenden Hilfssatzes (dessen Analogon für unendliche Reihen § 58, Nr. 1, S. 406, ausgesprochen wurde):

> *Bei einem unbedingt konvergenten Produkte konvergiert auch jedes beliebig herausgehobene Teilprodukt.*

Beweis. Es sei:

$$(1) \qquad \prod_0^\infty{}_\nu (1+a_\nu) = A$$

ein *unbedingt* konvergentes Produkt. Zerlegt man die Folge der a_ν in *zwei* unbegrenzte Folgen (b_μ), (c_ν) und setzt:

$$(2) \qquad \begin{cases}(1+b_0)(1+b_1)\cdots(1+b_\mu)=B_\mu\\(1+c_0)(1+c_1)\cdots(1+c_\nu)=C_\nu,\end{cases}$$

so folgt aus der *unbedingten* Konvergenz des obigen Produktes, daß:

$$(3) \qquad \lim_{\mu,\nu\to\infty} B_\mu C_\nu = A \quad (\text{wo also: } |A|>0),$$

daß also die *Doppel*folge $(B_\mu C_\nu)$ gegen den Grenzwert A konvergiert. Infolgedessen müssen sich jeder beliebigen positiven Zahl ε zwei Zahlen m, n so zuordnen lassen, daß:

$$(4) \qquad |A-B_\mu\cdot C_\nu|<\varepsilon \text{ für } \mu\geqq m,\ \nu\geqq n.$$

Nimmt man hier ε merklich kleiner als $|A|$ und benützt wieder die Relation:

$$\big||A|-|B_\mu\cdot C_\nu|\big|\leqq|A-B_\mu\cdot C_\nu|,$$

so ergibt sich:

$$-\varepsilon<|A|-|B_\mu\cdot C_\nu|<\varepsilon \quad (\mu\geqq m,\ \nu\geqq n),$$

und aus der zweiten dieser Ungleichungen:

$$(5) \qquad |B_\mu C_\nu|>|A|-\varepsilon=g \quad (\mu\geqq m,\ \nu\geqq n),$$

wo also g eine bestimmte positive Zahl bedeutet.

Andererseits müssen sich infolge der Beziehung (3) zu jeder beliebig klein vorgelegten positiven Zahl δ zwei Zahlen M, N so fixieren lassen, daß:

$$(6) \quad |B_{\mu+\varrho}\cdot C_{\nu+\sigma}-B_\mu\cdot C_\nu|<\delta\cdot g \text{ für}\begin{cases}\mu\geqq M,\ \varrho=0,1,2,\cdots\cdots\\ \nu\geqq N,\ \sigma=0,1,2,\cdots\cdots,\end{cases}$$

wobei es offenbar freisteht, in jedem Falle $M\geqq m$, $N\geqq n$ zu wählen, sodaß gleichzeitig mit Ungl. (6) auch Ungl. (5) besteht. Setzt man nun in (6) einmal $\sigma=0$, das andere Mal $\varrho=0$ und dividiert die so entstehenden Ungleichungen durch Ungl. (5), so ergeben sich die Beziehungen:

$$(7) \qquad \begin{cases}\left|\dfrac{B_{\mu+\varrho}}{B_\mu}-1\right|<\delta \quad (\mu\geqq M,\ \varrho=0,1,2,\cdots)\\[2ex] \left|\dfrac{C_{\nu+\varrho}}{C_\nu}-1\right|<\delta \quad (\nu\geqq N,\ \sigma=0,1,2,\cdots,\end{cases}$$

welche in der Tat die Konvergenz der unendlichen Produkte: $\prod(1+b_\mu)$, $\prod(1+c_\nu)$ nach sich ziehen.[1])

---

1) Der obige Beweis des fraglichen Satzes beruht offenbar *wesentlich* auf der in § 81, Nr. 3, S. 626, gegebenen Definition der *unbedingten* Konvergenz eines unendlichen Produktes, nach welcher nicht nur die *Konvergenz*, sondern auch der *Wert* eines als *unbedingt* konvergent zu bezeichnenden Produktes als unabhängig von der Anordnung der Faktoren angenommen wird. Nun läßt sich aber die Definition der *unbedingten* Konvergenz für unendliche *Produkte* in analoger Weise,

2. Da jede komplexe Zahl a_ν in die Form gesetzt werden kann:

$$a_\nu = \pm \alpha_\nu \pm \beta_\nu i,$$

wo $\alpha_\nu \geqq 0$, $\beta_\nu \geqq 0$, so wird sich ein unendliches Produkt von der Form $\prod_0^\infty {}_\nu (1 + a_\nu)$ im allgemeinsten Falle in *vier* Teilprodukte von folgender Form zerlegen lassen:

$$(8) \quad \begin{cases} \prod_0^\infty {}_\nu \left(1 + \alpha_\nu^{(1)} + \beta_\nu^{(1)} i\right), & \prod_0^\infty {}_\nu \left(1 - \alpha_\nu^{(2)} + \beta_\nu^{(2)} i\right), \\ \prod_0^\infty {}_\nu \left(1 + \alpha_\nu^{(3)} - \beta_\nu^{(3)} i\right), & \prod_0^\infty {}_\nu \left(1 - \alpha_\nu^{(4)} - \beta_\nu^{(4)} i\right), \end{cases}$$

wo die α_ν, β_ν wesentlich positiv oder Null sind, und wo einzelne dieser Produkte auch begrenzt sein oder gänzlich fehlen können. (NB. Ist irgendein $\alpha_\nu = 0$, so kann man den entsprechenden Faktor $1 + \beta_\nu i$ ganz nach Willkür dem ersten oder zweiten, bzw. $1 - \beta_\nu i$ dem dritten oder vierten Produkte zuteilen — und analog, falls $\beta_\nu = 0$.)

Ist nun $\prod_0^\infty {}_\nu (1 + a_\nu)$ *unbedingt* konvergent, so muß nach dem eben bewiesenen Satze jedes dieser Partialprodukte *einzeln konvergieren.* Hierzu ist aber nach dem letzten Satze des vorigen Paragraphen *notwendig*, daß jede der Reihen:

$$\sum \left|\alpha_\nu^{(1)} + \beta_\nu^{(1)} i\right|, \quad \sum \left|\alpha_\nu^{(2)} - \beta_\nu^{(2)} i\right|, \quad \sum \left|\alpha_\nu^{(3)} - \beta_\nu^{(3)} i\right|, \quad \sum \left|\alpha_\nu^{(4)} + \beta_\nu^{(4)} i\right|$$

konvergiert, und da deren Konvergenz diejenige von $\sum |a_\nu|$ nach sich zieht, so ergibt sich schließlich:

---

wie dies für unendliche *Reihen* bemerkt wurde (s. § 58, Nr. 2, S. 407), auch *weiter* fassen, nämlich in der Weise, daß man ein unendliches *Produkt* schon dann *unbedingt* konvergent nennt, wenn es nur unabhängig von der Anordnung der Faktoren überhaupt stets *konvergiert* (also *ohne* den Zusatz: *gegen denselben Wert*). Auch in diesem Falle behält der Satz, daß jedes beliebig herausgehobene Teilprodukt konvergiert, seine Gültigkeit, nur muß man dann den folgenden Satz von § 41, Nr. 5, S. 268, bzw. dessen unmittelbar einleuchtende Übertragung auf *komplexe* Doppelfolgen zum Beweise heranziehen: Eine *Doppelfolge* ist *konvergent*, wenn jede *reguläre* (d. h. mit monoton wachsenden Indizespaaren versehene) *Teilfolge konvergiert.* Im vorliegenden Falle würde aus der bloßen *Konvergenz* sämtlicher *Teilfolgen* $(B_\mu C_\nu)$ (ohne ausdrückliche Voraussetzung des *Zusammenfallens* ihrer Grenzwerte) die *Konvergenz* der *Doppelfolge* $(B_\mu C_\nu)$ und damit die Existenz des im Texte mit A bezeichneten Grenzwertes folgen, woraus dann alles Weitere wie im Texte sich ergibt.

Die notwendige (und nach § 81, Nr. 3, S. 626, auch hinreichende) Bedingung für die unbedingte Konvergenz des unendlichen Produktes $\prod(1+a_\nu)$ besteht in der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum a_\nu$.

Oder auch, da nach § 81, Nr. 3 die Konvergenz von $\sum |a_\nu|$ die *absolute* Konvergenz des betreffenden Produktes zur Folge hat:

Jedes unbedingt konvergente Produkt konvergiert auch absolut.[1])

Da andererseits (s. § 81, Nr. 3) jedes *absolut* konvergente Produkt auch *unbedingt* konvergiert, so ist hiermit das vollständige Zusammenfallen von *absoluter* und *unbedingter* Konvergenz eines unendlichen Produktes erwiesen

Schließlich bemerke man, daß sich der in Nr. 1 dieses Paragraphen bewiesene Satz auch *umkehren* läßt, indem ja die *Konvergenz* der Teilprodukte (8) auch eine *hinreichende* Bedingung für diejenige des Gesamtproduktes bildet; d. h. es gilt der Satz:

Ein unendliches Produkt ist unbedingt konvergent, wenn jedes herausgehobene unendliche Produkt konvergiert.

Es findet also in allen diesen Beziehungen eine vollkommene Analogie zwischen *unendlichen Reihen* und *unendlichen Produkten* statt

§ 84. Umformung eines absolut konvergenten unendlichen Produktes in ein zweifach unendliches Produkt. — Unendliche Doppelprodukte.

1. Der Satz, daß der Wert eines *absolut* konvergenten Produktes unabhängig ist von der Anordnung der Faktoren, gestattet eine ähnliche Erweiterung wie der entsprechende Satz für unendliche Reihen, d. h. der Wert des Produktes bleibt ungeändert, wenn man dasselbe

---

1) Auch diese Aussage bleibt erhalten, wenn man ihr die in der vorigen Fußnote erwähnte *weitere* Definition der *unbedingten* Konvergenz zugrunde legt, da ja nach dem dort Gesagten auch in diesem Falle die *Konvergenz* der Teilprodukte (8) gesichert ist und somit der im Text gegebene Beweis keinerlei Änderung erleidet. Da sodann nach dem Satze von § 81, Nr. 2, S. 624, jedes *absolut* konvergente Produkt einen von der Anordnung der Faktoren unabhängigen Wert besitzt, so folgt schließlich, daß jedes *im weiteren Sinne unbedingt* konvergierende Produkt auch im *engeren Sinne unbedingt* konvergiert, mit anderen Worten, daß auch der *Wert* eines konvergenten Produktes von der Anordnung der Faktoren unabhängig ist, sobald nur feststeht, daß das Produkt in *jeder* Anordnung *konvergiert.*

in eine (endliche oder unbegrenzte) Anzahl (*eo ipso* konvergenter) Partialprodukte zerlegt und sodann deren Werte wiederum zu einem (endlichen oder unendlichen) Produkte vereinigt.

Betrachten wir zunächst wieder ein konvergentes Produkt von der Form:

$$\mathsf{A} = \prod_{0}^{\infty}{}_{\nu} (1 + \alpha_\nu), \text{ wo } \alpha_\nu > 0, \tag{1}$$

und denken uns die Folge der (α_ν), um gleich den allgemeineren Fall zu behandeln, in eine zweifach unendliche Folge $\left(\alpha_\mu^{(\nu)}\right) \begin{pmatrix}\mu = 0, 1, 2, \cdots\cdots \\ \nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots\end{pmatrix}$ zerlegt, so kann man das obige Produkt folgendermaßen in eine unbegrenzte Anzahl von konvergenten Partialprodukten zerlegen:

$$\left\{\begin{array}{l} \left(1 + \alpha_0^{(0)}\right)\left(1 + \alpha_1^{(0)}\right) \cdots \left(1 + \alpha_\mu^{(0)}\right) \cdots\cdots \\ \left(1 + \alpha_0^{(1)}\right)\left(1 + \alpha_1^{(1)}\right) \cdots \left(1 + \alpha_\mu^{(1)}\right) \cdots\cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \left(1 + \alpha_0^{(\nu)}\right)\left(1 + \alpha_1^{(\nu)}\right) \cdots \left(1 + \alpha_\mu^{(\nu)}\right) \cdots\cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}\right. \tag{2}$$

Setzt man sodann:

$$\left(1 + \alpha_0^{(\nu)}\right)\left(1 + \alpha_1^{(\nu)}\right) \cdots \left(1 + \alpha_\mu^{(\nu)}\right) = \mathsf{A}_\mu^{(\nu)} \tag{3}$$

$$\lim_{\mu \to \infty} \mathsf{A}_\mu^{(\nu)} = \mathsf{A}^{(\nu)} \qquad \begin{pmatrix}\mu = 0, 1, 2, \cdots \\ \nu = 0, 1, 2, \cdots\end{pmatrix}, \tag{4}$$

so folgt zunächst, daß für jedes noch so große (μ, ν):

$$\mathsf{A}_\mu^{(0)} \cdot \mathsf{A}_\mu^{(1)} \cdots \mathsf{A}_\mu^{(\nu)} < \mathsf{A} \tag{5}$$

sein muß, da ja dieses Produkt nur eine *begrenzte* Anzahl von Faktoren aus dem mit n *monoton zunehmenden* Produkte $\prod_{0}^{n}{}_{\nu} (1 + \alpha_\nu)$ enthält. Andererseits kann man zu beliebig klein gegebenem $\varepsilon > 0$ eine Zahl p so fixieren, daß:

$$\mathsf{A}_p = \prod_{0}^{p}{}_{\nu} (1 + \alpha_\nu) > \mathsf{A} - \varepsilon, \tag{6}$$

und sodann zwei Zahlen (m, n) so annehmen, daß:

$$\mathsf{A}_\mu^{(0)} \cdot \mathsf{A}_\mu^{(1)} \cdots \mathsf{A}_\mu^{(\nu)} \geqq \mathsf{A}_p \text{ für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n. \tag{7}$$

Die Zusammenfassung der Ungleichungen (5), (6), (7) gibt also:

$$\mathsf{A} - \varepsilon < \mathsf{A}_\mu^{(0)} \cdot \mathsf{A}_\mu^{(1)} \cdots \mathsf{A}_\mu^{(\nu)} < \mathsf{A} \quad (\mu \geqq m,\ \nu \geqq n), \tag{8}$$

und hieraus folgt, wenn man zuerst μ, sodann ν über alle Grenzen wachsen läßt:

$$\text{(9)} \qquad A - \varepsilon \leqq \prod_0^\infty {}_\nu \, A^{(\nu)} \leqq A$$

d. h. man findet schließlich:

$$\text{(10)} \qquad \prod_0^\infty {}_\nu \, A^{(\nu)} = \prod_0^\infty {}_\nu \prod_0^\infty {}_\mu \left(1 + \alpha_\mu^{(\nu)}\right) = A,$$

wobei der Ausdruck:

$$\prod_0^\infty {}_\nu \prod_0^\infty {}_\mu \left(1 + \alpha_\mu^{(\nu)}\right) \text{ die Bedeutung von: } \prod_0^\infty {}_\nu \left(\prod_0^\infty {}_\mu \left(1 + \alpha_\mu^{(\nu)}\right) \right)$$

hat und als *zweifach unendliches Produkt* oder präziser *als iteriertes unendliches Produkt* bezeichnet wird.

Man erkennt ohne weiteres die Richtigkeit des entsprechenden Resultates, falls die Anzahl der vorhandenen Partialprodukte eine begrenzte, etwa $= n$, ist, indem für diesen Fall an die Stelle der Ungleichung (9) lediglich die folgende tritt:

$$\text{(11)} \qquad A - \varepsilon < \prod_0^n {}_\nu \, A^{(\nu)} \leqq A.$$

Betrachtet man sodann die Gleichung (10) als die *ursprünglich gegebene*, so kann man *umgekehrt* zeigen, daß jedes durch irgendwelche Gruppierung aller möglichen Faktoren $\left(1 + \alpha_\mu^{(\nu)}\right)$ aus dem obigen *iterierten* Produkte hervorgehende *einfach unendliche* Produkt gleichfalls gegen den Wert A konvergiert

Faßt man nämlich zunächst diejenigen Faktoren zu einer Gruppe zusammen, welche je eine Diagonale des Schemas (2) bilden, und setzt:

$$\text{(12)} \quad \left(1 + \alpha_0^{(\nu)}\right)\left(1 + \alpha_1^{(\nu-1)}\right) \cdots \left(1 + \alpha_{\nu-1}^{(1)}\right)\left(1 + \alpha_\nu^{(0)}\right) = \Gamma_\nu \; (\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots),$$

so erkennt man ohne weiteres, daß:

$$\text{(13)} \qquad \Gamma_0 \cdot \Gamma_1 \cdot \cdots \cdot \Gamma_\nu < A_\nu^{(0)} \cdot A_\nu^{(1)} \cdots A_\nu^{(\nu)} < A,$$

woraus sofort die Konvergenz des unendlichen Produktes $\prod_0^\infty {}_\nu \, \Gamma_\nu$ folgt, (da $\Gamma_0 \cdot \Gamma_1 \cdots \Gamma_\nu$ mit ν *monoton* zunimmt). Da sodann aber das zweifach unendliche Produkt (10) als eine Zerlegung des einfachen Pro-

duktes $\prod_{0}^{\infty}{}^{\nu}\, \mathsf{\Gamma}_\nu$ aufgefaßt werden kann, so ergibt sich auf Grund des oben bewiesenen Resultates, daß auch:

$$\prod_{0}^{\infty}{}^{\nu}\, \mathsf{\Gamma}_\nu = \mathsf{A} \tag{14}$$

sein muß.

Da schließlich jedes andere durch Umformung des iterierten Produktes entstandene einfache Produkt als eine bloße Umordnung des einfach unendlichen Produktes $\prod_{0}^{\infty}{}^{\nu}\, \mathsf{\Gamma}_\nu$ betrachtet werden kann, so ist dessen Konvergenz gegen den Wert A gleichfalls evident.

2. Sei jetzt das absolut konvergente Produkt:

$$\prod_{0}^{\infty}{}^{\nu}\,(1 + a_\nu) = A \tag{15}$$

vorgelegt, wo die a_ν beliebige komplexe Zahlen bedeuten. Gibt man dann den Bezeichnungen $a_\mu^{(\nu)}$, $A_\mu^{(\nu)}$, A_p die analoge Bedeutung wie oben den $\alpha_\mu^{(\nu)}$, $\mathsf{A}_\mu^{(\nu)}$, A_p, so folgt zunächst, daß die Produkte $A_\mu^{(\nu)}$ für $\mu \longrightarrow \infty$ absolut konvergieren müssen, sodaß man also setzen kann:

$$\lim_{\mu \to \infty} A_\mu^{(\nu)} = A^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \tag{16}$$

Sei ferner $|a_\nu| = \alpha_\nu$, $|a_\mu^{(\nu)}| = \alpha_\mu^{(\nu)}$, so läßt sich zunächst wieder einer beliebig klein vorzuschreibenden positiven Zahl ε eine Zahl p so zuordnen, daß:

$$\mathsf{A} - \mathsf{A}_p < \varepsilon. \tag{17}$$

Da sodann für jedes $\varrho \geqq 0$: $|A_{p+\varrho} - A_p| \leqq \mathsf{A}_{p+\varrho} - \mathsf{A}_p$ [1]), so hat man für $\varrho \longrightarrow \infty$:

$$|A - A_p| \leqq \mathsf{A} - \mathsf{A}_p < \varepsilon. \tag{18}$$

---

1) Man hat nämlich:

$$|A_{p+\varrho} - A_p| = |A_p| \cdot \left|\frac{A_{p+\varrho}}{A_p} - 1\right|$$

und sodann:

$$|A_p| \leqq \mathsf{A}_p$$

$$\left|\frac{A_{p+\varrho}}{A_p} - 1\right| \leqq \frac{\mathsf{A}_{p+\varrho}}{\mathsf{A}_p} - 1$$

(s. S. 624, Ungl. (18)), also schließlich:

$$|A_{p+\varrho} - A_p| \leqq \mathsf{A}_{p+\varrho} - \mathsf{A}_p.$$

Andererseits kann man zwei Zahlen m, n so groß annehmen, daß $\prod_{0}^{n}{}_{\lambda} A_m^{(\lambda)}$ bzw. $\prod_{0}^{n}{}_{\lambda} \mathsf{A}_m^{(\lambda)}$ — und um so mehr $\prod_{0}^{\nu}{}_{\lambda} A_\mu^{(\lambda)}$ bzw. $\prod_{0}^{\nu}{}_{\lambda} \mathsf{A}_\mu^{(\lambda)}$ für $\mu \geqq m$, $\nu \geqq n$ — *alle* Faktoren enthält, welche in A_p bzw. A_p vorkommen. Alsdann wird:

$$(19) \qquad \left| A_\mu^{(0)} \cdot A_\mu^{(1)} \cdots A_\mu^{(\nu)} - A_p \right| \leqq \mathsf{A}_\mu^{(0)} \cdot \mathsf{A}_\mu^{(1)} \cdots \mathsf{A}_\mu^{(\nu)} - \mathsf{A}_p$$

und, wenn man erst μ, sodann ν über alle Grenzen wachsen läßt:

$$(20) \qquad \prod_{0}^{\infty}{}_{\nu} A^{(\nu)} - A_p \leqq \mathsf{A} - \mathsf{A}_p < \varepsilon$$

Aus Ungl. (18) und (20) folgt:

$$(21) \qquad \left| \prod_{0}^{\infty}{}_{\nu} A^{(\nu)} - A \right| < 2\varepsilon,$$

d. h. man findet schließlich:

$$(22) \qquad \prod_{0}^{\infty}{}_{\nu} A^{(\nu)} = \prod_{0}^{\infty}{}_{\nu} \prod_{0}^{\infty}{}_{\mu} \left(1 + a_\mu^{(\nu)}\right) = A.$$

Analog ergibt sich:

$$(23) \qquad \prod_{0}^{n}{}_{\nu} A^{(\nu)} = \prod_{0}^{n}{}_{\nu} \prod_{0}^{\infty}{}_{\mu} \left(1 + a_\mu^{(\nu)}\right) = A,$$

falls im ganzen nur n Partialprodukte vorhanden sind. —

Ist umgekehrt ein *absolut* konvergentes *zweifach* unendliches Produkt vorgelegt, welches der Gleichung (22) genügt, so folgt zunächst mit Benützung des in Nr. 1 gewonnenen Resultates, daß das durch Anordnung nach Diagonalen entstehende *einfache* Produkt *absolut* konvergiert. Sein Wert kann dann aber wiederum kein anderer sein als derjenige des iterierten Produktes (23). Und daraus folgt schließlich, daß *jedes* durch Umformung des iterierten Produktes (23) entstandene einfache Produkt gegen den Wert A konvergiert.

3. Als Beispiel für die Zerlegung eines einfach unendlichen Produktes in ein zweifach unendliches und dessen Umformung durch Auswertung der einzelnen Partialprodukte wollen wir eine merkwürdige Identität ableiten, die schon Euler angegeben hat und die nach Jacobis Vorgange in der Theorie der elliptischen Funktionen Anwendung findet.

Es bedeute q eine beliebige komplexe Zahl von der Beschaffenheit, daß $|q| < 1$. Da alsdann die Reihe $\sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} q^{\lambda}$ absolut konvergiert, so gilt das gleiche von dem unendlichen Produkte $\prod_{1}^{\infty}{}_{\lambda} (1 + q^{\lambda})$, sodaß man setzen kann:

$$(24) \qquad \prod_{1}^{\infty}{}_{\lambda} (1 + q^{\lambda}) = Q.$$

Nun läßt sich offenbar *jede* positive ganze Zahl λ stets, und zwar nur auf eine einzige Weise in die Form setzen:

$$\lambda = 2^{\mu} \cdot (2\nu + 1),$$

wo sowohl μ, als ν irgendeine bestimmte Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \cdots\cdots$ bedeutet; und umgekehrt stellt ein Ausdruck von der Form: $2^{\mu} \cdot (2\nu + 1)$, falls μ, ν die angegebene Bedeutung haben, eine ganze Zahl dar. Infolgedessen läßt sich Q folgendermaßen als zweifach unendliches Produkt schreiben:

$$(25) \qquad Q = \prod_{0}^{\infty}{}_{\nu} \prod_{0}^{\infty}{}_{\mu} \left(1 + q^{(2\nu+1) \cdot 2^{\mu}}\right).$$

Bedeutet jetzt a eine beliebige komplexe Zahl, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist, so hat man:

$$\begin{aligned} \prod_{0}^{\infty}{}_{\mu} \left(1 + a^{2^{\mu}}\right) &= \lim_{m \to \infty} \prod_{0}^{m}{}_{\mu} \frac{1 - a^{2^{\mu+1}}}{1 - a^{2^{\mu}}} \\ &= \lim_{m \to \infty} \frac{1 - a^2}{1 - a} \cdot \frac{1 - a^4}{1 - a^2} \cdots \frac{1 - a^{2^{m+1}}}{1 - a^{2^m}} \\ &= \lim_{m \to \infty} \frac{1 - a^{2^{m+1}}}{1 - a} \\ (26) \qquad &= \frac{1}{1 - a} \quad (\text{da } \lim_{n \to \infty} a^n = 0 \text{ wegen: } \lim_{n \to \infty} |a^n| = \lim_{n \to \infty} |a|^n = 0); \end{aligned}$$

und daher, wenn man $a = q^{2\nu+1}$ setzt:

$$(27) \qquad \prod_{0}^{\infty}{}_{\mu} \left(1 + q^{(2\nu+1) \cdot 2^{\mu}}\right) = \frac{1}{1 - q^{2\nu+1}}.$$

Durch Einführung dieses Wertes in das Doppelprodukt (25) ergibt sich also die Eulersche Relation:

$$(28) \qquad \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} (1 + q^{\nu}) = \prod_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{1 - q^{2\nu+1}} = \frac{1}{\prod_{0}^{\infty}{}_{\nu} (1 - q^{2\nu+1})},$$

die man übrigens etwas kürzer auch folgendermaßen ableiten kann Zerlegt man die Reihe der Zahlen ν in die Reihe der ungeraden und der geraden Zahlen, so folgt, daß:

$$\prod_1^\infty{}_\nu (1 - q^\nu) = \prod_0^\infty{}_\nu (1 - q^{2\nu+1}) \cdot \prod_1^\infty{}_\nu (1 - q^{2\nu})$$

$$(29) \qquad = \prod_0^\infty{}_\nu (1 - q^{2\nu+1}) \cdot \prod_1^\infty{}_\nu (1 + q^\nu) \cdot \prod_1^\infty{}_\nu (1 - q^\nu)$$

und hieraus durch Division mit dem links stehenden Produkte:

$$(30) \qquad \prod_0^\infty{}_\nu (1 - q^{2\nu+1}) \cdot \prod_1^\infty{}_\nu (1 + q^\nu) = 1,$$

eine Beziehung, deren Inhalt mit demjenigen der Gleichung (28) übereinstimmt

4. Es liegt auf der Hand, daß man ein zweifach unendliches Schema von der Form (2) statt, wie es der Gang unserer Untersuchung zunächst mit sich brachte, als *iteriertes* unendliches Produkt, auch als *unendliches Doppelprodukt* auffassen kann, und zwar in demselben Sinne, wie wir im analogen Falle von *unendlichen Doppelreihen* gesprochen haben. Danach wird also das unendliche *Doppelprodukt*

$$(31) \qquad \begin{cases} \left(1 + a_0^{(0)}\right)\left(1 + a_1^{(0)}\right) \cdots \left(1 + a_\mu^{(0)}\right) \cdots\cdots \\ \left(1 + a_0^{(1)}\right)\left(1 + a_1^{(1)}\right) \cdots \left(1 + a_\mu^{(1)}\right) \cdots\cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \left(1 + a_0^{(\nu)}\right)\left(1 + a_1^{(\nu)}\right) \cdots \left(1 + a_\mu^{(\nu)}\right) \cdots\cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

als *konvergent* bezeichnet, wenn $A_\mu^{(\nu)}$, d. h. das mit der $(\mu+1)^{\text{ten}}$ Kolonne und $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Zeile abschließende Teilprodukt, für $\mu \longrightarrow \infty$, $\nu \longrightarrow \infty$ einen *bestimmten*, und zwar, da es sich ja wieder um ein unendliches *Produkt* handelt, auch *von Null verschiedenen Doppel-Limes* besitzt.

Ist etwa:

$$(32) \qquad \lim_{\mu,\nu \to \infty} A_\mu^{(\nu)} = A \quad (\text{wo: } |A| > 0),$$

so heißt wiederum A der *Wert* jenes konvergenten *Doppelproduktes*, in Zeichen:

$$(33) \qquad \prod_0^\infty{}_{\mu}^{\nu} \left(1 + a_\mu^{(\nu)}\right) = A.$$

Wir bedienen uns auch der abgekürzten Bezeichnung $\prod_{\mu,\nu}\left(1+a_\mu^{(\nu)}\right)$, wenn aus dem Zusammenhange deutlich ist, *welches* Doppelprodukt damit gemeint ist, oder wenn es (wie bei der Frage nach Konvergenz oder Divergenz) auf eine endliche Anzahl von Anfangsgliedern nicht ankommt.

Die *notwendige und hinreichende* Bedingung für die *Konvergenz* des Doppelproduktes läßt sich dann nach § 73, Nr 5, Ungl. (27), S. 567, in die Form setzen:

$$(34) \qquad \left|A_{n+\varrho}^{(n+\sigma)} - A_n^{(n)}\right| \leqq \varepsilon \text{ für: } \begin{cases} \varrho = 0, 1, 2, \cdots\cdots \\ \sigma = 0, 1, 2, \cdots\cdots, \end{cases}$$

mit einem Zusatz von der Form:

$$(34\text{a}) \qquad \left|A_{n+\varrho}^{(n+\sigma)}\right| > g > 0 \text{ für: } \begin{cases} \varrho = 0, 1, 2, \cdots\cdots \\ \sigma = 0, 1, 2, \cdots\cdots \end{cases}$$

Setzt man in der letzten Ungleichung $\varrho = \sigma = 0$ und außerdem $\frac{\varepsilon}{g} = \varepsilon'$, so folgt durch Division von Ungl. (34) durch (34a), daß:

$$(35) \qquad \left|\frac{A_{n+\varrho}^{(n+\sigma)}}{A_n^{(n)}} - 1\right| < \varepsilon' \text{ für: } \begin{cases} \varrho = 0, 1, 2, \cdots\cdots \\ \sigma = 0, 1, 2, \cdots\cdots. \end{cases}$$

Eine ganz analoge Betrachtung, wie die in § 78, Nr. 2, S. 595, angestellte, zeigt aber, daß auch umgekehrt aus einer Bedingung von der Form (35) (in dem Sinne, daß zu jedem $\varepsilon' > 0$ ein n existiert derart, daß dann Ungl. (35) in dem angegebenen Umfange besteht) sich zwei solche von der Form (34), (34a) herleiten lassen. Somit kann auch die Bedingung (35) (in dem eben bezeichneten Sinne) als *notwendig und hinreichend* für die *Konvergenz* des fraglichen Doppelproduktes gelten

Bedeutet jetzt $\left(\alpha_\mu^{(\nu)}\right)_0^0$ eine Doppelfolge *positiver reeller* Zahlen[1]) und bezeichnet man mit $\mathsf{A}_\mu^{(\nu)}$ dasjenige aus Faktoren der Form $\left(1+\alpha_\mu^{(\nu)}\right)$ gebildete Produkt, welches genau dem zuvor mit $A_\mu^{(\nu)}$ bezeichneten analog ist, d. h. mit der $(\mu+1)^{\text{ten}}$ Kolonne und $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Zeile abschließt, so wird das entsprechende unendliche Doppelprodukt *konvergieren,* wenn:

$$(36) \qquad \left|\frac{\mathsf{A}_{n+\varrho}^{(n+\sigma)}}{\mathsf{A}_n^{(n)}} - 1\right| < \varepsilon' \text{ für: } \begin{cases} \varrho = 0, 1, 2, \cdots\cdots \\ \sigma = 0, 1, 2, \cdots\cdots \end{cases}$$

---

1) Wegen der Bezeichnung s. § 41, Nr. 1, S. 259.

Ist nun $|a_\mu^{(\nu)}| = \alpha_\mu^{(\nu)}$, so hat man offenbar (vgl. § 81, Ungl. (13), S. 624).

$$(37)\qquad \left|\frac{A_{n+\varrho}^{(n+\sigma)}}{A_n^{(n)}} - 1\right| \leqq \frac{\mathsf{A}_{n+\varrho}^{(n+\sigma)}}{\mathsf{A}_n^{(n)}} - 1 \left(= \left|\frac{\mathsf{A}_{n+\varrho}^{(n+\sigma)}}{\mathsf{A}_n^{(n)}} - 1\right|\right),$$

und es ergibt sich somit:

Gleichzeitig mit dem Doppelprodukte $\prod_{\mu,\nu}(1 + |a_\mu^{(\nu)}|)$ *konvergiert auch das Doppelprodukt* $\prod_{\mu,\nu}(1 + a_\mu^{(\nu)})$

Das letztere heißt dann wiederum *absolut konvergent.*

Ist etwa:

$$(38)\qquad \prod_{0}^{\infty}{}_{\mu}^{\nu}(1 + \alpha_\mu^{(\nu)}) = \mathsf{A},$$

so bleibt der Wert jedes aus diesem unendlichen Doppelprodukte herausgehobenen endlichen Produktes unterhalb A, und da jedes solche Produkt, wegen $1 + \alpha_\mu^{(\nu)} > 1$, mit wachsender Faktorenzahl *monoton* zunimmt, so geht es bei unbegrenzt wachsender Faktorenzahl in ein *konvergentes* unendliches Produkt über. Daraus folgt insbesondere, daß jede *Zeile* und jede *Kolonne* ein *konvergentes* Produkt liefert. Das gleiche gilt dann offenbar auch für das absolut konvergente Doppelprodukt $\prod_{\mu,\nu}(1 + a_\mu^{(\nu)})$ mit dem Zusatze, daß dabei jedes *Zeilen-* und *Kolonnenprodukt absolut konvergiert.* Auf Grund des allgemeinen Grenzwertsatzes am Schlusse von § 73, Gl. (33), S. 568, ergibt sich sodann:

$$(39)\qquad \lim_{\mu,\nu\to\infty} A_\mu^{(\nu)} \begin{cases} = \lim\limits_{\nu\to\infty}\lim\limits_{\mu\to\infty} A_\mu^{(\nu)} \\ = \lim\limits_{\mu\to\infty}\lim\limits_{\nu\to\infty} A_\mu^{(\nu)}, \end{cases}$$

d. h. das absolut konvergente *Doppelprodukt* läßt sich auch durch das *iterierte Zeilen-* bzw. *Kolonnenprodukt* ersetzen.[1])

Aus der oben gemachten Bemerkung über das Verhalten der Teilprodukte des unendlichen Produktes $\prod_{\mu,\nu}(1 + \alpha_\mu^{(\nu)})$ folgt weiter, daß auch das unendliche Produkt der *Diagonalen,* also:

$$(40)\qquad \prod_{0}^{\infty}{}_{\nu}\,\beta_\nu, \quad \text{wo: } \beta_\nu = (1 + \alpha_0^{(\nu)})(1 + \alpha_1^{(\nu-1)}) \cdots (1 + \alpha_\nu^{(0)})$$

---

1) Diese Aussage gilt, wie die lediglich auf dem zitierten Grenzwertsatz beruhenden Gleichungen (39) zeigen, für *jedes* konvergente Doppelprodukt, bei welchem die *Zeilen* bzw. *Kolonnen* *konvergente* Produkte liefern.

konvergiert. Bezeichnet man sodann mit n eine beliebige natürliche, mit m die größte in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl, so hat man offenbar:

$$(41) \qquad \mathsf{A}_m^{(m)} < \prod_1^n {}_\nu \beta_\nu < \mathsf{A},$$

und daher, wegen $\lim_{m \to \infty} \mathsf{A}_m^{(m)} = \mathsf{A}$, auch:

$$(42) \qquad \prod_1^\infty {}_\nu \beta_\nu = \mathsf{A}.$$

Setzt man noch:

$$(43) \qquad \left(1 + a_0^{(\nu)}\right)\left(1 + a_1^{(\nu-1)}\right) \cdots \left(1 + a_\nu^{(0)}\right) = b_\nu$$

und beachtet, daß (nach dem bekannten Satze über den absoluten Betrag einer Summe)[1]):

$$(44) \qquad \left| \prod_1^n {}_\nu b_\nu - A_m^{(m)} \right| \leqq \prod_1^n {}_\nu \beta_\nu - \mathsf{A}_m^{(m)},$$

so folgt mit Berücksichtigung von Gl. (42):

$$\lim_{m \to \infty} \left(\prod_0^n {}_\nu b_\nu - A_m^{(m)} \right) = 0,$$

d. h.:

$$(45) \qquad \prod_0^\infty {}_\nu b_\nu = A,$$

sodaß also auch das Produkt der *Diagonalen* des Doppelproduktes $\prod_{\mu,\nu} \left(1 + a_\mu^{(\nu)}\right)$ gegen denselben Wert (absolut) *konvergiert* wie dieses selbst, und zwar, wie die Herleitung (aus der Konvergenz von $\prod_0^\infty {}_\nu \beta_\nu$) erkennen läßt, auch dann noch, wenn man statt der Diagonalen b_ν deren einzelne Faktoren als Faktoren des unendlichen Produktes auffaßt.

Aus dem Umstande, daß dieses einfach unendliche, absolut konvergente Produkt nach dem Satze von § 81, Nr. 2, S. 624, *unbedingt* konvergiert, läßt sich erschließen, daß das betrachtete *Doppelprodukt* als solches gleichfalls *unbedingt* konvergiert. Zunächst erkennt man, daß das aus den Faktoren $(1 + \alpha_\mu^{(\nu)})$ gebildete Doppelprodukt bei beliebiger Umordnung (als mit der Faktorenzahl monoton zunehmend und dabei unterhalb A bleibend) *konvergiert* (vgl. § 40, Nr. 3, S. 257); das gleiche gilt also für das

1) Vgl. das Zitat zu Ungl. (37).

absolut konvergierende Doppelprodukt $\prod_{\mu,\nu}\left(1+a_\mu^{(\nu)}\right)$. Denkt man sich nun das letztere in irgendeiner Weise umgeordnet, so wird als zugehöriges, diesem umgeordneten Doppelprodukte *gleichwertiges* Diagonalenprodukt lediglich eine Umordnung des zuvor mit $\prod_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ bezeichneten zum Vorschein kommen und daher mit diesem, also schließlich mit dem ursprünglichen Doppelprodukte gleichwertig sein: somit erweist sich das letztere in der Tat als *unbedingt* konvergent

Bemerkt man noch, daß die *notwendige und hinreichende* Bedingung für die *Konvergenz* des *Produktes*

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu = \prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1+\alpha_0^{(\nu)}\right)\left(1+\alpha_1^{(\nu-1)}\right)\cdots\left(1+\alpha_\nu^{(0)}\right)$$

in der *Konvergenz* der *Reihe* $\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\alpha_0^{(\nu)}+\alpha_1^{(\nu-1)}+\cdots+\alpha_\nu^{(0)}\right)$ besteht und diese mit der *Konvergenz* der *Doppelreihe* $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}\alpha_\mu^{(\nu)}$ zusammenfällt, daß ferner die *Konvergenz* des *Diagonalproduktes* $\prod \beta_\nu$ nicht nur aus derjenigen des *Doppelproduktes* folgt, sondern auch umgekehrt diese letztere nach sich zieht[1]), so ergibt sich, daß die *Konvergenz* der *Doppelreihe* $\sum_{\mu,\nu}\alpha_\mu^{(\nu)}$ die *notwendige und hinreichende* Bedingung für diejenige des *Doppelproduktes* $\prod_{\mu,\nu}\left(1+\alpha_\mu^{(\nu)}\right)$, also schließlich für die *absolute Konvergenz* von $\prod_{\mu,\nu}\left(1+a_\mu^{(\nu)}\right)$ bildet.

Durch Zusammenfassung der vorstehenden Einzelergebnisse findet man also:

> *Die notwendige und hinreichende Bedingung fur die absolute Konvergenz des unendlichen Doppelproduktes* $\prod_{\mu,\nu}\left(1+a_\mu^{(\nu)}\right)$ *besteht in der absoluten Konvergenz der Doppelreihe* $\sum_{\mu,\nu}a_\mu^{(\nu)}$. *Das absolut konvergente Doppelprodukt konvergiert unbedingt und kann auch als iteriertes oder einfach unendliches Produkt geschrieben werden. Insbesondere hat man:*

$$\prod_{\mu,\nu=0}^{\infty}\left(1+a_\mu^{(\nu)}\right)\begin{cases}=\prod_{\nu=0}^{\infty}\prod_{\mu=0}^{\infty}\left(1+a_\mu^{(\nu)}\right) & \textit{(iteriertes Zeilenprodukt)}\\[1ex] =\prod_{\mu=0}^{\infty}\prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1+a_\mu^{(\nu)}\right) & \textit{(iteriertes Kolonnenprodukt)}\\[1ex] =\prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1+a_0^{(\nu)}\right)\left(1+a_1^{(\nu-1)}\right)\cdots\left(1+a_\nu^{(0)}\right) & \textit{(Diagonalenprodukt).}\end{cases}$$

---

1) Man erkennt dies unmittelbar aus dem ersten Teile der Ungleichung (41)

§ 85. Umformung eines unendlichen Produktes in eine unendliche Reihe. — Satz von Euler: $\prod_1^\infty {}_\nu \left(1 - \frac{1}{p_\nu^{1+\varrho}}\right)^{-1} = \sum_1^\infty {}_\nu \frac{1}{\nu^{1+\varrho}}$. — Divergenz der Reihe: $\sum_1^\infty {}_\nu \frac{1}{p_\nu}$.

1. Setzt man, wie bisher:

$$(1) \qquad \mathsf{A}_\nu = (1+\alpha_0)(1+\alpha_1)\cdots(1+\alpha_\nu) \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots),$$

so hat man:

$$(2) \qquad \mathsf{A}_\nu = \mathsf{A}_{\nu-1}(1+\alpha_\nu) \quad (\text{für } \nu \geqq 1),$$

also:

$$(3) \qquad \mathsf{A}_\nu - \mathsf{A}_{\nu-1} = \mathsf{A}_{\nu-1} \cdot \alpha_\nu.$$

Nun ist allgemein:

$$(4) \qquad \mathsf{A}_n = \mathsf{A}_0 + \sum_1^n {}_\nu (\mathsf{A}_\nu - \mathsf{A}_{\nu-1})$$

und daher mit Berücksichtigung von (1) und (3):

$$(5) \qquad \mathsf{A}_n = 1 + \alpha_0 + \sum_1^n {}_\nu \mathsf{A}_{\nu-1} \cdot \alpha_\nu$$

Ist nun $\alpha_\nu > 0$ und $\sum_0^\infty {}_\nu \alpha_\nu$, also auch $\prod_0^\infty {}_\nu (1+\alpha_\nu) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{A}_n$ *konvergent*, so geht Gl. (5), wenn man n ins Unendliche wachsen läßt, in die folgende über:

$$(6) \qquad \prod_0^\infty {}_\nu (1+\alpha_\nu) = 1 + \alpha_0 + \sum_0^\infty {}_\nu \mathsf{A}_{\nu-1} \cdot \alpha_\nu,$$

woraus dann schon von selbst folgt, daß die rechts stehende Reihe *konvergieren*, und zwar, da sie aus lauter positiven Gliedern besteht, *unbedingt konvergieren* muß (wie man übrigens auch direkt erkennt, da die $\mathsf{A}_{\nu-1}$ für jedes ν unter einer endlichen Grenze bleiben und $\sum \alpha_\nu$ konvergieren sollte). Da aber:

$$\mathsf{A}_{\nu-1} \cdot \alpha_\nu = (1+\alpha_0)(1+\alpha_1)\cdots(1+\alpha_{\nu-1}) \cdot \alpha_\nu$$

nach Ausführung der angedeuteten Multiplikation wiederum aus lauter *positiven* Termen, nämlich solchen von der Form $\alpha_\varkappa$, $\alpha_\varkappa \alpha_\lambda$, $\alpha_\varkappa \alpha_\lambda \alpha_\mu$, $\cdots\cdots$ zusammengesetzt ist, so bleibt die obige Reihe auch noch *unbedingt* konvergent, wenn man jedes Glied in diese einzelnen Bestandteile zerlegt und sodann die letzteren ganz beliebig anordnet. Setzt man etwa zur Abkürzung:

$$(7)\quad \begin{cases} \sum\limits_{0}^{\infty}{}^{\varkappa} \alpha_\varkappa = \sum\limits_{\varkappa} \alpha_\varkappa \\ \sum\limits_{1}^{\infty}{}^{\lambda} \sum\limits_{0}^{\infty}{}^{\varkappa} \alpha_\varkappa \alpha_\lambda = \sum\limits_{\varkappa\lambda} \alpha_\varkappa \alpha_\lambda \quad (\text{wo: } \varkappa < \lambda) \\ \sum\limits_{2}^{\infty}{}^{\mu} \sum\limits_{1}^{\infty}{}^{\lambda} \sum\limits_{0}^{\infty}{}^{\varkappa} \alpha_\varkappa \alpha_\lambda \alpha_\mu = \sum\limits_{\varkappa\lambda\mu} \alpha_\varkappa \alpha_\lambda \alpha_\mu \quad (\text{wo: } \varkappa < \lambda < \mu) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

so hat man insbesondere:

$$(8)\quad \prod_{0}^{\infty}{}^{\nu} (1+\alpha_\nu) = 1 + \sum_{\varkappa} \alpha_\varkappa + \sum_{\varkappa\lambda} \alpha_\varkappa \alpha_\lambda + \sum_{\varkappa\lambda\mu} \alpha_\varkappa \alpha_\lambda \alpha_\mu + \cdots\cdots.$$

2. Tritt jetzt an die Stelle des eben betrachteten Produktes ein absolut konvergentes Produkt von der Form $\prod\limits_{0}^{\infty}{}^{\nu} (1 + a_\nu)$, wo die a_ν beliebige komplexe Zahlen bedeuten, so findet man, wenn:

$$(9)\quad A_\nu = (1 + a_0)\ (1 + a_1) \cdots (1 + a_\nu)$$

gesetzt wird, in analoger Weise:

$$(10)\quad \prod_{0}^{\infty}{}^{\nu} (1 + a_\nu) = 1 + a_0 + \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} A_{\nu-1} \cdot a_\nu,$$

wobei die rechts stehende Reihe zunächst in dem Sinne *absolut* konvergiert, daß $\sum\limits_{1}^{\infty}{}^{\nu} |A_{\nu-1} a_\nu|$ konvergiert.[1]) Setzt man aber wieder: $|a_\nu| = \alpha_\nu$ und berücksichtigt, daß dann auch $\prod\limits_{0}^{\infty}{}^{\nu} (1 + \alpha_\nu)$ konvergent ist und die Entwicklungen des vorigen Artikels gelten, so erkennt man, daß jene Reihe auch noch *absolut* und somit *unbedingt* konvergent bleibt, wenn man jedes Glied:

$$(11)\quad A_{\nu-1} a_\nu = (1 + a_0)\ (1 + a_1) \cdots (1 + a_{\nu-1}) \cdot a_\nu$$

durch Ausführung der Multiplikation in seine Bestandteile von der Form $a_\varkappa,\ a_\varkappa a_\lambda,\ a_\varkappa a_\lambda a_\mu, \cdots$ zerlegt und diese als Glieder der Reihe auffaßt.

Man kann daher (mit Einführung der analogen Abkürzungen wie in Art. 1) die Entwicklung (10) auch in die folgende Form setzen:

$$(12)\quad \prod_{0}^{\infty}{}^{\nu} (1 + a_\nu) = 1 + \sum_{\varkappa} a_\varkappa + \sum_{\varkappa\lambda} a_\varkappa a_\lambda + \sum_{\varkappa\lambda\mu} a_\varkappa a_\lambda a_\mu + \cdots\cdots.$$

---

1) Weil nämlich $\sum\limits_{1}^{\infty}{}^{\nu} |a_\nu|$ konvergiert und die $|A_{\nu-1}|$ unter einer endlichen Grenze bleiben.

Hieraus folgt z. B., daß man ein unendliches Produkt von der Form $\prod_{0}^{\infty}{}^{\nu}(1+a_\nu x)$, welches ja für jeden beliebigen komplexen Wert x absolut konvergiert, wenn die Reihe $\sum a_\nu \cdot x$, d. h schließlich die Reihe $\sum a_\nu$ absolut konvergiert, stets in eine für jedes bestimmte x absolut konvergierende, nach steigenden ganzen Potenzen von x geordnete Reihe umformen kann, nämlich:

$$(13)\qquad \prod_{0}^{\infty}{}^{\nu}(1+a_\nu x) = 1 + \Big(\sum_{\varkappa} a_\varkappa\Big)\cdot x + \Big(\sum_{\varkappa\lambda} a_\varkappa \cdot a_\lambda\Big)\cdot x^2 + \Big(\sum_{\varkappa\lambda\mu} a_\varkappa a_\lambda a_\mu\Big)\cdot x^3 + \cdots\cdots.$$

3 Als Beispiel für die Umformung eines unendlichen Produktes in eine unendliche Reihe wollen wir eine gleichfalls schon von Euler herrührende, an sich merkwürdige und für die Zahlentheorie besonders wichtige Formel ableiten, welche u. a. auch den früher (§ 51, Nr. 7, S. 352 am Ende) angekündigten *Divergenz*beweis für die Reihe der reziproken Primzahlen liefern wird.

Bezeichnet man mit p_ν $(\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ die unbegrenzte Reihe der *Primzahlen*, so ist das Produkt:

$$\prod_{1}^{\infty}{}^{\nu}\Big(1-\frac{1}{p_\nu^{1+\varrho}}\Big) \qquad (\text{wo also: } p_1 = 2,\ p_2 = 3, \cdots\cdots)$$

für $\varrho > 0$ sicher konvergent, da die Reihe $\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu}\frac{1}{p_\nu^{1+\varrho}}$ als eine aus der als konvergent erkannten Reihe: $\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu}\frac{1}{\nu^{1+\varrho}}$ *herausgehobene* Reihe gleichfalls *konvergiert*. Da also das obige Produkt einen *endlichen von Null verschiedenen* Wert hat, so gilt das gleiche von dem folgenden, seinen reziproken Wert darstellenden Produkte:

$$\prod_{1}^{\infty}{}^{\nu}\frac{1}{1-\frac{1}{p_\nu^{1+\varrho}}}.$$

Nun ist allgemein für $0 < \alpha < 1$:

$$\frac{1}{1-\alpha} = 1 + \sum_{1}^{\infty}{}^{\mu}\alpha^\mu$$

und daher:

$$(14)\qquad \prod_{1}^{\infty}{}^{\nu}\frac{1}{1-\frac{1}{p^{1+\varrho}}} = \prod_{1}^{\infty}{}^{\nu}\Big(1+\sum_{1}^{\infty}{}^{\mu}\Big(\frac{1}{p_\nu^{\mu}}\Big)^{1+\varrho}\Big).$$

Formt man jetzt die rechte Seite in eine unendliche Reihe um, wobei es offenbar gestattet ist, die (an Stelle der oben mit $\alpha_\varkappa$, $\alpha_\varkappa \alpha_\lambda$, $\alpha_\varkappa \alpha_\lambda \alpha_\mu, \cdots\cdots$ bezeichneten Terme) zunächst erscheinenden unendlichen Reihen bzw. Produkte solcher Reihen wiederum in ihre einfachsten Bestandteile zu zerlegen und diese beliebig anzuordnen (da ja diese Bestandteile durchweg *positiv* sind), so ergibt sich offenbar:

$$(15) \qquad \prod_1^\infty{}^{\nu} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_\nu^{1+\varrho}}} = \sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{1}{\nu^{1+\varrho}},$$

wenn man beachtet, daß jede ganze Zahl m sich stets, und zwar nur auf eine einzige Weise in die Form setzen läßt: $m = p_\varkappa^{m_\varkappa} \cdot p_\lambda^{m_\lambda} \cdots p_\nu^{m_\nu}$, wo die $p_\varkappa$, $p_\lambda \cdots p_\nu$ Primzahlen, die $m_\varkappa$, $m_\lambda, \cdots m_\nu$ positive ganze Zahlen bedeuten, und daß bei der Umformung des obigen Produktes in eine unendliche Reihe jede Zahl der Folge $1, 2, 3, \cdots\cdots$ *ein*mal und *nur* einmal zum Vorschein kommt.

Die Formel (15) gilt für jedes $\varrho > 0$. Für $\varrho = 0$ *divergiert* die rechte Seite nach $+\infty$: indessen darf man hieraus noch nicht ohne weiteres den Schluß ziehen, daß das gleiche auch für die linke Seite der Fall sein muß, da die Formel (15) unter der ausdrücklichen Voraussetzung $\varrho > 0$ abgeleitet wurde. Man kann indessen die Richtigkeit des fraglichen Resultates in der Weise erkennen, daß man $\varrho = \frac{1}{m}$ setzt und bemerkt, daß *beide* Seiten der Gleichung (15) mit wachsenden ganzzahligen Werten von m *monoton zunehmen* und die rechte Seite mit $\nu \to \infty$ ins *Unendliche* wächst; oder auf Grund direkter Rechnung noch anschaulicher, wenn man zunächst von der Gleichung ausgeht:

$$(16) \qquad \prod_1^n{}^{\nu} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_\nu}} = \prod_1^n{}^{\nu} \left(1 + \sum_1^\infty{}^{\mu} \frac{1}{p_\nu^\mu}\right).$$

Da nun alle *unterhalb* p_n liegenden ganzen Zahlen λ nur solche Primfaktoren bzw. Potenzen solcher Primfaktoren enthalten können, welche *kleiner* als p_n sind, so kommen bei der Ausführung des auf der rechten Seite von Gl. (16) stehenden Produktes offenbar die *sämtlichen* der Bedingung $\lambda \leqq p_n$ genügenden Brüche $\frac{1}{\lambda}$, außerdem aber noch unendlich viele andere zum Vorschein, und man findet daher:

$$(17) \qquad \prod_1^n{}^{\nu} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_\nu}} > \sum_1^{p_n}{}^{\lambda} \frac{1}{\lambda},$$

woraus dann, wegen $\lim_{n\to\infty} p_n = +\infty$, weiter folgt:

$$\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{1-\frac{1}{p_\nu}} = +\infty. \tag{18}$$

Mit diesem Produkt *divergiert* dann aber auch das folgende: $\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left(1-\frac{1}{p_\nu}\right)$ (nämlich nach *Null*) und somit schließlich auch die unendliche Reihe $\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\frac{1}{p_\nu}$.

§ 86. Bedingt konvergente Produkte.

1. Das unendliche Produkt

$$P = \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left(1-\frac{x^2}{\nu^2}\right) \tag{1}$$

ist, wegen der für jedes endliche, reelle oder komplexe x bestehenden absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\frac{x^2}{\nu^2}$, für jedes solche x *absolut* und demgemäß *unbedingt* konvergent.[1]) Setzt man dasselbe jedoch in die Form:

$$P = \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)\left(1-\frac{x}{\nu}\right) = \lim_{n\to\infty}\prod_{1}^{n}{}_{\nu}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)\cdot\prod_{1}^{n}{}_{\nu}\left(1-\frac{x}{\nu}\right) \tag{2}$$

und beachtet, daß die Produkte $\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)$, $\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left(1-\frac{x}{\nu}\right)$ wegen der Divergenz der Reihe $\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\frac{1}{\nu}$ einzeln genommen *divergieren*, so folgt, daß jener Grenzwert P nur durch die paarweise Zuordnung der Faktoren von der Form $\left(1+\frac{x}{\nu}\right)$ und $\left(1-\frac{x}{\nu}\right)$ zustande kommt, mit anderen Worten, daß die *Konvergenz* des Produktes

$$\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\cdots$$

wesentlich von der *Anordnung* der Faktoren abhängt, daß dasselbe also nur *bedingt* konvergiert.

---

1) Für $x=\nu$, wo $\nu=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\cdots$ wird jedesmal ein Faktor des Produktes gleich *Null*. Solche unendliche Produkte, die offenbar stets den Wert *Null* haben, wurden bisher, als für den sonst hier vorliegenden Zusammenhang unwesentlich, von der Betrachtung ausgeschlossen. Dagegen besitzen sie für die *Funktionenlehre* eine gewisse Bedeutung: man bezeichnet dann ein derartiges Produkt als *konvergent* oder *divergent*, je nachdem es nach Ausschluß des *Null*-faktors *konvergiert* oder *divergiert*.

Wir wollen nun den Charakter solcher *bedingt konvergenter* Produkte etwas genauer untersuchen, beschränken uns dabei aber an dieser Stelle auf die Betrachtung von Produkten mit lauter *reellen* Faktoren, da die *vollständige* Erledigung des betreffenden Problems für den Fall *komplexer* Faktoren gewisse Hilfsmittel aus der Funktionenlehre erfordert und daher besser auf eine spätere Gelegenheit[1]) verschoben wird.

Es seien nun (α_ν), (β_ν) zwei unbegrenzte Folgen reeller positiver Zahlen von der Beschaffenheit, daß $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = \lim\limits_{\nu\to\infty} \beta_\nu = 0$ ist und die Reihen $\sum \alpha_\nu$, $\sum \beta_\nu$ *divergieren*. Alsdann lassen sich nach einem früher bewiesenen Satze (s. § 57, Nr. 2, S. 403) aus den Zahlen α_ν, $-\beta_\nu$ unendlich viele *bedingt* konvergierende Reihen mit beliebig vorgeschriebener Summe S bilden. Mit anderen Worten (§ 60, Gl. (46), S. 435): Man kann zwei Folgen von niemals abnehmenden, mit λ über alle Grenzen wachsenden, positiven ganzen Zahlen m_λ, n_λ einander so zuordnen, daß:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(\sum_0^{m_\lambda}{}^{\nu}\,\alpha_\nu - \sum_0^{n_\lambda}{}^{\nu}\,\beta_\nu\right) = S \tag{3}$$

wird.

Fügen wir jetzt noch die Annahme hinzu, daß die Zahlen β_ν durchweg *unter der Einheit* liegen sollen, sodaß also für jedes ν: $1-\beta_\nu > 0$ (was wiederum wegen $\lim\limits_{\nu\to\infty}\beta_\nu = 0$ keine wesentliche Einschränkung bedeutet), so folgt, daß von den beiden stets *positiven* Produkten:

$$\prod_0^n{}^{\nu}\,(1+\alpha_\nu), \quad \prod_0^n{}^{\nu}\,(1-\beta_\nu)$$

das erstere mit wachsendem n jede positive Zahl übersteigt, das zweite unter jede positive Zahl herabsinkt. Bedeutet daher P eine beliebig vorgeschriebene positive Zahl, so wird man in ganz analoger Weise, wie bei der Bildung einer bedingt konvergierenden Reihe mit vorgeschriebener Summe, durch passende Einschaltung von Faktoren der Form $(1-\beta_\nu)$ in das Produkt der Faktoren $(1+\alpha_\nu)$ ein unbegrenzt fortsetzbares Produkt bilden können, das sich bei hinlänglicher Fortsetzung dieses Verfahrens von P um weniger als eine beliebig klein vorzuschreibende Zahl unterscheidet. Man kann danach sagen, daß das durch den angedeuteten unbegrenzt fortsetzbaren Prozeß definierte, aus den Faktoren $(1+\alpha_\nu)$, $(1-\beta_\nu)$ zusammengesetzte *unendliche* Produkt *in dieser Anordnung*, also *„bedingt"* gegen den Wert P *konvergiert*. Anders ausgesprochen: Es lassen sich wiederum zwei Reihen niemals

1) Im zweiten Bande dieser Vorlesungen.

abnehmender, mit λ über alle Grenzen wachsender, positiver ganzer Zahlen m_λ, n_λ einander so zuordnen, daß:

$$\lim_{\lambda \to \infty}\left(\prod_0^{m_\lambda}(1+\alpha_\nu)\cdot\prod_0^{n_\lambda}(1-\beta_\nu)\right)=P \tag{4}$$

wird.

Es entsteht nun die Frage: Entspricht hier einer solchen Anordnung der Zahlen α_ν, β_ν, für welche die *Reihe* (3) *konvergiert*, auch stets eine *konvergente* Anordnung für das unendliche Produkt (4)? Oder etwas allgemeiner ausgesprochen: Was läßt sich über das Verhalten des Produktes $\prod_0^\infty(1+\gamma_\nu)$ bei der durch die Folge der Indizes vorgeschriebenen Anordnung aussagen, wenn die Reihe $\sum_0^\infty \gamma_\nu$ in der entsprechenden Anordnung bedingt konvergiert?

Die Beantwortung dieser Frage gibt der folgende Satz:

Konvergiert die Reihe $\sum_0^\infty \gamma_\nu$ in der durch die Indizes vorgeschriebenen Anordnung, so ist das Produkt $\prod_0^\infty(1+\gamma_\nu)$ in der entsprechenden Anordnung ***konvergent*** *oder es* ***divergiert nach Null***, *je nachdem die Reihe $\sum_0^\infty \gamma_\nu^2$* ***konvergiert*** *oder* ***divergiert.***[1])

2. Zum Beweise des vorstehenden Satzes sind einige Hilfsformeln erforderlich, welche zunächst entwickelt werden sollen.

Aus der Definitionsgleichung (s. § 33, Gl. (18), S. 202):

$$e^\alpha = \lim_{\nu\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{\nu}\right)^\nu$$

folgt durch Anwendung des binomischen Satzes:

$$e^\alpha = \lim_{\nu\to\infty}\left(1+\frac{\nu}{1}\cdot\frac{\alpha}{\nu}+\frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^2+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^3+\cdots+\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^\nu\right)$$

$$=\lim_{\nu\to\infty}\left(1+\alpha+\frac{1-\frac{1}{\nu}}{2}\cdot\alpha^2+\frac{\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)}{2\cdot3}\alpha^3+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu-1}{\nu}\right)}{2\cdot3\cdots\nu}\alpha^\nu\right)$$

---

1) Der Satz gilt natürlich unabhängig davon, ob $\sum\gamma_\nu$ *bedingt* oder *unbedingt* konvergiert, da im *letzteren* Falle $\sum\gamma_\nu^2$ nur *konvergieren* kann, andererseits das Produkt $\prod(1+\gamma_\nu)$ schon auf Grund unserer früheren Ergebnisse (unbedingt) *konvergiert.* Etwas *Neues* bietet daher der Satz nur, wenn $\sum\gamma_\nu$ nur *bedingt* konvergiert.

und daher:

$$e^{\alpha}\begin{cases} < \lim\limits_{\nu\to\infty}\left(1+\alpha+\frac{1}{2}\alpha^2+\cdots+\frac{1}{2}\alpha^{\nu}\right) \\ > \lim\limits_{\nu\to\infty}\left(1+\alpha+\frac{1-\frac{1}{\nu}}{2}\alpha^2+\frac{\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)}{2\cdot 3}\alpha^3\right), \end{cases}$$

also für $0<\alpha<1$:

$$(5)\quad e^{\alpha}\begin{cases} <1+\alpha+\frac{1}{2}\alpha^2(1+\alpha+\alpha^2+\cdots\cdots)=1+\alpha+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^2}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}\left(1-\frac{1}{2}\alpha^2\right) \\ >1+\alpha+\frac{1}{2}\alpha^2=(1+\alpha)\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^2}{1+\alpha}\right) \end{cases}$$

und um so mehr:

$$(6)\quad e^{\alpha}\begin{cases} <\frac{1}{1-\alpha}\left(1-\frac{1}{4}\alpha^2\right) \\ <\frac{1}{(1-\alpha)\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2\right)}\left(\text{wegen: } 0<\left(1-\frac{\alpha^2}{4}\right)\left(1+\frac{\alpha^2}{4}\right)<1\right) \\ >(1+\alpha)\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2\right). \end{cases}$$

Hieraus folgt weiter:

$$\left.\begin{aligned} &(7) & 1-\alpha &< \frac{e^{-\alpha}}{1+\frac{1}{4}\alpha^2} \\ &(8) & 1+\alpha &< \frac{e^{\alpha}}{1+\frac{1}{4}\alpha^2} \end{aligned}\right\}\ \text{für: } 0<\alpha<1$$

und durch Zusammenfassung dieser beiden Ungleichungen, wenn $\gamma=\pm\alpha$ gesetzt wird:

$$(9)\qquad 1+\gamma<\frac{e^{\gamma}}{1+\frac{1}{4}\gamma^2}\quad \text{für: } 0<|\gamma|<1.$$

Bedeutet nun (γ_{ν}) eine Folge reeller Zahlen mit *beliebigem Vorzeichen* und von der Beschaffenheit, daß $|\gamma_{\nu}|<1$ für $\nu>n$, sodann σ einen beliebigen *positiven* echten Bruch, so folgt aus den Ungleichungen (7) und (9), daß:

$$(10)\qquad (1-\sigma)\cdot\prod_{n+1}^{n+\varrho}{}_{\nu}(1+\gamma_{\nu})<\frac{e^{-\sigma+\gamma_{n,\varrho}}}{\left(1+\frac{1}{4}\sigma^2\right)\prod\limits_{n+1}^{n+\varrho}{}_{\nu}\left(1+\frac{1}{4}\gamma_{\nu}^2\right)},$$

$$\text{wo: } \gamma_{n,\varrho}=\gamma_{n+1}+\gamma_{n+2}+\cdots+\gamma_{n+\varrho}$$

und hieraus, wegen:

$$\prod_{n+1}^{n+\varrho} \left(1 + \frac{1}{4}\gamma_\nu^2\right) > 1 + \frac{1}{4}\left(\gamma_{n+1}^2 + \gamma_{n+2}^2 + \cdots + \gamma_{n+\varrho}^2\right),$$

um so mehr:

$$(11) \qquad \prod_{n+1}^{n+\varrho} (1 + \gamma_\nu) < \frac{e^{-(\sigma - \gamma_{n,\varrho})}}{(1-\sigma)\left(1 + \frac{1}{4}\overline{\gamma_{n,\varrho}}\right)},$$

$$\text{wenn: } \overline{\gamma_{n,\varrho}} = \gamma_{n+1}^2 + \gamma_{n+2}^2 + \cdots + \gamma_{n+\varrho}^2.$$

Wird jetzt angenommen, daß:

$$(12) \qquad |\gamma_{n,\varrho}| = \left|\sum_{n+1}^{n+\varrho} \gamma_\nu\right| \leqq \sigma, \text{ also: } \sigma - \gamma_{n,\varrho} \geqq 0,$$

so hat man nach Ungl (11) wiederum um so mehr:

$$(13) \qquad \prod_{n+1}^{n+\varrho} (1 + \gamma_\nu) < \frac{1}{(1-\sigma)\left(1 + \frac{1}{4}\overline{\gamma_{n,\varrho}}\right)} \quad \left(\text{falls: } \left|\sum_{n+1}^{n+\varrho} \gamma_\nu\right| \leqq \sigma\right)$$

Diese Formel wird dazu dienen, um den in dem oben ausgesprochenen Satze enthaltenen *Divergenz*fall zu erledigen. Zu dem entsprechenden *Konvergenz*beweise genügt die aus (13) hervorgehende einfachere Beziehung:

$$(14) \qquad \prod_{n+1}^{n+\varrho} (1 + \gamma_\nu) < \frac{1}{1-\sigma} \quad \left(\text{falls: } \left|\sum_{n+1}^{n+\varrho} \gamma_\nu\right| \leq \sigma\right),$$

welche offenbar auch die folgende nach sich zieht:

$$(15) \qquad \prod_{n+1}^{n+\varrho} (1 - \gamma_\nu) < \frac{1}{1-\sigma} \left(\text{da ja auch: } \left|\sum_{n+1}^{n+\varrho} (-\gamma_\nu)\right| = \left|\sum_{n+1}^{n+\varrho} \gamma_\nu\right| \leqq \sigma\right).$$

Mit Benützung dieser letzten Ungleichung wird sodann:

$$\prod_{n+1}^{n+\varrho} \frac{1}{1+\gamma_\nu} = \prod_{n+1}^{n+\varrho} \left(1 - \frac{\gamma_\nu}{1+\gamma_\nu}\right) < \frac{1}{1-\sigma'} \quad \left(\text{falls: } \left|\sum_{n+1}^{n+\varrho} \frac{\gamma_\nu}{1+\gamma_\nu}\right| \leqq \sigma' < 1\right)$$

und daher:

$$(16) \qquad \prod_{n+1}^{n+\varrho} (1 + \gamma_\nu) > 1 - \sigma' \quad \left(\text{falls: } \left|\sum_{n+1}^{n+\varrho} \frac{\gamma_\nu}{1+\gamma_\nu}\right| \leqq \sigma'\right).$$

3 Sei nun zunächst mit der Reihe: $\sum \gamma_\nu$ auch die Reihe: $\sum \gamma_\nu^2$ *konvergent* (die letztere natürlich *eo ipso absolut*, da sie nur positive Glieder enthält), alsdann konvergiert, da $0 < |\gamma_\nu| \leq \vartheta < 1$ für $\nu > n$, auch die Reihe: $\sum \frac{\gamma_\nu^2}{1+\gamma_\nu}$ und infolge der Beziehung:

$$\gamma_\nu - \frac{\gamma_\nu^2}{1+\gamma_\nu} = \frac{\gamma_\nu}{1+\gamma_\nu}$$

die Reihe: $\sum \frac{\gamma_\nu}{1+\gamma_\nu}$. Infolgedessen kann man einer beliebig klein anzunehmenden positiven Zahl ε eine positive Zahl n so zuordnen, daß *gleichzeitig*:

$$(17) \qquad \left| \sum_{n+1}^{n+\varrho} {}_\nu \, \gamma_\nu \right| < \varepsilon, \quad \left| \sum_{n+1}^{n+\varrho} {}_\nu \, \frac{\gamma_\nu}{1+\gamma_\nu} \right| < \varepsilon \quad (\varrho = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

und daher nach Ungl. (14) und (16):

$$1 - \varepsilon < \prod_{n+1}^{n+\varrho} {}_\nu \, (1+\gamma_\nu) < \frac{1}{1-\varepsilon},$$

oder, wenn man allgemein: $(1+\gamma_0)(1+\gamma_1)\cdots(1+\gamma_\nu) = \Gamma_\nu$ setzt:

$$(18) \qquad -\varepsilon < \frac{\Gamma_{n+\varrho}}{\Gamma_n} - 1 < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad (\varrho = 1, 2, 3, \cdots\cdots),$$

woraus in der Tat die *Konvergenz* des unendlichen Produktes $\prod_0^\infty {}_\nu \, (1+\gamma_\nu)$ hervorgeht.

Ist dagegen $\sum \gamma_\nu^2$ *divergent* und wird sodann wiederum n so fixiert, daß für jedes $\varrho = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ die Beziehung besteht:

$$(19) \qquad \left| \sum_{n+1}^{n+\varrho} {}_\nu \, \gamma_\nu \right| < \varepsilon,$$

so läßt sich zunächst eine untere Schranke für ϱ so bestimmen, daß die bisher (s. Gl. (11)) mit $\overline{\gamma_{n,\varrho}}$ bezeichnete Summe: $\sum_{n+1}^{n+\varrho} {}_\nu \, \gamma_\nu^2$ eine *beliebig groß* anzunehmende positive Zahl übersteigt. Und da andererseits nach Ungl. (13):

$$(20) \qquad \prod_{n+1}^{n+\varrho} {}_\nu \, (1+\gamma_\nu) < \frac{1}{(1-\varepsilon)\left(1+\frac{1}{4}\overline{\gamma_{n,\varrho}}\right)},$$

so erkennt man, daß das unendliche Produkt $\prod_0^\infty {}_\nu \, (1+\gamma_\nu)$ *nach Null divergieren* muß. Damit ist aber der am Schlusse von Nr. 1 ausgesprochene Satz vollständig bewiesen.

Hiernach ergibt sich z. B., daß von den beiden unendlichen Produkten:

$$\prod_{2}^{\infty}{}_{\nu}\left(1+\frac{(-1)^{\nu}}{\nu}\right)=\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\left(1-\tfrac{1}{3}\right)\left(1+\tfrac{1}{4}\right)\left(1-\tfrac{1}{5}\right)\cdots\cdots$$

$$\prod_{2}^{\infty}{}_{\nu}\left(1+\frac{(-1)^{\nu}}{\sqrt{\nu}}\right)=\left(1+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)\left(1-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)\left(1+\sqrt{\tfrac{1}{4}}\right)\left(1-\sqrt{\tfrac{1}{5}}\right)\cdots\cdots$$

das erste *konvergiert*, das zweite *nach Null divergiert.*

Übrigens findet man:

$$\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\left(1-\tfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\tfrac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{2n+1}{2n}\cdot\frac{2n}{2n+1}=1,$$

also auch:

$$\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left(1+\frac{1}{2\nu}\right)\left(1-\frac{1}{2\nu+1}\right)=\prod_{2}^{\infty}{}_{\nu}\left(1+\frac{(-1)^{\nu}}{\nu}\right)=1.$$

§ 87. Anwendung der Lehre von den unendlichen Produkten zur Verschärfung des allgemeinen Konvergenzkriteriums zweiter Art, sowie zur Feststellung der Divergenz und bedingten Konvergenz gewisser Reihen.

1 Der in § 47, Nr. 2, S. 320, bewiesene Hilfssatz, welcher die Grundlage für die Herstellung der Kriterien zweiter Art bildete, daß nämlich für $\nu \geqq n$:

$$p_\nu \geqq k \cdot q_\nu, \text{ wenn: } \frac{p_{\nu+1}}{p_\nu} \geqq \frac{q_{\nu+1}}{q_\nu} \qquad (\nu \geqq n),$$

läßt sich auf Grund der Konvergenzeigenschaften unendlicher Produkte in der Weise vervollständigen, daß selbst unter der Voraussetzung:

$$\frac{p_{\nu+1}}{p_\nu} < \frac{q_{\nu+1}}{q_\nu} \text{ der Schluß erhalten bleibt: } p_\nu \geqq k q_\nu,$$

sofern nur diese Voraussetzung einer passenden Einschränkung unterworfen wird Es gilt nämlich der folgende Satz:

Sind (p_ν), (q_ν) zwei unbegrenzte Folgen positiver Zahlen (eventuell auch mit dem Grenzwerte 0 *für $\nu \longrightarrow \infty$) und ist für $\nu \geqq n$:*

$$\frac{p_{\nu+1}}{p_\nu} = (1-\vartheta_{\nu+1}) \cdot \frac{q_{\nu+1}}{q_\nu}, \quad \text{wo: } 0 \leqq \vartheta_{\nu+1} < 1, \tag{1}$$

so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Beziehung von der Form:

$$p_\nu \geqq k q_\nu \qquad (\nu \geqq n,\ k > 0) \tag{2}$$

in der Konvergenz der Reihe $\sum \vartheta_\nu$.

Beweis. Setzt man in (1) der Reihe nach: $\nu = n, (n+1), \cdots, (n+\varrho-1)$ und multipliziert die so entstehenden Gleichungen miteinander, so folgt:

$$\frac{p_{n+\varrho}}{p_n} = \prod_{n+1}^{n+\varrho}{}_{\nu} (1-\vartheta_\nu) \frac{q_{n+\varrho}}{q_n}$$

und daher:

$$p_{n+\varrho} = \frac{p_n}{q_n} \cdot \prod_{n+1}^{n+\varrho}{}_{\nu} (1-\vartheta_\nu) \cdot q_{n+\varrho} > \frac{p_n}{q_n} \cdot \prod_{n+1}^{\infty}{}_{\nu} (1-\vartheta_\nu) \cdot q_{n+\varrho}.$$

Man hat nun (nach § 82, Nr. 1, S 621):

$$\prod_{n+1}^{\infty}{}_{\nu} (1-\vartheta_\nu) = \Theta_n > 0, \quad \text{wenn } \sum \vartheta_\nu \textit{ konvergiert},$$

$$\prod_{n+1}^{\infty}{}_{\nu} (1-\vartheta_\nu) = 0, \quad \text{wenn } \sum \vartheta_\nu \textit{ divergiert},$$

also im *ersten* Falle für $\varrho = 0, 1, 2, \cdots\cdots$

$$p_{n+\varrho} \geqq k \cdot q_{n+\varrho}, \quad \text{wo: } k = \frac{p_n}{q_n} \cdot \prod_{n+1}^{\infty}{}_{\nu} (1-\vartheta_\nu),$$

während im *zweiten*:

$$\lim_{\varrho \to \infty} \frac{p_{n+\varrho}}{q_{n+\varrho}} = 0$$

wird. —

Zusatz. Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, daß im Falle der Voraussetzung:

$$(1\text{a}) \qquad \frac{p_{\nu+1}}{p_\nu} \geqq (1-\vartheta_{\nu+1}) \cdot \frac{q_{\nu+1}}{q_\nu} \quad (\nu \geqq n)$$

und der Konvergenz von $\sum \vartheta_\nu$ um so mehr die Beziehung besteht:

$$(2) \qquad p_\nu \geqq k q_\nu \quad (\nu \geqq n).$$

Versteht man ferner unter (γ_ν) eine Folge von Zahlen *beliebigen Vorzeichens*, die nur der Bedingung: $\gamma_\nu < 1$ zu genügen haben (dagegen, soweit sie *negativ*, numerisch an keine Schranke gebunden sind), und ist für $\nu \geqq n$:

$$(1\text{b}) \qquad \frac{p_{\nu+1}}{p_\nu} \geqq (1-\gamma_{\nu+1}) \cdot \frac{q_{\nu+1}}{q_\nu},$$

so ergibt sich auf Grund der oben benützten Schlußweise, daß wiederum:

$$(2) \qquad p_\nu \geqq k \cdot q_\nu \quad (\text{für: } \nu \geqq n),$$

sofern nur feststeht, daß $\prod_{n+1}^{n+\varrho}{}_{\nu}(1-\gamma_\nu)$ für jedes (noch so große) ϱ nicht unter eine gewisse positive Zahl herabsinkt, was offenbar allemal der Fall ist, wenn das unendliche Produkt $\prod_{n+1}^{\infty}{}_{\nu}(1-\gamma_\nu)$ entweder *konvergiert* (wenn auch nur *bedingt*) oder nach $+\infty$ *divergiert* oder so *oszilliert*, daß: $\varliminf_{\varrho\to\infty}\prod_{n+1}^{n+\varrho}{}_{\nu}(1-\gamma_\nu)>0$ ausfällt.

2 Setzt man nach dem Vorbilde von § 47, Nr. 3, S. 320, in (1 a)

$$p_\nu = C_\nu^{-1},\ q_\nu = a_{\nu+p} \text{ (sodaß also } a_{\nu+p} \textit{ reell} \text{ und } \textit{positiv}),$$

so folgt, daß für $\nu \geqq n$:

$$C_\nu^{-1} \geqq k\cdot a_{\nu+p},\ \text{also: } a_{\nu+p} \leqq \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{C_\nu}$$

und somit $\sum a_\nu$ *konvergiert*, wenn für $\nu \geqq n$:

$$\frac{C_\nu}{C_{\nu+1}} \geqq (1-\vartheta_{\nu+1})\cdot\frac{a_{\nu+p+1}}{a_{\nu+p}},$$

anders geschrieben:

$$C_\nu\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}-(1-\vartheta_{\nu+1})\,C_{\nu+1}\geqq 0, \tag{3}$$

wobei also die positiven Zahlen ϑ_ν nur der Bedingung zu genügen haben, daß $\sum\vartheta_\nu$ konvergiert.

Die hiernach für die Konvergenz der Reihe $\sum a_\nu$ hinreichende Bedingung (3) läßt sich aber ohne weiteres auch durch die folgende ersetzen:

$$\varliminf_{\nu\to\infty}\left(C_\nu\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}-(1-\vartheta_{\nu+1})\,C_{\nu+1}\right)\geqq 0 \tag{4}$$

Ist nämlich diese Bedingung erfüllt, so hat man für hinlänglich große ν, etwa für $\nu \geqq n$:

$$C_\nu\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}-(1-\vartheta_{\nu+1})\,C_{\nu+1}\geqq -1,$$

anders geschrieben:

$$C_\nu\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}-\left(1-\left(\vartheta_{\nu+1}+\frac{1}{C_{\nu+1}}\right)\right)C_{\nu+1}\geqq 0,$$

woraus aber auf Grund des an Ungl. (3) geknüpften Ergebnisses wieder die *Konvergenz* von $\sum a_\nu$ hervorgeht, da ja $\sum\left(\vartheta_{\nu+1}+\frac{1}{C_{\nu+1}}\right)$ wiederum konvergiert.

Vergleicht man das Konvergenzkriterium (4) mit der in § 47, Nr. 3 unter (12), S. 321, gegebenen Kriterienform, nämlich:

$$(5) \qquad \lim_{\nu \to \infty} \left(C_\nu \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - C_{\nu+1} \right) > 0,$$

so erscheint das Kriterium (4) offenbar als eine merkliche *Verbesserung* von (5), da ja, wegen: $(1 - \vartheta_{\nu+1}) C_{\nu+1} < C_{\nu+1}$, die Bedingung (4) sehr wohl erfüllt sein kann, wenn:

$$\lim_{\nu \to \infty} \left(C_\nu \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - C_{\nu+1} \right) \leqq 0$$

ausfällt, also das Kriterium (5) *keine* Entscheidung liefert. Setzt man insbesondere: $\vartheta_\nu = \frac{G}{C_\nu}$, unter G eine *beliebig groß* zu denkende positive Zahl verstanden, so nimmt die für die Konvergenz von $\sum a_\nu$ hinreichende Bedingung (4) die Form an:

$$(4\text{a}) \quad \lim_{\nu \to \infty} \left(C_\nu \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - C_{\nu+1} \right) \geqq - G, \text{ d. h. schließlich:} > -\infty.$$

(Beispiel. Setzt man, wie in dem § 54, Nr. 2 am Ende, S. 380, betrachteten Beispiele: $C_\nu = \nu(\nu + 1)$, im übrigen: $a_{\nu+p} = \frac{1}{(\nu+p)^2}$ (statt wie dort: $a_{\nu+p} = \frac{1}{\nu^2}$), so folgt:

$$\begin{aligned} C_\nu \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - C_{\nu+1} &= \frac{\nu+1}{(\nu+p)^2}\left(\nu(\nu+p+1)^2 - (\nu+2)(\nu+p)^2\right) \\ &= -\frac{\nu+1}{(\nu+p)^2}\left((2p-1)\nu + 2p^2\right), \end{aligned}$$

also:

$$\lim_{\nu \to \infty} \left(C_\nu \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - C_{\nu+1} \right) = -(2p-1) < 0 \text{ für } p \geqq 1,$$

sodaß also das Kriterium (5) versagen würde, während (4a) Auskunft gibt.) [1])

3. Die bisher gewonnenen Hilfsmittel zur Feststellung der Konvergenz oder Divergenz unendlicher *Produkte* setzen uns in den Stand die früher abgeleiteten Kriterien zur Beurteilung gewisser unendlicher *Reihen* zu vervollständigen, nämlich derjenigen, deren im übrigen als beliebig *komplex* zu denkende Glieder a_ν einer Bedingung von der Form:

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1 + \frac{k}{\nu} + \frac{r_\nu}{\nu^2} \ (\text{wo: } \overline{\lim_{\nu \to \infty}} |r_\nu| < +\infty)$$

---

1) Man überzeugt sich leicht, daß die Anwendung des in Nr. 1 enthaltenen Ergebnisses auf das *Divergenz*kriterium oder auf die *Umformung* des *Konvergenz*kriteriums durch Einführung der D_ν an Stelle der C_ν (vgl. § 54, Nr. 1, S. 378) kein nennenswertes Resultat liefert.

genügen. Wir fanden (§ 76, Nr. 5, S. 590), daß in diesem Falle $\sum a_\nu$ *absolut konvergiert* oder *absolut divergiert*, je nachdem $\Re(k) > 1$ oder $\Re(k) \leqq 1$. Im letzteren Falle bliebe dann zunächst noch die Möglichkeit *bedingter* Konvergenz. Es wird sich nun zeigen, daß diese Eventualität für die Reihe $\sum a_\nu$ in Wirklichkeit *ausgeschlossen* erscheint, daß sie dagegen für die Reihe $\sum(-1)^\nu a_\nu$ eintritt, wenn: $0 < \Re(k) \leqq 1$.

Wir betrachten zunächst eine Folge *positiver* reeller Zahlen α_ν, für welche die Beziehung besteht:

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = 1 + \frac{\varkappa}{\nu} + \frac{\varrho_\nu}{\nu^2}. \tag{6}$$

Dabei bedeutet wiederum $\varkappa$ eine von ν unabhängige reelle Zahl, während ϱ_ν mit ν sich ändern kann, jedoch nur so, daß $|\varrho_\nu|$ stets unter einer festen Schranke g bleibt.

Ist nun $\varkappa$ *von Null verschieden*, so läßt sich Gl. (6) in die Form setzen:

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = 1 + \frac{\varkappa}{\nu}\left(1 + \frac{\varrho_\nu}{\varkappa\nu}\right) \tag{7}$$

und sodann eine Zahl m in der Weise fixieren, daß für $\nu \geqq m$:

$$|\varkappa|\nu \geqq g > |\varrho_\nu|, \text{ also: } 1 + \frac{\varrho_\nu}{\varkappa\nu} > 0.$$

Daraus folgt, daß für $\nu \geqq m$:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} < 1, \text{ falls: } \varkappa < 0, \\ \dfrac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} > 1, \text{ falls: } \varkappa > 0, \end{array}\right. \tag{8}$$

d. h. die α_ν nehmen, von einer bestimmten Stelle an, *monoton zu*, wenn $\varkappa < 0$, *monoton ab*, wenn $\varkappa > 0$.

Um den Grenzwert von α_ν für $\nu \to \infty$ zu bestimmen, schreiben wir Gl. (6) folgendermaßen:

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \left(1 + \frac{\varkappa}{\nu}\right)\left(1 + \frac{\varrho_\nu}{\nu(\nu+\varkappa)}\right) \tag{9}$$

und substituieren der Reihe nach $\nu = m, (m+1), \cdots (\mu - 1)$ (dabei hat man, wenn $\varkappa$ eine *negative ganze* Zahl sein sollte, von vornherein $m > |\varkappa|$ anzunehmen, damit $\nu + \varkappa$ stets von Null verschieden ausfällt). Alsdann ergibt sich durch Multiplikation der betreffenden Gleichungen:

$$\frac{\alpha_m}{\alpha_\mu} = \prod_m^{\mu-1}{}_\nu \left(1 + \frac{\varkappa}{\nu}\right) \cdot \prod_m^{\mu-1}{}_\nu \left(1 + \frac{\varrho_\nu}{\nu(\nu+\varkappa)}\right). \tag{10}$$

Läßt man μ ins Unendliche wachsen, so *konvergiert* das *zweite* Produkt, wegen: $\left|\frac{\varrho_\nu}{\nu(\nu+\varkappa)}\right| < \frac{g}{\nu\cdot|\nu+\varkappa|}$, während das *erste* nach 0 oder ∞ *divergiert*, je nachdem $\varkappa < 0$ oder $\varkappa > 0$. Hiernach wird:

$$\frac{\alpha_m}{\lim\limits_{\mu\to\infty}\alpha_\mu}\begin{cases} = \ 0, & \text{falls: } \varkappa < 0,\\ \not= \infty, & \text{falls: } \varkappa > 0,\end{cases}$$

und, da α_m eine bestimmte positive Zahl vorstellt:

$$\lim_{\mu\to\infty}\alpha_\mu \begin{cases} = \infty, & \text{falls: } \varkappa < 0,\\ = \ 0, & \text{falls. } \varkappa > 0.\text{[1]}\end{cases} \tag{11}$$

Ist $\varkappa = 0$, also:

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = 1 + \frac{\varrho_\nu}{\nu^2}, \tag{12}$$

so erkennt man zunächst, daß die α_ν nur dann *monoton zu-* bzw. *abnehmen*, wenn ϱ_ν für $\nu \geqq m$ *beständig* < 0 bzw. > 0 ist. Sie besitzen aber *in jedem Falle* für $\nu \longrightarrow \infty$ einen bestimmten, *von Null verschiedenen* Grenzwert. Man findet nämlich für $\varkappa = 0$ aus Gl. (10):

$$\frac{\alpha_m}{\alpha_\mu} = \prod_m^{\mu-1}{}_\nu \left(1 + \frac{\varrho_\nu}{\nu^2}\right), \tag{13}$$

und hieraus:

$$\lim_{\mu\to\infty}\alpha_\mu = \frac{\alpha_m}{\prod\limits_m^{\infty}{}_\nu\left(1 + \frac{\varrho_\nu}{\nu^2}\right)}, \tag{14}$$

---

1) Durch eine unerhebliche Modifikation des im Texte eingeschlagenen Verfahrens läßt sich das bei früherer Gelegenheit (s. § 58, S. 367, Fußnote) angekündigte Resultat herleiten, daß in einem besonderen Falle — nämlich, wenn die durchweg positiven Reihenglieder α_ν der Gl. (6) genügen — die Bedingung $\lim\limits_{\nu\to\infty}\nu\,\alpha_\nu = 0$ schon *hinreichend* für die Konvergenz der Reihe $\sum\alpha_\nu$ ist. Aus Gl. (9) folgt durch Multiplikation mit $\frac{\nu}{\nu+1}$:

$$\frac{\nu\cdot\alpha_\nu}{(\nu+1)\cdot\alpha_{\nu+1}} = \left(\frac{\nu+\varkappa}{\nu+1}\right)\left(1 + \frac{\varrho_\nu}{\nu(\nu+\varkappa)}\right) = \left(1 + \frac{\varkappa-1}{\nu+1}\right)\left(1 + \frac{\varrho_\nu}{\nu(\nu+\varkappa)}\right)$$

und hieraus durch Substitution von $\nu = m, (m+1), \cdots (\mu-1)$ und Multiplikation:

$$\frac{m\,\alpha_m}{\mu\cdot\alpha_\mu} = \prod_m^{\mu-1}{}_\nu\left(1 + \frac{\varkappa-1}{\nu+1}\right)\cdot\prod_m^{\mu-1}{}_\nu\left(1 + \frac{\varrho_\nu}{\nu(\nu+\varkappa)}\right).$$

Daraus folgt, analog wie im Text:

$$\lim_{\mu\to\infty}\mu\,\alpha_\mu \begin{cases} = 0 & \text{für } \varkappa > 1\\ = \infty & \text{,, } \varkappa < 1\\ > 0 \text{ (endlich)} & \text{,, } \varkappa = 1.\end{cases}$$

Mithin muß auch *umgekehrt* stets $\varkappa > 1$ sein, wenn $\lim\limits_{\mu\to\infty}\mu\,\alpha_\mu = 0$. Alsdann ist aber auch die Reihe $\sum\alpha_\nu$ *konvergent* (nach § 55, Nr. 2, S. 389).

d. h. *endlich und von Null verschieden,* da das betreffende Produkt *konvergiert.*

4. Es seien jetzt die a_ν beliebig komplex und:

$$(15)\qquad \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1 + \frac{k}{\nu} + \frac{r_\nu}{\nu^2} \qquad (\text{wo } |r_\nu| < g)$$

$$= 1 + \frac{\varkappa + \lambda i}{\nu} + \frac{\varrho_\nu + \sigma_\nu i}{\nu^2},$$

so wird (vgl. § 77, Gl. (24), (25), S. 589):

$$(16)\qquad \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 = 1 + \frac{2\varkappa}{\nu} + \frac{R_\nu}{\nu^2},$$

wo:

$$(17)\qquad R_\nu = \varkappa^2 + \lambda^2 + 2\varrho_\nu + 2\cdot\frac{\varkappa\varrho_\nu + \lambda\sigma_\nu}{\nu} + \frac{\varrho_\nu^2 + \sigma_\nu^2}{\nu^2}$$

und daher auch R_ν stets unter einer endlichen Grenze G bleibt.

Infolgedessen ergibt sich aus Nr. 3 unmittelbar folgendes:

1) Ist $\varkappa < 0$, so nehmen die Zahlen $|a_\nu|^2$, also auch die $|a_\nu|$ mit ν *monoton zu,* und man hat:

$$(18)\qquad \lim_{\nu\to\infty} |a_\nu| = \infty, \text{ also auch: } \lim_{\nu\to\infty} a_\nu = \infty.$$

2) Ist $\varkappa > 0$, so nehmen die $|a_\nu|^2$ bzw. die $|a_\nu|$ mit wachsendem ν *monoton ab,* und man hat:

$$(19)\qquad \lim_{\nu\to\infty} |a_\nu| = 0, \text{ also auch: } \lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0.$$

3) Ist $\varkappa = 0$, so besitzt $|a_\nu|^2$, also auch $|a_\nu|$ für $\nu \longrightarrow \infty$ eine bestimmten, *von Null verschiedenen* Grenzwert. Daraus folgt aber noch *nicht,* daß das gleiche für a_ν selbst gilt. Man hat nun in dem betrachteten Falle:

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1 + \frac{\lambda i}{\nu} + \frac{r_\nu}{\nu^2} = \left(1 + \frac{\lambda i}{\nu}\right)\left(1 + \frac{r_\nu}{\nu(\nu + \lambda i)}\right)$$

und daher:

$$(20)\qquad \frac{a_m}{a_\mu} = \prod_m^{\mu-1}{}_\nu \left(1 + \frac{\lambda i}{\nu}\right)\cdot \prod_m^{\mu-1}{}_\nu \left(1 + \frac{r_\nu}{\nu(\nu+\lambda i)}\right).$$

Das *zweite* Produkt ist wiederum für $\mu \longrightarrow \infty$ absolut *konvergent,* da:

$$\left|\frac{r_\nu}{\nu(\nu+\lambda i)}\right| < \frac{g}{\nu^2}\cdot\left|\frac{1}{1+\frac{\lambda i}{\nu}}\right|.$$

Das *erste* dagegen besitzt zwar für $\mu \longrightarrow \infty$ einen bestimmten *absoluten Betrag*, wogegen der *Einheitsfaktor*, wenn λ von Null verschieden ist, *unbestimmt* wird (§ 82, Nr. 2, S. 630).

Somit wird in diesem Falle a_μ für $\mu \longrightarrow \infty$ in der Weise unbestimmt, daß zwar $\lim\limits_{\mu \to \infty} |a_\mu|$ einen bestimmten, von Null verschiedenen Wert besitzt, während der Einheitsfaktor von a_μ unbestimmt wird.

Nur in dem besonderen Falle $\lambda = 0$ (also: $k = 0$) hat man:

$$\frac{a_m}{a_\mu} = \prod_m^{\mu-1}{}_{\nu} \left(1 + \frac{r_\nu}{\nu^2}\right), \tag{21}$$

sodaß also $\lim\limits_{\mu \to \infty} a_\mu$ einen *bestimmten, von Null verschiedenen* Wert besitzt

5. Aus den unter 1) und 3) der vorigen Nummer gefundenen Resultaten folgt, daß die Reihe $\sum a_\nu$ für $\varkappa \leqq 0$ stets *divergieren* muß, da ihre Glieder *nicht* den Grenzwert *Null* besitzen. Da sie im übrigen für $\varkappa > 1$ als *absolut konvergent* erkannt wurde, so erfordert nur noch der Fall $0 < \varkappa \leqq 1$, für welchen ja immerhin $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu = 0$ sich ergab, eine genauere Untersuchung. Wir wollen nun zeigen:

> *Auch für $0 < \varkappa \leqq 1$ ist $\sum a_\nu$ divergent. Dagegen ist $\sum (a_\nu - a_{\nu+1})$ absolut und somit $\sum a_\nu x^\nu$ noch für alle x mit dem absoluten Betrage $|x| = 1$, mit einzigem Ausschluß von $x = 1$, bedingt konvergent.*

Beweis. Wir bringen Gl. (15) durch Multiplikation und Division der rechten Seite mit $\left(1 - \frac{k}{\nu}\right)$ auf die Form:

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = \frac{1 - \frac{k^2}{\nu^2} + \left(1 - \frac{k}{\nu}\right) \cdot \frac{r_\nu}{\nu^2}}{1 - \frac{k}{\nu}}$$

$$= \frac{1 + \frac{t_\nu}{\nu^2}}{1 - \frac{k}{\nu}}, \quad \text{wo: } t_\nu = \left(1 - \frac{k}{\nu}\right) \cdot r_\nu - k^2, \tag{22}$$

sodaß also $|t_\nu|$ mit $|r_\nu|$ stets unter einer endlichen Grenze bleibt. Sodann setzen wir:

$$a_\nu = p_\nu \cdot q_\nu, \quad \text{also: } \frac{p_\nu}{p_{\nu+1}} \cdot \frac{q_\nu}{q_{\nu+1}} = \frac{1 + \frac{t_\nu}{\nu^2}}{1 - \frac{k}{\nu}}, \tag{23}$$

wo p_ν und q_ν einzeln genommen den Beziehungen genügen sollen:

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{p_\nu}{p_{\nu+1}} = \dfrac{1}{1-\dfrac{k}{\nu}}, \quad \dfrac{q_\nu}{q_{\nu+1}} = 1 + \dfrac{t_\nu}{\nu^2} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots).^{1)}, \\ \qquad\qquad p_1 = 1, \; q_1 = a_1. \end{cases}$$

Was dann zunächst die q_ν betrifft, so besitzen dieselben (s. das Schlußresultat der vorigen Nummer) für $\nu \longrightarrow \infty$ einen *bestimmten, von Null verschiedenen* Grenzwert, etwa:

$$(25)\qquad \lim_{\nu \to \infty} q_\nu = q.$$

Um die Art der Annäherung von q_ν an diesen Grenzwert q näher zu beurteilen, hat man nach Gl. (24):

$$q_\nu - q_{\nu+1} = \frac{t_\nu q_{\nu+1}}{\nu^2},$$

und hieraus, wenn man ν der Reihe nach durch $(\nu+1)$, $(\nu+2)$, $\cdots$ $(\nu+n-1)$ ersetzt und die resultierenden Gleichungen zu der vorstehenden addiert:

$$(26)\qquad q_\nu - q_{\nu+n} = \sum_{\nu}^{\nu+n-1}{}_{\mu} \frac{t_\mu q_{\mu+1}}{\mu^2}.$$

Da $|t_\mu|$, $|q_\mu|$ stets endlich bleiben, so *konvergiert* diese Summe, wenn n ins Unendliche wächst, und es ergibt sich somit für $n \longrightarrow \infty$:

$$(27)\qquad q_\nu - q = \sum_{\nu}^{\infty}{}_{\mu} \frac{t_\mu q_{\mu+1}}{\mu^2},$$

also:

$$(28)\qquad |q_\nu - q| \leqq \sum_{\nu}^{\infty}{}_{\mu} \frac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\cdot|t_\mu|\cdot|q_{\mu+1}|}{\mu\cdot(\mu+1)}.$$

Nun bleibt offenbar der Zähler jedes Reihengliedes unter einer endlichen Zahl h, und da: $\sum_{\nu}^{\infty}{}_{\mu} \frac{1}{\mu\,(\mu+1)} = \sum_{\nu}^{\infty}{}_{\mu}\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu+1}\right) = \frac{1}{\nu}$, so wird:

$$(29)\qquad |q_\nu - q| < \frac{h}{\nu},$$

sodaß man setzen kann:

$$(30)\qquad q_\nu = q + \frac{h_\nu}{\nu}, \quad \text{wo: } |h_\nu| < h.$$

---

[1]) Ist speziell $k=1$, so wird die Gleichung:

$$\frac{p_\nu}{p_{\nu+1}} = \frac{1}{1-\dfrac{k}{\nu}}$$

für $\nu = 1$ sinnlos. Dieselbe soll dann (wie auch die Gleichungen (22), (23)) nur für $\nu \geqq 2$ gelten und außerdem:

$$p_2 = 1, \; q_2 = a_2$$

gesetzt werden.

Andererseits läßt sich zeigen, daß $\sum p_\nu$ *divergiert*, während $\sum \frac{p_\nu}{\nu}$ und $\sum (p_\nu - p_{\nu+1})$ *absolut konvergieren.* Man hat nach Gl. (24):

$$\frac{p_{\mu+1}}{p_\mu} = 1 - \frac{k}{\mu} = \frac{\mu - k}{\mu} \tag{31}$$

und hieraus durch Substitution von $\mu = 1, 2, \cdots \nu$ [1]) und Multiplikation:

$$p_{\nu+1} = \frac{(1-k)(2-k)\cdots(\nu-k)}{1\cdot 2\cdots \nu}. \tag{32}$$

Hiernach wird:

$$\begin{cases} s_2 = p_1 + p_2 = 1 + \frac{1-k}{1} = \frac{2-k}{1} \\ s_3 = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{2-k}{1} + \frac{(1-k)(2-k)}{1\cdot 2} = \frac{(2-k)(3-k)}{1\cdot 2}. \end{cases} \tag{33}$$

Angenommen, man habe allgemein:

$$s_\nu = p_1 + p_2 + \cdots + p_\nu = \frac{(2-k)(3-k)\cdots(\nu-k)}{1\cdot 2\cdots\cdots(\nu-1)}, \tag{34}$$

so wird:

$$s_{\nu+1} = \frac{(2-k)(3-k)\cdots(\nu-k)}{1\cdot 2\cdots\cdots(\nu-1)}\left(1 + \frac{1-k}{\nu}\right) = \frac{(2-k)(3-k)\cdots(\nu+1-k)}{1\cdot 2\cdots\cdots \nu}, \tag{35}$$

d. h. $s_{\nu+1}$ hat dann wiederum genau die entsprechende Form. Da aber die Richtigkeit der Beziehung (34) für $\nu = 2$, $\nu = 3$ erwiesen ist, so gilt sie hiernach für jeden Wert von ν. Bringt man jetzt $s_{\nu+1}$ auf die Form:

$$\begin{aligned} s_{\nu+1} &= \prod_1^\nu{}^{\mu} \frac{\mu+1-k}{\mu} = \prod_1^\nu{}^{\mu} \frac{\mu+1-\varkappa-\lambda i}{\mu+1-\varkappa}\cdot\frac{\mu+1-\varkappa}{\mu} \\ &= \prod_1^\nu{}^{\mu}\left(1 + \frac{1-\varkappa}{\mu}\right)\cdot \prod_1^\nu{}^{\mu}\left(1 - \frac{\lambda i}{\mu+1-\varkappa}\right), \end{aligned} \tag{36}$$

so erkennt man, daß unter der Voraussetzung $\varkappa < 1$ das *erste* Produkt für $\nu \longrightarrow \infty$ nach $+\infty$ *divergiert*, während das zweite einen bestimmten *endlichen absoluten Betrag*, aber, falls nicht gerade $\lambda = 0$, einen *unbestimmten Einheitsfaktor* besitzt. Es *divergiert* also in diesem Falle $\sum p_\nu$ in der Weise, daß der *absolute Betrag unendlich groß* und außerdem, wenn nicht gerade $\lambda = 0$ ist, der *Einheitsfaktor unbestimmt* wird.

---

[1]) Dabei ist wieder der Spezialfall $k = 1$ auszuschließen. In diesem Falle wird:

$$\frac{p_{\mu+1}}{p_\mu} = \frac{\mu-1}{\mu},$$

und daher durch Substitution von $\mu = 2, 3, \cdots \nu$ und Multiplikation:

$$\frac{p_{\nu+1}}{p_2} = p_{\nu+1} = \frac{1}{\nu},$$

sodaß $\sum p_\nu$ nach $+\infty$ divergiert.

Ist $\varkappa = 1$, so reduziert sich Gl. (36) auf die folgende:

$$(37) \qquad s_{\nu+1} = \prod_{1}^{\nu} {}_{\mu} \left(1 - \frac{\lambda i}{\mu}\right),$$

sodaß $s_{\nu+1}$ für $\lambda \gtrless 0$ mit unbegrenzt wachsendem ν (nach § 82, Nr. 2, S 630) *endlich-unbestimmt* wird [1]) —

Man hat nun ferner:

$$(38) \qquad \frac{\frac{1}{\nu} \cdot p_\nu}{\frac{1}{\nu+1} \cdot p_{\nu+1}} = \frac{\nu+1}{\nu} \cdot \frac{1}{1 - \frac{k}{\nu}}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\left(1 + \frac{k}{\nu} + \frac{k^2}{\nu^2\left(1 - \frac{k}{\nu}\right)}\right)$$

$$(39) \qquad = 1 + \frac{k+1}{\nu} + \frac{k}{\nu^2}\left(1 + k \cdot \frac{1 + \frac{1}{\nu}}{1 - \frac{k}{\nu}}\right),$$

und hieraus folgt ohne weiteres mit Hilfe des Konvergenzkriteriums in § 76, Nr. 5, S 590, daß $\sum \frac{p_\nu}{\nu}$ *absolut konvergiert,* falls $\Re(k+1) > 1$, d. h $\varkappa > 0$.

Schließlich wird auch:

$$\frac{p_\nu - p_{\nu+1}}{p_{\nu+1} - p_{\nu+2}} = \frac{p_\nu}{p_{\nu+1}} \cdot \frac{1 - \frac{p_{\nu+1}}{p_\nu}}{1 - \frac{p_{\nu+2}}{p_{\nu+1}}}$$

$$= \frac{\nu}{\nu - k} \cdot \frac{\frac{k}{\nu}}{\frac{k}{\nu+1}} = \frac{\nu+1}{\nu} \cdot \frac{1}{1 - \frac{k}{\nu}} \text{ (vgl. Gl. (38))}.$$

woraus wiederum für $\varkappa > 0$ die *absolute Konvergenz* von $\sum (p_\nu - p_{\nu+1})$ resultiert.

Jetzt ergibt sich mit Berücksichtigung von Gl. (23) und (30):

$$(40) \qquad a_\nu = p_\nu \cdot q_\nu = q \cdot p_\nu + h_\nu \cdot \frac{p_\nu}{\nu}.$$

$$(41) \qquad a_\nu - a_{\nu+1} = q(p_\nu - p_{\nu+1}) + h_\nu \cdot \frac{p_\nu}{\nu} - h_{\nu+1} \cdot \frac{p_{\nu+1}}{\nu+1}.$$

---

1) Der Fall $\varkappa = 1$, $\lambda = 0$, d. h $k = 1$ ist bereits in der vorigen Fußnote behandelt.

Aus der ersten Gleichung erkennt man sofort die *Divergenz* von $\sum a_\nu$, da $q\sum p_\nu$ *divergiert* und, wegen $|h_\nu| < h$, $\sum h_\nu \cdot \frac{p_\nu}{\nu}$ *absolut konvergiert*

Infolge der zweiten Gleichung wird:

$$(42) \qquad |a_\nu - a_{\nu+1}| < q \cdot |p_\nu - p_{\nu+1}| + h \cdot \left|\frac{p_\nu}{\nu}\right| + h \cdot \left|\frac{p_{\nu+1}}{\nu+1}\right|,$$

woraus die *Konvergenz* der Reihe $\sum |a_\nu - a_{\nu+1}|$ unmittelbar hervorgeht.

Mit der letzteren Reihe *konvergiert* aber, da überdies $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$ (Gl. (19)), nach dem Satze von § 77, Nr. 2, S. 594, die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für alle x mit dem absoluten Betrage $|x| = 1$ mit Ausnahme von $x = 1$, und zwar offenbar nur *bedingt*.

Wendet man dieses Ergebnis auf die *hypergeometrische* Reihe an, also auf die Annahme (s § 76, Gl. (29), S. 590):

$$(43) \qquad a_\nu = \frac{a(a+1)\cdots(a+\nu-1)\cdot b(b+1)\cdots(b+\nu-1)}{1\cdot 2\cdots \nu \cdot c(c+1)\cdots(c+\nu-1)},$$

so hat man (s. a. a. O Gl. (31)):

$$k = 1 + c - (a+b), \text{ also: } \varkappa = 1 + \Re\,(c - (a+b)),$$

und die Bedingung $0 < \varkappa \leqq 1$, unter welcher das fragliche Ergebnis gilt, nimmt daher die Form an:

$$(44) \qquad -1 < \Re\,(c - (a+b)) \leqq 0.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so ist also die hypergeometrische Reihe $\sum a_\nu$ zwar *divergent*, dagegen *konvergiert* $\sum a_\nu x^\nu$ noch für alle x mit dem absoluten Betrage $|x| = 1$ mit einziger Ausnahme von $x = 1$.

Durch die Spezialisierung $b = c$ und Substitution von $-a$ an Stelle von a, $-x$ an Stelle von x (vgl. a. a. O. Gl (33), (34)) geht die allgemeine hypergeometrische Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ in die *binomische* $\sum (a)_\nu x^\nu$ über, wo:

$$(45) \qquad (a)_\nu = \frac{a(a-1)\cdots(a-\nu+1)}{1\cdot 2\cdots \nu}.$$

Unter der in diesem Falle aus (44) hervorgehenden Bedingung, nämlich:

$$(46) \qquad -1 < \Re\,(a) \leqq 0$$

ist dann die binomische Reihe $\sum (a)_\nu x^\nu$ noch *bedingt konvergent* für alle x mit dem absoluten Betrage $|x| = 1$, außer für $x = -1$, in welchem Falle sie (d. h. also die Reihe $\sum (-1)^\nu \cdot (a)_\nu$) *divergiert.*

Abschnitt IV.

Endliche und unendliche Kettenbrüche.

Kapitel I.

Allgemeine Grundlagen der Lehre von den Kettenbrüchen.

§ 88. Unendliche Algorithmen. — Euklidischer Algorithmus und regelmäßiger Kettenbruch. — Endliche, insbesondere elementare Kettenbrüche aus beliebigen Zahlen. — Durchweg elementare Kettenbrüche.

1. Das charakteristische Merkmal der besonderen als *unendliche Reihen* und *Produkte* bezeichneten Zahlenfolgen, also derjenigen von der Form $(a_0 + a_1 + \cdots + a_\nu)$ bzw. $(a_0 \cdot a_1 \cdots a_\nu)$, besteht darin, daß jedes ihrer Glieder für $\nu \geqq 1$ aus dem unmittelbar vorhergehenden durch eine unveränderlich bleibende *Rechenvorschrift* erzeugt wird, nämlich durch die *Addition* einer jedesmal vorgeschriebenen, also *ausdrücklich als gegeben*[1]) anzusehenden Zahl bzw. durch *Multiplikation*

1) *Hierauf* liegt der Nachdruck. Denn andererseits läßt sich ja jedes Glied a_ν $(\nu \geqq 1)$ einer ganz *beliebig* vorgelegten Zahlenfolge durch *Addition* einer *passend bestimmten* Zahl und, falls durchweg $|a_\nu| > 0$, auch durch *Multiplikation* mit einer solchen aus $a_{\nu-1}$ erzeugen Man hat nämlich

$$a_\nu = a_{\nu-1} + (a_\nu - a_{\nu-1})$$

$$\text{bzw. } a_\nu = a_{\nu-1} \cdot \frac{a_\nu}{a_{\nu-1}}.$$

Daraus folgt weiter:

$$a_n = a_0 + \sum_1^n{}_\nu (a_\nu - a_{\nu-1}) \quad \text{(vgl. § 85, Gl (4), S. 646)}$$

$$\text{bzw. } a_n = a_0 \cdot \prod_1^n{}_\nu \frac{a_\nu}{a_{\nu-1}} \quad (|a_\nu| > 0 \text{ für } \nu = 0, 1, \cdots, n-1).$$

Wenn sodann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ zum mindesten im weitesten Sinne (s. § 73, Nr. 3, S. 565) existiert, so ergibt sich:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_0 + \sum_0^\infty{}_\nu (a_\nu - a_{\nu-1})$$

$$\text{bzw. } \lim_{n\to\infty} a_n = a_0 \cdot \prod_1^\infty{}_\nu \frac{a_\nu}{a_{\nu-1}}.$$

Es läßt sich also der Grenzwert (im weitesten Sinne) *jeder* einen solchen besitzenden Zahlenfolge (a_ν) auch durch eine *unendliche Reihe* und, im Falle $|a_\nu| > 0$, auch durch ein *unendliches Produkt* darstellen. Besonders von der ersten dieser beiden Möglichkeiten wird in der Funktionenlehre häufig Gebrauch gemacht.

mit einer solchen. Da man die unbegrenzt fortzusetzende Wiederholung irgendeiner bestimmten *Rechenvorschrift* auch als *unendlichen Algorithmus* zu bezeichnen pflegt, so erscheinen in diesem Zusammenhange die unendlichen Reihen und Produkte als einfachste Typen solcher unendlicher Algorithmen, da sie ja lediglich auf einer beständigen Wiederholung je einer der beiden einfachsten Rechenoperationen beruhen. Im Anschlusse hieran liegt die Frage nahe, ob die beiden noch übrigen der vier fundamentalen Rechenoperationen nicht geeignet sind, weitere Typen unendlicher Algorithmen von entsprechender Einfachheit zu liefern. Diese Frage ist zunächst offenbar zu verneinen. Denn die beständig wiederholte Ausübung der *Subtraktion* bzw. *Division* auf die Glieder einer vorgeschriebenen Zahlenfolge (a_ν) würde ja wieder nur eine *unendliche Reihe*, nämlich eine solche von der Form: $a_0 - a_1 - a_2 - \cdots - a_\nu - \cdots\cdots$ bzw., mit Hinzufügung der beschränkenden Voraussetzung $|a_\nu| > 0$, ein *unendliches Produkt* von der Form: $a_0 \cdot \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_\nu} \cdots\cdots$ liefern. Dagegen besitzen wir in dem sog. *Euklidischen Algorithmus* (§ 6, Nr. 2, S. 35) eine besondere Form eines fortgesetzten *Divisions*prozesses, welche zunächst zur Bildung eines neuen Typus von Zahlenverbindungen, nämlich der (endlichen) *Kettenbrüche* Anlaß gibt, und diese letzteren lassen sich schließlich auch zu einem *unendlichen Algorithmus* von annähernd ähnlicher Einfachheit und Wichtigkeit wie die beiden zuvorgenannten ausgestalten.[1])

2. Es seien ξ_0, ξ_1 zwei natürliche *relativ prime* Zahlen, und zwar $\xi_0 > \xi_1$. Die Anwendung des Euklidischen Algorithmus liefert alsdann nach § 6, Gl. (3), S. 35, und Gl. (4), S. 37, wenn man die dort gebrauchten Buchstaben:

$$\begin{array}{lllll} & b \;\; a \;\; a_1 \cdots a_{\nu-1} \cdots & \text{und:} & q \;\; q_1\, q_2 \cdots q_\nu \cdots \\ \text{durch:} & \xi_0 \;\; \xi_1 \;\; \xi_2 \cdots \xi_\nu \quad \cdots & \text{und:} & \beta_0\, \beta_1\, \beta_2 \cdots \beta_\nu \cdots, \end{array}$$

außerdem noch $n - 1$ durch n ersetzt, ein Gleichungssystem von folgender Form:

---

1) Andere Beispiele von unendlichen Algorithmen bieten die in § 78 betrachteten *iterierten Mittelwerte* und *iterierten Summationen*. Einen unendlichen Algorithmus von wesentlich verwickelterem Bildungsgesetz liefern die sog. *unendlichen Determinanten*, deren Betrachtung jedoch nicht im Rahmen dieser Vorlesungen liegt. Dagegen wird in deren zweitem Bande noch ein weiterer verhältnismäßig einfacher, wieder auf *Mittelwert*bildung beruhender unendlicher Algorithmus entwickelt werden, der für die dortige Behandlung der Funktionenlehre grundlegende Bedeutung besitzt.

$$(1)\qquad \begin{cases} \xi_0 = \beta_0 \xi_1 + \xi_2 \\ \xi_1 = \beta_1 \xi_2 + \xi_3 \\ \xi_2 = \beta_2 \xi_3 + \xi_4 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \xi_{\nu-1} = \beta_{\nu-1}\xi_\nu + \xi_{\nu+1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \xi_{n-1} = \beta_{n-1}\xi_n + 1 \\ \xi_n = \beta_n \cdot 1, \end{cases}$$

und es ist:

$$(2)\qquad \begin{matrix} \beta_\nu \geqq 1\ (\nu = 0, 1, \cdots n-1), \quad \beta_n > 1 \\ \xi_0 > \xi_1 > \xi_2 > \cdots > \xi_\nu > \cdots > \xi_n > 1 \end{matrix}$$

Aus (1) ergibt sich weiter:

$$(3)\qquad \begin{cases} \frac{\xi_0}{\xi_1} = \beta_0 + \frac{\xi_2}{\xi_1} \\ \frac{\xi_1}{\xi_2} = \beta_1 + \frac{\xi_3}{\xi_2}, \quad \text{also: } \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{1}{\beta_1 + \frac{\xi_3}{\xi_2}} \\ \frac{\xi_2}{\xi_3} = \beta_2 + \frac{\xi_4}{\xi_3}, \quad \text{also: } \frac{\xi_3}{\xi_2} = \frac{1}{\beta_2 + \frac{\xi_4}{\xi_3}} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{\xi_{\nu-1}}{\xi_\nu} = \beta_{\nu-1} + \frac{\xi_{\nu+1}}{\xi_\nu}, \quad \text{also: } \frac{\xi_\nu}{\xi_{\nu-1}} = \frac{1}{\beta_{\nu-1} + \frac{\xi_{\nu+1}}{\xi_\nu}} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{\xi_{n-1}}{\xi_n} = \beta_{n-1} + \frac{1}{\xi_n}, \quad \text{also: } \frac{\xi_n}{\xi_{n-1}} = \frac{1}{\beta_{n-1} + \frac{1}{\xi_n}} = \frac{1}{\beta_{n-1} + \frac{1}{\beta_n}}. \end{cases}$$

Durch sukzessives Einsetzen der für $\frac{\xi_2}{\xi_1}, \frac{\xi_3}{\xi_2}, \cdots \frac{\xi_\nu}{\xi_{\nu-1}}, \cdots \frac{\xi_n}{\xi_{n-1}}$ gefundenen Werte in die erste der Gleichungen (3) findet man somit:

$$\frac{\xi_0}{\xi_1} = \beta_0 + \frac{1}{\beta_1 + \frac{\xi_3}{\xi_2}} = \beta_0 + \frac{1}{\beta_1 + \frac{1}{\beta_2 + \frac{\xi_4}{\xi_3}}} = \text{usf.},$$

allgemein:

$$(4)\qquad \frac{\xi_0}{\xi_1} = \beta_0 + \cfrac{1}{\beta_1 + \cfrac{1}{\beta_2 + \cdots + \cfrac{1}{\beta_{\nu-1} + \frac{\xi_{\nu+1}}{\xi_\nu}}}}$$

schließlich:

(5a)
$$\frac{\xi_0}{\xi_1} = \beta_0 + \cfrac{1}{\beta_1 + \cfrac{1}{\beta_2 + \cfrac{1}{\beta_3 + \cdot_{\cdot_{\cdot + \cfrac{1}{\beta_{n-1} + \cfrac{1}{\beta_n}}}}}}}$$

oder in etwas bequemerer Schreibweise zunächst[1]):

(5b)
$$\frac{\xi_0}{\xi_1} = \beta_0 + \frac{1}{\beta_1 +}\,\frac{1}{\beta_2 +}\,\frac{1}{\beta_3 + \cdot}\cdot\cdot + \frac{1}{\beta_{n-1} + \frac{1}{\beta_n}}.$$

Die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Zahlenverbindung wird als ein *n-gliedriger regelmäßiger Kettenbruch*[2]) oder auch als *regelmäßiger Kettenbruch n^{ter} Ordnung* bezeichnet. Da in dem vorliegenden Zusammenhange nach Ungl. (2) stets $\beta_n > 1$, also $\geqq 2$ (im übrigen nur $\beta_\nu \geqq 1$), so mag ausdrücklich noch festgesetzt werden, daß der Kettenbruch auch dann noch ein *regelmäßiger* heißen soll, wenn an Stelle von β_n die 1 steht, sowie auch dann, wenn β_0 die *Null* oder eine *negative* ganze Zahl bedeutet. Insbesondere läßt sich also der *n-gliedrige* regelmäßige Kettenbruch (5b) stets in einen $(n+1)$-*gliedrigen* umformen, indem man das Endglied:

$$\frac{1}{\beta_n} \text{ durch: } \frac{1}{(\beta_n - 1) + \frac{1}{1}}$$

ersetzt.

Da die in Gl. (5b) wesentlich positiven ganzen Zahlen $\beta_0, \beta_1, \cdots \beta_n$ durch das auf dem Euklidischen Algorithmus beruhende Gleichungssystem (1) vollkommen eindeutig bestimmt sind, so ist in vorstehendem ein Verfahren gegeben, um einen *positiven reduzierten unechten Bruch* in einen *regelmäßigen Kettenbruch* zu *„verwandeln"* oder ihn durch einen solchen *„darzustellen"*. Dieses Verfahren läßt sich auch unmittelbar auf den Fall eines *echten* Bruches ausdehnen, wenn man nur beachtet, daß aus der ersten der Gleichungen (3) folgt:

$$\frac{\xi_1}{\xi_0} = \frac{1}{\beta_0 + \frac{\xi_2}{\xi_1}}$$

1) Weitere Vereinfachungen der Schreibweise s. in Nr. 3.

2) Das additive Anfangsglied β_0, welches, wie sich sogleich zeigen wird, auch fehlen kann, wird also hierbei nicht mitgezählt.

und daß somit durch weiteres Einsetzen der aus den Gleichungen (3) resultierenden Werte für $\frac{\xi_2}{\xi_1}, \frac{\xi_3}{\xi_2}, \ldots \frac{\xi_n}{\xi_{n-1}}$ sich ergibt:

$$(6) \qquad \frac{\xi_1}{\xi_0} = \cfrac{1}{\beta_0 + \cfrac{1}{\beta_1 + \cfrac{1}{\beta_2 + \cdots + \cfrac{1}{\beta_{n-1} + \cfrac{1}{\beta_n}}}}} \qquad (\text{wo jetzt: } \xi_1 < \xi_0),$$

also ein $(n+1)$-gliedriger regelmäßiger Kettenbruch ohne additives Anfangsglied (mit der Zusatzbedingung $\beta_n \geqq 2$).

Bedeutet ferner $-\gamma$ einen *negativen* (echten oder unechten) *Bruch*, g die nächste oberhalb γ liegende ganze Zahl, so kann man setzen:

$$\begin{aligned} -\gamma &= -g + (g - \gamma) \\ &= \beta_0 + (g - \gamma), \end{aligned}$$

wo jetzt $\beta_0 < 0$ und der *positive* echte Bruch $g - \gamma$ nach dem Vorbild von Gl. (6) in einen Kettenbruch verwandelt werden kann.

Andererseits ist unmittelbar ersichtlich, daß ein Kettenbruch von der Form (5b) (gleichgültig ob $\beta_0 > 0$ oder $\beta_0 \leqq 0$) auch umgekehrt in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt werden kann. Denn eine solche Zahlenverbindung enthält (wenn man von dem rein äußerlichen Merkmal der verkürzten Bruchstriche absieht und allenfalls auf die korrektere Schreibweise (5a) zurückgreift) nicht das Geringste, was durch die gewöhnlichen Regeln für das Rechnen mit Brüchen nicht vollkommen definiert wäre. Man braucht eben nur mit β_n beginnend die einzelnen Nenner auf Grund der Formel:

$$(7) \qquad \frac{\alpha}{\beta + \frac{\alpha'}{\beta'}} = \frac{\alpha\beta'}{\beta\beta' + \alpha'}$$

der Reihe nach fortzuschaffen, bis man einen Bruch erhält, dessen Zähler und Nenner nur noch aus additiven und multiplikativen Verbindungen der β_ν besteht. Da im ganzen Verlaufe dieses Rechnungsverfahrens (allenfalls abgesehen von β_0) nur mit *positiven* (ganzen) Zahlen operiert wird, so erscheint die einzige überhaupt denkbare Schwierigkeit, nämlich das etwaige Auftreten von *Null* als Nenner, definitiv ausgeschlossen.

3. Die zuletzt gemachten Bemerkungen lassen sich offenbar ohne weiteres auf den Fall übertragen, daß man in dem Kettenbruchsymbol (5b) nicht nur die β_ν, sondern auch die dort durchweg aus der Zahl 1 bestehenden Zähler durch *ganz beliebige positive* Zahlen ersetzt. Ja, sie behalten auch dann noch Gültigkeit, wenn man für den gleichen

Zweck *beliebige komplexe* Zahlen verwendet, die nur insoweit gewissen *Einschränkungen* zu genügen haben, daß die Anwendbarkeit der Reduktionsformel (7) im Verlaufe der Rechnung niemals durch das Auftreten von *Null* als Nenner eine Störung erleidet.

Wir wollen nun aber, um die Anwendbarkeit von Zahlenverbindungen der Form:

$$(8) \qquad \left\{ b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots + \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n}}}} \right.$$

nach Möglichkeit zu erweitern, jedes solche Symbol zunächst *rein formal* als einen *n-gliedrigen Kettenbruch* bezeichnen, auch wenn die a_ν, b_ν ganz *beliebige*, den Regeln der vier Spezies genügende *„Elemente"*, insbesondere *beliebige komplexe Zahlen* (einschließlich der *Null*) vorstellen, die also eventuell *nicht* den oben erwähnten *Einschränkungen* zu genügen brauchen. Inwieweit ein solches Symbol auch im letzteren Falle geeignet erscheint, eine bestimmte *Zahl* vorzustellen, wird sich aus späterhin noch zu treffenden Festsetzungen ergeben.

In dem Ausdrucke (8) heißt b_0 das *Anfangsglied* (welches infolge der Möglichkeit $b_0 = 0$ auch schlechthin *fehlen* kann), $\frac{a_\nu}{b_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \cdots n)$ das ν^{te} *Glied* oder der ν^{te} *Teilbruch*, und zwar a_ν bzw. b_ν der ν^{te} *Teilzähler* bzw. *Teilnenner*.

Statt der etwas weitläufigen Schreibweise (8) bedienen wir uns in Zukunft der gedrängteren[1]):

$$(9) \qquad b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}|}{|b_{n-1}} + \frac{a_n|}{|b_n}$$

oder auch der Abkürzung:

$$(10) \qquad b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n .^{2)}$$

1) In der Literatur findet man nicht selten auch die folgenden weniger charakteristischen Schreibweisen:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} \dot{+} \frac{a_2}{b_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \dot{+} \frac{a_n}{b_n}$$

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \cdots \frac{a_{n-1}}{+ b_{n-1}} \frac{a_n}{+ b_n}.$$

2) Treten an die Stelle von a_ν, b_ν Ausdrücke, welche *mehrere* Indizes enthalten, sodaß es notwendig erscheint, denjenigen, welcher der Reihe nach die Werte $1, 2, \cdots n$ anzunehmen hat, ausdrücklich kenntlich zu machen, so schreibt man statt (10):

$$b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=n}.$$

Erscheint es erforderlich, eine gewisse Anzahl von Anfangsgliedern (z B. wegen eines von den übrigen Gliedern abweichenden Bildungsgesetzes) besonders herauszuheben, so schreiben wir statt (10) nach Bedarf:

$$b_0 + \left[\frac{a_1}{b_1}, \cdots \frac{a_m}{b_m}, \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^n. \tag{10a}$$

Im Falle $b_0 = 0$ wird das additive Glied b_0 zumeist einfach fortgelassen, sodaß wir dann also statt (9) bzw. (10) zu schreiben pflegen:

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n}$$

bzw.:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$$

Lautet der ν^{te} Teilzähler $(-a_\nu)$, so schreibt man auch:

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots - \frac{a_\nu|}{|b_\nu} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n}$$

statt:

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{-a_\nu|}{|b_\nu} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n},$$

also z. B.:

$$b_0 - \frac{1|}{|b_1} - \frac{1|}{|b_2} - \cdots - \frac{1|}{|b_{n-1}} - \frac{1|}{|b_n} \text{ oder auch: } b_0 + \left[-\frac{1}{b_\nu}\right]_1^n,$$

wenn *alle* Teilzähler den Wert -1 haben, und:

$$b_0 + \frac{1|}{|b_1} - \frac{1|}{|b_2} + \cdots + (-1)^n \frac{1|}{|b_{n-1}} + (-1)^{n+1}\frac{1|}{|b_n} \text{ bzw. } b_0 + \left[(-1)^{\nu-1}\frac{1}{b_\nu}\right]_1^n,$$

wenn sie, mit $+1$ anfangend, zwischen $+1$ und -1 alternieren.

4. Um die Bedingungen übersichtlich zu formulieren, welchen die a_ν, b_ν genügen müssen, damit der Kettenbruch (8) (bzw. (9), (10)) nach demselben Verfahren wie der regelmäßige Kettenbruch (5b), also lediglich mit einwandfreier Benützung der Formel (7), auf die Form eines einfachen Bruches gebracht werden kann, erscheint es zweckmäßig, ein System linearer Gleichungen aufzustellen, welches zu dem fraglichen Kettenbruche in der nämlichen Beziehung steht wie das Gleichungssystem (1) zu dem regelmäßigen Kettenbruche (5b). Wir betrachten also den Kettenbruch (8), d. h. schließlich die Zahlen b_0, b_ν, a_ν $(\nu = 1, 2, \cdots n)$, als gegeben und definieren sodann die Zahlen x_ν $(\nu = 0, 1, \cdots n)$ durch die folgenden $(n+1)$ Gleichungen:

$$(11)\qquad \begin{cases} x_0 \;\;\, = b_0 x_1 + a_1 x_2 \\ x_1 \;\;\, = b_1 x_2 + a_2 x_3 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_{\nu-1} = b_{\nu-1} x_\nu + a_\nu x_{\nu+1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_{n-2} = b_{n-2} x_{n-1} + a_{n-1} x_n \\ x_{n-1} = b_{n-1} x_n + a_n \\ x_n \;\;\, = b_n . \end{cases}$$

Die $(n+1)$ Zahlen $x_0, x_1, \cdots x_n$ sind dann in jedem Falle *völlig eindeutig bestimmt.* Kennt man nämlich für irgendein ν die Zahlen $x_{\nu+1}$ und x_ν, so ergibt sich daraus sofort auch der Wert von $x_{\nu-1}$ Da aber x_n und x_{n-1} durch die beiden letzten Gleichungen bestimmt sind, so können auch $x_{n-2}, \cdots x_1, x_0$ sukzessive berechnet werden. Dabei ergibt sich schließlich x_1 als ein lediglich aus additiven und multiplikativen Verbindungen von $b_1, \cdots b_n$ und $a_2, \cdots a_n$ zusammengesetzter oder, wie man kürzer zu sagen pflegt, *ganzer rationaler Ausdruck* bzw. als *ganze (rationale) Funktion*[1]) dieser Zahlen, zu denen dann bei der Bestimmung von x_0 noch b_0 und a_1 in analoger Verknüpfung hinzutreten.[2])

Wir heben für spätere Verwendung ausdrücklich hervor, daß dieses Ergebnis, d. h. die *eindeutige Existenz* bzw. *Bestimmbarkeit* der x_ν, insbesondere diejenige von x_1 und x_0, da sie lediglich auf Additionen und Multiplikationen der a_ν, b_ν beruht, *von deren Auswahl völlig unabhängig ist.* Zunächst aber wollen wir bezüglich der (im übrigen beliebigen) Auswahl von $b_1, \cdots b_n$ und $a_2, \cdots a_n$ die Einschränkung treffen, daß $x_n, x_{n-1}, \cdots x_1$ durchweg *von Null verschieden* ausfallen sollen, in Zeichen:

$$(12)\qquad |x_1| > 0,\; |x_2| > 0,\; \cdots |x_n| > 0$$

(wobei man also unter $x_1, x_2, \cdots x_n$ die aus den Gleichungen (11) hervorgehenden ganzen Funktionen der betreffenden a_ν, b_ν zu verstehen hat). Diese Bedingungen werden z. B. insbesondere stets ausnahmslos erfüllt sein, wenn $b_1, \cdots b_n$ und $a_2, \cdots a_n$ durchweg *positive* Zahlen sind.

Unter der Voraussetzung (12) lassen sich nun aber die Gleichungen (11) auch durch die folgenden ersetzen:

---

1) Bezüglich dieser Bezeichnung vgl. § 25, Nr. 4, S. 158.

2) Allgemein erscheint also x_ν $(\nu = 1, 2, \cdots n-1)$ als ganze Funktion von $b_\nu, \cdots b_n$ und $a_{\nu+1}, \cdots a_n$.

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{x_0}{x_1} = b_0 + a_1 \cdot \dfrac{x_2}{x_1} \\ \dfrac{x_1}{x_2} = b_1 + a_2 \cdot \dfrac{x_3}{x_2}, \quad \text{also: } \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{1}{b_1 + a_2 \dfrac{x_3}{x_2}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{x_{\nu-1}}{x_\nu} = b_{\nu-1} + a_\nu \cdot \dfrac{x_{\nu+1}}{x_\nu}, \quad \text{also: } \dfrac{x_\nu}{x_{\nu-1}} = \dfrac{1}{b_{\nu-1} + a_\nu \dfrac{x_{\nu+1}}{x_\nu}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{x_{n-1}}{x_n} = b_{n-1} + a_n \cdot \dfrac{1}{x_n}, \quad \text{also: } \dfrac{x_n}{x_{n-1}} = \dfrac{1}{b_{n-1} + a_n \dfrac{1}{x_n}} \\ \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{b_n}, \end{cases}$$

und hieraus ergeben sich durch sukzessives Einsetzen der für $\frac{x_2}{x_1}$, $\frac{x_\nu}{x_{\nu-1}}, \cdots \frac{x_n}{x_{n-1}}, \frac{1}{x_n}$ gefundenen Ausdrücke in die erste dieser Gleichungen die Beziehungen:

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{x_0}{x_1} = b_0 + \dfrac{a_1|}{|b_1} + \dfrac{a_2\, x_3|}{|\ \ x_2} \\ = \cdots\cdots\cdots \\ = b_0 + \dfrac{a_1|}{|b_1} + \dfrac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \dfrac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-1}} + \dfrac{a_\nu\, x_{\nu+1}|}{|\ \ x_\nu} \\ = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ = b_0 + \dfrac{a_1|}{|b_1} + \dfrac{a_2|}{|b_2} + \cdots\cdots + \dfrac{a_{n-2}|}{|b_{n-2}} + \dfrac{a_{n-1}\, x_n|}{|\ \ x_{n-1}} \\ = b_0 + \dfrac{a_1|}{|b_1} + \dfrac{a_2|}{|b_2} + \cdots\cdots + \dfrac{a_{n-2}|}{|b_{n-2}} + \dfrac{a_{n-1}|}{|b_{n-1}} + \dfrac{a_n|}{|b_n}. \end{cases}$$

Jeder der Kettenbrüche (14), insbesondere der letzte (mit dem vorgelegten Kettenbruche (8) bzw. (9), (10) identische) liefert dann eine Darstellung der in der einfachen Bruchform $\frac{x_0}{x_1}$ darstellbaren, durch das Gleichungssystem (11) *eindeutig definierten Zahl.* Dabei erweisen sich die für die Möglichkeit einer solchen Darstellung als *hinreichend* erkannten Bedingungen (12) bezüglich des *letzten* Kettenbruches in ihrer Gesamtheit auch als *notwendig*, da ja im Falle $x_\nu = 0$ (für irgendein ν aus der Folge $\nu = 1, 2, \cdots n$) $\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}$ und $\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu}$ *sinnlos* werden.

Andererseits kann offenbar die Rückverwandlung des letzten der Kettenbrüche (14) in den vorletzten dadurch erzielt werden, daß man den letzten Nenner b_n nach dem Vorbilde der Formel (7) fortschafft, da ja (mit Benützung der beiden letzten der Gleichungen (11)):

$$\frac{a_{n-1}|}{|b_{n-1}} + \frac{a_n|}{|b_n} = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \frac{a_n}{x_n}} = \frac{a_{n-1} x_n}{b_{n-1} x_n + a_n} = \frac{a_{n-1} x_n}{x_{n-1}}.$$

Das analoge gilt bezüglich des Überganges von irgendeinem anderen der Kettenbrüche (14) zu dem unmittelbar vorhergehenden, da ja:

$$\frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-1}} + \frac{a_\nu x_{\nu+1}|}{|\; x_\nu} = \frac{a_{\nu-1}}{b_{\nu-1} + \frac{a_\nu x_{\nu+1}}{x_\nu}} = \frac{a_{\nu-1} x_\nu}{b_{\nu-1} x_\nu + a_\nu x_{\nu+1}} = \frac{a_{\nu-1} x_\nu}{x_{\nu-1}}.$$

Hiernach läuft es also schließlich auf dasselbe hinaus, ob man den letzten der Kettenbrüche (14), also den Kettenbruch $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$, durch sukzessives Fortschaffen des jedesmaligen letzten Nenners schließlich auf die Form eines Quotienten $\frac{x_0}{x_1}$ zweier bestimmter ganzer Funktionen der a_ν, b_ν bringt oder ob man x_1 und x_0 aus den Gleichungen (11) berechnet. Und es erweist sich somit unter der Voraussetzung (12) der fragliche Kettenbruch, falls man ihn nur in seiner ursprünglichen Gestalt, also folgendermaßen:

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots + \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n}}}}$$

anschreibt, als eine Zahlenverbindung, deren Sinn lediglich auf Grund der *elementaren* Regeln für das Rechnen mit Brüchen *schon vollkommen feststeht* und die auf Grund dieser Regeln eine eindeutig bestimmbare *Zahl* vorstellt. Wir wollen daher einen solchen Kettenbruch als einen *elementaren* bezeichnen. Der Bruch $\frac{x_0}{x_1}$ heißt die *reduzierte Form* des Kettenbruches oder auch, da er ja eine bestimmte Zahl in gewöhnlicher Bruchform vorstellt, der *Wert* des Kettenbruches.

Gleichzeitig mit dem Kettenbruche[1]) $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$ ist auch jeder der Kettenbrüche $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_m^n$ für $1 < m \leqq n$ ein *elementarer*, wie ohne weiteres aus den für den elementaren Charakter von $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$ maßgebenden Bedingungen (12) hervorgeht. Mit anderen Worten, ein *elementarer* Kettenbruch

1) Das additive Anfangsglied b_0 hat offenbar auf den Charakter des Kettenbruches keinen Einfluß, weshalb wir es hier und auch sonst häufig $= 0$ setzen, also einfach weglassen.

bleibt elementar, wenn man eine beliebige Anzahl von *Anfangs*gliedern fortläßt.[1]) Irrig wäre es dagegen, anzunehmen, daß das analoge stets auch bei Weglassung einer beliebigen Anzahl von *End*gliedern stattfinden, also jeder der Kettenbrüche $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m$ für $m < n$ gleichfalls ein *elementarer* sein müßte, wie das folgende einfache Beispiel verdeutlichen möge. Man hat:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^3 = \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} = \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2 b_3\ \ |}{|b_2 b_3 + a_3} = \frac{a_1 b_2 b_3 + a_1 a_3}{b_1 b_2 b_3 + a_3 b_1 + a_2 b_3}$$

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^2 = \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} = \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2}.$$

Ist nun: $a_2 = -b_1 b_2$, so wird:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^3 = \frac{a_1|}{|b_1} - \frac{b_1 b_2 b_3\ \ |}{|b_2 b_3 + a_3} = \frac{a_1 b_2 b_3 + a_1 a_3}{a_3 b_1},$$

während der Versuch, den Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^2$ zu reduzieren, auf die sinnlose Form $\frac{a_1 b_2}{0}$ führt. Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^3$ ist somit in diesem Falle ein *elementarer* (sofern nur: $|b_2 b_3 + a_3| > 0$, $|a_3 b_1| > 0$), *nicht* aber der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^2$.

Besitzt aber ein elementarer Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$ die besondere Eigenschaft, daß auch jeder Kettenbruch von der Form $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m$, wo $m < n$, ein *elementarer* ist, so gilt nach dem zuvor Gesagten das letztere wieder noch für jeden Kettenbruch von der Form $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_k^m$, wo $1 < k < m$, d. h. schließlich für *jeden* aus konsekutiven Gliedern bestehenden *Teilkettenbruch* (insbesondere auch für die einzelnen *Teilbrüche* $\frac{a_\nu}{b_\nu}$, d. h. man hat in diesem Falle ausnahmslos $|b_\nu| > 0$ für $\nu \geqq 1$). Einen solchen

---

1) Insbesondere ist dann stets $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_n^n$, d. h. $\frac{a_n}{b_n}$ „elementar“, also b_n *von Null verschieden*, wie ja schon die letzte der Bedingungen (12) aussagt. Dagegen kann für $\nu < n$ auch bei einem *elementaren* n-gliedrigen Kettenbruche beliebig oft $b_\nu = 0$ sein, z. B.:

$$\frac{a_1|}{|0} + \frac{a_2|}{|b_2} = \frac{a_1 b_2}{a_2}$$

$$\frac{a_1|}{|0} + \frac{a_2|}{|0} + \frac{a_3|}{|b_3} = \frac{a_1|}{|0} + \frac{a_2 b_3|}{|a_3} = \frac{a_1 a_3}{a_2 b_3}.$$

Kettenbruch wollen wir als *durchweg elementar* bezeichnen. Offenbar gehört jeder aus lauter *positiven* Zahlen bestehende Kettenbruch dieser besonderen Kategorie an.

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß durch die am Ende der vorigen Nummer getroffene Festsetzung, statt $\frac{-a_\nu|}{|b_\nu}$ auch zu schreiben: $-\frac{a_\nu|}{|b_\nu}$, zunächst bei *elementaren* Kettenbrüchen offenbar kein Widerspruch entsteht, da ja:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-1}}+\frac{(-a_\nu)\,x_{\nu+1}|}{|\quad x_\nu}\\ \frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-1}}-\frac{a_\nu\, x_{\nu+1}|}{|\quad x_\nu}\end{array}\right\}=\frac{a_{\nu-1}\,x_\nu}{b_{\nu-1}\,x_\nu-a_\nu\, x_{\nu+1}}.$$

§ 89. Die Näherungsbrüche durchweg elementarer Kettenbrüche.

1. Das im vorigen Paragraphen angegebene Verfahren zur Herstellung der *reduzierten Form* eines n-gliedrigen *elementaren* Kettenbruches $b_0+\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$ ist einer wichtigen Ergänzung fähig, welche gestattet, die reduzierte Form eines durch Hinzutreten eines weiteren Teilbruches $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ entstehenden $(n+1)$-gliedrigen elementaren Kettenbruches $b_0+\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{n+1}$ zu bestimmen, ohne daß es nötig wäre, wiederum den gesamten, nunmehr mit der Fortschaffung des Nenners b_{n+1} beginnenden Reduktionsprozeß vollständig durchzumachen.

Wie in Nr. 4 des vorigen Paragraphen bemerkt wurde, sind die dort mit x_0 und x_1 bezeichneten Zahlen, also Zähler und Nenner der reduzierten Form des gegebenen n-gliedrigen Kettenbruches, bestimmt durch gewisse ganze rationale Ausdrücke in den a_ν, b_ν, und zwar ist der Nenner x_1 unabhängig von b_0 und a_1. Wir wollen, um dies durch die Schreibweise kenntlich zu machen, den fraglichen Zähler jetzt mit:

$$A_n(b_0,\, b_1,\, \cdots b_n;\; a_1,\, a_2,\, \cdots a_n)^{1)},$$

den Nenner mit:

$$B_n(b_1,\, b_2,\, \cdots b_n;\; a_2,\, a_3,\, \cdots a_n)$$

bezeichnen.

---

1) Bei dieser Schreibweise bedeutet also A_n bzw. B_n nicht etwa einen *Faktor*, sondern dient als *„Funktionszeichen"*, bezeichnet also einen bestimmten, aus den in der Klammer stehenden Zahlen (übrigens ganz und rational) zusammengesetzten *Ausdruck*.

Um hieraus einen Schluß auf die Zusammensetzung des analog mit:

$$A_{n+1}(b_0, b_1, \cdots b_{n+1}; a_1, a_2, \cdots a_{n+1})$$
$$\text{bzw. } B_{n+1}(b_1, b_2, \cdots b_{n+1}; a_2, a_3, \cdots a_{n+1})$$

zu bezeichnenden Zählers und Nenners der reduzierten Form für den $(n+1)$-gliedrigen Kettenbruch $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{n+1}$ ziehen zu konnen, braucht man nur den letzteren durch Fortschaffung des letzten Nenners in einen n-gliedrigen umzuformen, also:

$$(1) \qquad b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{n+1} = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{n-1}|}{|b_{n-1}} + \frac{b_{n+1}a_n|}{|b_{n+1}b_n + a_{n+1}},$$

der also aus dem *gegebenen* n-gliedrigen Kettenbruche hervorgehen würde, wenn man daselbst

$$a_n \text{ durch: } b_{n+1}a_n$$
$$b_n \text{ durch: } b_{n+1}b_n + a_{n+1}$$

ersetzt. Das Entsprechende muß also auch für die betreffenden *reduzierten Formen* gelten, und man findet somit:

$$(2) \qquad \begin{cases} A_{n+1}(b_0, \cdots b_{n+1}; a_1, \cdots a_{n+1}) \\ = A_n(b_0, \cdots b_{n-1}, b_{n+1}b_n + a_{n+1}; a_1, \cdots a_{n-1}, b_{n+1}a_n) \\ B_{n+1}(b_1, \cdots b_{n+1}; a_2, \cdots a_{n+1}) \\ = B_n(b_1, \cdots b_{n-1}, b_{n+1}b_n + a_{n+1}; a_2, \cdots a_{n-1}, b_{n+1}a_n). \end{cases}$$

Man ist also imstande, die Ausdrücke A_{n+1}, B_{n+1} sofort anzuschreiben, sobald die Zusammensetzung der Ausdrücke A_n, B_n vollständig bekannt ist. Um diese Kenntnis zu erlangen, wollen wir jetzt noch die Voraussetzung machen, daß der vorgelegte n-gliedrige Kettenbruch nicht nur überhaupt, sondern *durchweg elementar* sein möge, und sodann allgemein mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ die reduzierte Form des Kettenbruches $b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \cdots n)$ bezeichnen, sodaß also $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ eine bestimmte Zahl vorstellt und insbesondere $|B_\nu| > 0$ ist. Der Gleichförmigkeit halber werde auch noch gesetzt:

$$(1_0) \qquad b_0 = \frac{b_0}{1} = \frac{A_0}{B_0}, \text{ d. h. } A_0 = b_0 \quad B_0 = 1,$$

mit dem ausdrücklichen Zusatze, daß diese Festsetzung auch im Falle $b_0 = 0$ gültig bleiben soll, daß also in diesem Falle nicht nur zu setzen ist:

$$A_0 = 0 \text{ (was ja selbstverständlich)},$$

sondern auch:

$$B_0 = 1$$

Des weiteren ergibt sich:

(J₁) $$b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_1 b_0 + a_1}{b_1}, \text{ also: } A_1 = b_1 b_0 + a_1, \quad B_1 = b_1$$

Um hieraus die Werte von A_2, B_2 abzuleiten, hat man nach dem in den Formeln (2) enthaltenen Verfahren lediglich a_1 durch $b_2 a_1$ und b_1 durch $b_2 b_1 + a_2$ zu ersetzen und findet somit:

$$\begin{aligned} A_2 &= (b_2 b_1 + a_2) b_0 + b_2 a_1 & B_2 &= b_2 b_1 + a_2 \\ &= b_2 (b_1 b_0 + a_1) + a_2 b_0 & &= b_2 b_1 + a_2 \cdot 1, \end{aligned}$$

also, mit Berücksichtigung von (I_0) und (I_1):

(I_2) $$A_2 = b_2 A_1 + a_2 A_0, \quad B_2 = b_2 B_1 + a_2 B_0.$$

Durch vollständige Induktion läßt sich aber unmittelbar zeigen, daß analoge Beziehungen für jedes A_ν, B_ν $(2 \leqq \nu \leqq n)$ bestehen. Denn angenommen, man habe für irgendein $\nu \geqq 2$:

(I) $$A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2} \quad B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2},$$

so ergibt sich daraus, da ja $A_{\nu-1}$, $A_{\nu-2}$, $B_{\nu-1}$, $B_{\nu-2}$ von a_ν, b_ν unabhängig sind, mit Benützung der Formeln (2):

$$\begin{aligned} A_{\nu+1} &= (b_{\nu+1} b_\nu + a_{\nu+1}) A_{\nu-1} + b_{\nu+1} a_\nu A_{\nu-2} \\ &= b_{\nu+1}(b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2}) + a_{\nu+1} A_{\nu-1} \\ B_{\nu+1} &= (b_{\nu+1} b_\nu + a_{\nu+1}) B_{\nu-1} + b_{\nu+1} a_\nu B_{\nu-2} \\ &= b_{\nu+1}(b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2}) + a_{\nu+1} B_{\nu-1}, \end{aligned}$$

d. h. mit Berücksichtigung von (I):

$$A_{\nu+1} = b_{\nu+1} A_\nu + a_{\nu+1} A_{\nu-1} \quad B_{\nu+1} = b_{\nu+1} B_\nu + a_{\nu+1} B_{\nu-1}.$$

Gelten also die Formeln (I) für einen gewissen Index ν, so bleiben sie auch gültig, wenn ν durch $\nu + 1$ ersetzt wird. Sie gelten somit für *jedes* $\nu > 2$, da ihre Richtigkeit nach Gl. (I_2) für $\nu = 2$ bereits feststeht, und können daher dazu dienen, auf Grund der für A_0, A_1, B_0, B_1 gegebenen Anfangswerte (I_0), (I_1) die A_ν, B_ν für $\nu = 2, 3, \cdots n$ sukzessive zu berechnen

Die Brüche $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ $(\nu = 0, 1, \cdots n)$ heißen die *Näherungsbrüche* ν^{ter} Ordnung des n-gliedrigen (zunächst als *durchweg elementar* vorausgesetzten) Kettenbruches $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$, und zwar ist $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ für $\nu \geqq 1$ *identisch* mit der *reduzierten Form* des ν-gliedrigen Kettenbruches $b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu}$ (bzw. mit b_0 im Falle $\nu = 0$). Insbesondere ist $\frac{A_n}{B_n}$ auf Grund der vorstehenden Betrachtung identisch mit der *reduzierten Form* des vorgelegten n-gliedrigen Kettenbruches, also gleich dem *Werte* des letzteren; anders

ausgesprochen: man gelangt zu demselben Endergebnis, wenn man den Bruch $\frac{A_n}{B_n}$ durch *Rekursion* (vermittelst der Rekursionsformel (I) und der Anfangsbedingungen (I_0), (I_1)) bestimmt, wie wenn man die reduzierte Form des Kettenbruches durch *direkte Reduktion* (d. h. durch sukzessive Fortschaffung der Nenner, mit dem letzten beginnend, vermittelst der Formel $\frac{a}{b+\frac{a'}{b'}} = \frac{ab'}{bb'+a'}$) herstellt.[1])

Im übrigen läßt sich das oben bezüglich der Berechnung der Näherungsbrüche gewonnene Ergebnis zu dem folgenden Satze zusammenfassen:

Die Zähler A_ν und die Nenner B_ν $(\nu \geqq 2)$ der Näherungsbrüche eines durchweg elementaren Kettenbruches $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$, d. h. der reduzierten Formen der Kettenbrüche $b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu}$ $(\nu = 2, 3, \cdots n)$ genügen den Rekursionsformeln

$$\text{(I)} \qquad A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2} \quad B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2},$$

also der gemeinsamen Rekursionsformel:

$$\text{(I')} \qquad C_\nu = b_\nu C_{\nu-1} + a_\nu C_{\nu-2},$$

mit verschiedenen Anfangsbedingungen, nämlich

$$(\mathrm{I}_0) \quad C_0 = A_0 = b_0 \qquad \text{bzw. } C_0 = B_0 = 1 \ (\textit{auch im Falle } b_0 = 0)$$

$$(\mathrm{I}_1) \quad C_1 = A_1 = b_1 b_0 + a_1 \quad C_1 = B_1 = b_1.$$

Hierzu sei (analog wie im vorigen Paragraphen zu Gl (11), S. 675) ausdrücklich bemerkt, daß bei *ganz beliebiger* Vorgabe der Zahlen $b_0, \cdots b_n$ und $a_1, \cdots a_n$, also ganz unabhängig davon, ob der aus ihnen gebildete Kettenbruch $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$ ein durchweg elementarer ist oder nicht,

---

1) Bei dem letztgenannten Verfahren wird also von *rechts* nach *links* (bzw., bei der ursprünglichen Schreibweise der Kettenbrüche, von *unten* nach *oben*) operiert, und jeder Schritt liefert eine *Umformung* des *gegebenen* Kettenbruches in einen anderen mit jedesmal um 1 verminderter Gliederzahl, bis schließlich die *reduzierte Form* zum Vorschein kommt.

Bei dem neuerdings entwickelten Verfahren schreiten die an dem gegebenen Kettenbruche vorzunehmenden Operationen von *links* nach *rechts* (bzw. von *oben* nach *unten*) fort, und die Einzelergebnisse sind die *reduzierten Formen* von *Teilkettenbrüchen*, deren Gliederzahl jedesmal um 1 zunimmt und die auf diese Weise dem gegebenen Kettenbruche zum mindesten formal *immer näher kommen:* daher die Bezeichnung *Näherungsbrüche*, die im übrigen, wie sich später noch zeigen wird, bei besonderer Auswahl der a_ν, b_ν (z. B., wenn alle a_ν, b_ν *positiv* sind) eine

die Zahlen A_ν, B_ν $(\nu = 0, 1, \cdots n)$ aus den vorstehenden Bedingungen stets *eindeutig bestimmbar* sind (wobei dann allerdings für irgendwelche Werte von ν der Wert $B_\nu = 0$ zum Vorschein kommen, also das *Bruchsymbol* $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ *sinnlos* werden könnte).

2 Als Beispiel für die praktische Verwertung der Rekursionsformel (I) zur Berechnung der reduzierten Form eines *numerisch* gegebenen Kettenbruches diene der Kettenbruch:

$$1 - \frac{1|}{|2} + \frac{3|}{|4} - \frac{5|}{|6} + \frac{3|}{|4} - \frac{1|}{|2}.$$

Die betreffende Rechnung läßt sich am zweckmäßigsten in Form des folgenden Schemas zusammenstellen:

$\nu = 0$	1	2	3	4	5
$a_\nu =$	-1	3	-5	3	-1
$b_\nu = 1$	2	4	6	4	2
$A_\nu = 1$	$\underbrace{2\cdot 1 - 1}_{1}$	$\underbrace{4\cdot 1 + 3\cdot 1}_{7}$	$\underbrace{6\cdot 7 - 5\cdot 1}_{37}$	$\underbrace{4\cdot 37 + 3\cdot 7}_{169}$	$\underbrace{2\cdot 169 - 1\cdot 37}_{301}$
$B_\nu = 1$	2	$\underbrace{4\cdot 2 + 3\cdot 1}_{11}$	$\underbrace{6\cdot 11 - 5\cdot 2}_{56}$	$\underbrace{4\cdot 56 + 3\cdot 11}_{257}$	$\underbrace{2\cdot 257 - 1\cdot 56}_{458}$.

Die einzelnen Näherungsbrüche lauten somit:

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{7}{11},\ \frac{37}{56},\ \frac{169}{257},\ \frac{301}{458},$$

und der letzte dieser Brüche liefert den *Wert* des vorgelegten Kettenbruches. Will man denselben nach dem im vorigen Paragraphen besprochenen Verfahren der direkten Reduktion ermitteln, so gestaltet sich die Rechnung folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1|}{|2} + \frac{3|}{|4} - \frac{5|}{|6} + \frac{3|}{|4} - \frac{1|}{|2} &= 1 - \frac{1|}{|2} + \frac{3|}{|4} - \frac{5|}{|6} + \frac{2\cdot 3\quad |}{|2\cdot 4 - 1} \\
&= 1 - \frac{1|}{|2} + \frac{3|}{|4} - \frac{7\cdot 5\quad |}{|7\cdot 6 + 6} \\
&= 1 - \frac{1|}{|2} + \frac{48\cdot 3\quad |}{|48\cdot 4 - 35} \\
&= 1 - \frac{157\cdot 1\quad |}{|157\cdot 2 + 144} \\
&= \frac{458 - 157}{458} = \frac{301}{458}.
\end{aligned}$$

Oder auch, wenn man nach dem Vorbilde des Gleichungssystems (11), S 675, zur Berechnung der reduzierten Form $\frac{x_0}{x_1}$ des gegebenen Kettenbruches die Gleichungen zugrunde legt:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1\cdot x_1 - 1\cdot x_2 \\ x_1 &= 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 \\ x_2 &= 4\cdot x_3 - 5\cdot x_4 \\ x_3 &= 6\cdot x_4 + 3\cdot x_5 \\ x_4 &= 4\cdot x_5 - 1 \\ x_5 &= 2, \end{aligned}$$

so läßt sich die obige Kettenbruchreduktion einfacher in Form des folgenden Schemas darstellen:

$$\begin{array}{cccccc} \nu = & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ x_\nu = & \underbrace{4\cdot 2 - 1}_{7} & \underbrace{6\cdot 7 + 3\cdot 2}_{48} & \underbrace{4\cdot 48 - 5\cdot 7}_{157} & \underbrace{2\cdot 157 + 3\cdot 48}_{458} & \underbrace{1\cdot 458 - 1\cdot 157}_{301}. \end{array}$$

§ 90. Allgemeinste endliche Kettenbrüche aus beliebigen Zahlen. — Ausdehnung des Näherungsbruch-Verfahrens auf solche Kettenbrüche.

1. Wie in § 88, Nr. 4, S. 675, bereits hervorgehoben wurde, sind durch ein Gleichungssystem von der Form (s. Gl. (11) a. a. O.):

$$(1)\qquad \begin{cases} x_0 = b_0 x_1 + a_1 x_2 \\ x_1 = b_1 x_2 + a_2 x_3 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_{\nu-1} = b_{\nu-1} x_\nu + a_\nu x_{\nu+1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_{n-1} = b_{n-1} x_n + a_n \\ x_n = b_n \end{cases}$$

x_0 und x_1 bei *ganz beliebiger* Wahl der Zahlen $b_0, \cdots b_n$ und $a_1, \cdots a_n$ *als eindeutig bestimmte Zahlen* definiert. Und da im Falle $|x_\nu| > 0$ (für $\nu = 1, 2 \cdots n$) $\frac{x_0}{x_1}$ die *reduzierte Form* des (in diesem Falle „elementaren“) Kettenbruches $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$ darstellt, so wollen wir jetzt in *jedem* Falle dem obigen Kettenbruche das *Bruchsymbol* $\frac{x_0}{x_1}$, gleichgültig ob dasselbe eine bestimmte Zahl vorstellt oder nicht, als *reduzierte Form* zuordnen und diese Festsetzung durch die Formel ausdrücken:

$$(2)\qquad b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n = = \frac{x_0}{x_1},$$

wobei das doppelte Gleichheitszeichen darauf hinweisen soll, daß *Zähler* und *Nenner* des Bruchsymbols einzeln genommen *eindeutig bestimmte Zahlen* sind, auch wenn sie in der Verbindung $\frac{x_0}{x_1}$ *keine* solche liefern, was offenbar dann und nur dann eintritt, wenn $x_1 = 0$

ist. Hat man aber $|x_1| > 0$, so wollen wir die unter der Form $\frac{x_0}{x_1}$ erscheinende eindeutig bestimmte *Zahl* auch wiederum als den *Wert* des betreffenden *Kettenbruches* bezeichnen, bzw. den *Kettenbruch* als eine auf Grund der getroffenen Festsetzungen zulässige *Darstellungsform* der *Zahl* $\frac{x_0}{x_1}$ betrachten (wie dies ja schon ohnehin der Fall wäre, wenn der betreffende Kettenbruch sich als ein *elementarer* erweist). Im Falle: $|x_1| > 0$ kann also die Beziehung (2) auch ohne weiteres durch die *Gleichung:*

$$b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n = \frac{x_0}{x_1} \tag{3}$$

ersetzt werden. Ist dagegen $x_1 = 0$, so hat es bei der Schreibweise (2) sein Bewenden, und wir sagen in diesem Falle, der Kettenbruch sei *sinnlos*.

2. Die Herstellung der *reduzierten Form* für den Kettenbruch $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$ war bei der vorstehenden Betrachtung in der Weise gedacht, daß man von x_n ausgehend der Reihe nach $x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots x_1, x_0$ aus den Gleichungen (1) berechnet. Da hierbei $x_n = b_n$ und die für $x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots x_1$ bzw. x_0 sich ergebenden Zahlenverbindungen durchaus identisch sind mit denjenigen[1]), welche sich für die jeweils auftretenden Schlußnenner bzw. den schließlich letzten Zähler ergeben würden, wenn man den fraglichen Kettenbruch, genau wie einen als *elementar* vorausgesetzten, durch sukzessives Fortschaffen der Nenner „*reduziert*" (also unbekümmert darum, ob unter den hierbei auftretenden Nennern x_ν solche Zahlenverbindungen vorkommen, die gleich *Null* sind)[2]), so mag diese Art der Herstellung der *reduzierten Form* wieder

1) Vgl. hierzu in § 88 die Gleichungen (14), S. 676, sowie das numerische Beispiel am Schlusse des vorigen Paragraphen und die folgende Fußnote.

2) Man hat diese Art des Operierens mit sonst *sinnlosen* Brüchen lediglich als eine besondere, in dem vorliegenden Zusammenhange bequeme *Schreibweise* für die sukzessive Reduktion des Gleichungssystems (1) bis zur schließlichen Bestimmung von x_1 und x_0 zu betrachten und die Rechtfertigung dieser Methode darin zu erblicken, daß nicht nur das *Endergebnis*, sondern auch jedes *Zwischenresultat* auf Grund der gegebenen Definition für die reduzierte Form eines beliebigen Kettenbruches ein *vollkommen richtiges* ist. Jeder der Kettenbrüche, welcher bei der sukzessiven Reduktion von

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n}$$

auftritt, hat die Form (vgl. S. 676, Gl. (14)):

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-1}} + \frac{a_\nu x_{\nu+1}|}{|x_\nu}.$$

als eine *„durch direkte Reduktion"* erfolgte bezeichnet werden. Es ist nun für unsere weiteren Entwicklungen wichtig nachzuweisen, daß dieses Verfahren, geradeso wie bei einem *durchweg elementaren Kettenbruche*, auch durch ein *rekursorisches* ersetzt werden kann

Hierzu betrachten wir an Stelle des Gleichungssystems (1) ein solches, bei welchem der dort als fest gedachte Index n durch einen veränderlichen Index ν ersetzt ist und die (aus den wiederum als *gegeben* anzusehenden Zahlen $b_0, \cdots b_\nu; a_1, \cdots a_\nu$) zu *bestimmenden* Zahlen, als wesentlich von ν abhängig, mit $x_0^{(\nu)}, x_1^{(\nu)} \cdots x_\nu^{(\nu)}$ bezeichnet werden mögen, also:

$$(4)\qquad \begin{cases} x_0^{(\nu)} = b_0 x_1^{(\nu)} + a_1 x_2^{(\nu)} \\ x_1^{(\nu)} = b_1 x_2^{(\nu)} + a_2 x_3^{(\nu)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_{\lambda-1}^{(\nu)} = b_{\lambda-1} x_\lambda^{(\nu)} + a_\lambda x_{\lambda+1}^{(\nu)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_{\nu-1}^{(\nu)} = b_{\nu-1} x_\nu^{(\nu)} + a_\nu \\ x_{(\nu)}^{\nu} = b_\nu. \end{cases}$$

Für $\nu = 0$ reduziert sich also dieses System auf die einzige Gleichung:

$$(4_0)\qquad x_0^{(0)} = b_0.$$

Sodann hat man für $\nu = 1$:

$$(4_1)\qquad \begin{cases} x_0^{(1)} = b_0 x_1^{(1)} + a_1 \\ x_1^{(1)} = b_1. \end{cases}$$

Wird die reduzierte Form dieses letzteren Kettenbruches mit $\frac{x_0'}{x_1'}$ bezeichnet, so hätte man auf Grund der gegebenen Definition x_0', x_1' aus den Gleichungen zu bestimmen:

$$\begin{aligned} x_0' &= b_0 x_1' + a_1 x_2' \\ x_1' &= b_1 x_2' + a_2 x_3' \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_{\nu-1}' &= b_{\nu-1} x_\nu + a_\nu x_{\nu+1} \\ x_\nu' &= x_\nu, \end{aligned}$$

wobei dann $x_\nu, x_{\nu+1}$ durch die noch fehlenden Gleichungen des Systems (1) bestimmt sind:

$$\begin{aligned} x_\nu &= b_\nu x_{\nu+1} + a_{\nu+1} x_{\nu+2} \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_{n-1} &= b_{n-1} x_n + a_n \\ x_n &= b_n \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungssysteme zusammen besagen aber genau dasselbe wie das System (1), und man findet daher:

$$x_{\nu-1}' = x_{\nu-1}, \cdots x_1' = x_1, \; x_0' = x_0.$$

Führen wir noch (wie sich sogleich als zweckmäßig erweisen wird) die Bezeichnung ein:

$$x_1^{(0)} = 1,$$

so lassen sich die Beziehungen (4_0) und (4_1) in Verbindung mit der soeben eingeführten in die folgende Form setzen:

$$(5_0) \qquad x_0^{(0)} = b_0 \qquad x_1^{(0)} = 1$$

$$(5_1) \qquad x_0^{(1)} = b_0 b_1 + a_1 \quad x_1^{(1)} = b_1.$$

Des weiteren lautet das System (4) für $\nu = 2$:

$$(4_2) \qquad \begin{cases} x_0^{(2)} = b_0 x_1^{(2)} + a_1 x_2^{(2)} \\ x_1^{(2)} = b_1 x_2^{(2)} + a_2 \\ x_2^{(2)} = b_2, \end{cases}$$

also, wenn man den Wert von $x_2^{(2)}$ in die beiden ersten Gleichungen, den sodann aus der zweiten Gleichung resultierenden Wert von $x_1^{(2)}$ in die erste Gleichung einsetzt:

$$\begin{aligned} x_0^{(2)} &= b_0 (b_1 b_2 + a_2) + a_1 b_2 & x_1^{(2)} &= b_1 b_2 + a_2 \\ &= b_2 (b_0 b_1 + a_1) + a_2 b_0 & &= b_2 b_1 + a_2 \cdot 1 \end{aligned}$$

oder mit Berücksichtigung von (5_0) und (5_1):

$$(5_2) \qquad x_0^{(2)} = b_2 x_0^{(1)} + a_2 x_0^{(0)} \qquad x_1^{(2)} = b_2 x_1^{(1)} + a_2 x_1^{(0)}.$$

Durch vollständige Induktion läßt sich nun aber unmittelbar zeigen, daß analoge Formeln für $x_0^{(\nu)}, x_1^{(\nu)}$ bei beliebigen $\nu \geqq 2$ bestehen, nämlich:

$$(5) \qquad x_0^{(\nu)} = b_\nu x_0^{(\nu-1)} + a_\nu x_0^{(\nu-2)} \qquad x_1^{(\nu)} = b_\nu x_1^{(\nu-1)} + a_\nu x_1^{(\nu-2)}.$$

Es werde also angenommen, daß die Richtigkeit dieser Beziehungen für irgendein bestimmtes $\nu \geqq 2$ erwiesen sei. Andererseits haben ja $x_0^{(\nu)}, x_1^{(\nu)}$ dem Gleichungssystem (4) zu genügen. Das entsprechende Gleichungssystem zur Bestimmung von $x_0^{(\nu+1)}, x_1^{(\nu+1)}$ unterscheidet sich von (4) dadurch, daß an die Stelle der letzten *zwei* Bedingungen, nämlich:

$$\begin{aligned} x_{\nu-1}^{(\nu)} &= b_{\nu-1} x_\nu^{(\nu)} + a_\nu \\ x_\nu^{(\nu)} &= b_\nu, \end{aligned}$$

nunmehr die *drei* folgenden treten:

$$\begin{aligned} x_{\nu-1}^{(\nu+1)} &= b_{\nu-1} x_\nu^{(\nu+1)} + a_\nu x_{\nu+1}^{(\nu+1)} \\ x_\nu^{(\nu+1)} &= b_\nu x_{\nu+1}^{(\nu+1)} + a_{\nu+1} \\ x_{\nu+1}^{(\nu+1)} &= b_{\nu+1}, \end{aligned}$$

die sich aber durch Einführung des Wertes von $x_{\nu+1}^{(\nu+1)}$ aus der dritten Gleichung in die beiden ersten auf die folgenden *zwei* reduzieren lassen:

$$x_{\nu-1}^{(\nu+1)} = b_{\nu-1}x_\nu^{(\nu+1)} + a_\nu b_{\nu+1}$$
$$x_\nu^{(\nu+1)} = b_\nu b_{\nu+1} + a_{\nu+1}.$$

Jetzt besteht das System zur Bestimmung von $x_0^{(\nu+1)}$, $x_1^{(\nu+1)}$ aus genau ebensoviel (nämlich $\nu + 1$) Gleichungen, wie das zur Bestimmung von $x_0^{(\nu)}, x_1^{(\nu)}$ dienende System (4), auch haben die ersten $\nu - 1$ Bestimmungsgleichungen in beiden Systemen genau dieselbe Form, und nur die beiden letzten unterscheiden sich dadurch, daß jetzt

$$a_\nu \text{ durch } a_\nu b_{\nu+1}$$
$$b_\nu \text{ durch } b_\nu b_{\nu+1} + a_{\nu+1}$$

ersetzt ist. Durch Vornahme dieser Vertauschung in den Formeln (5) müssen also $x_0^{(\nu)}$, $x_1^{(\nu)}$ in $x_0^{(\nu+1)}$, $x_1^{(\nu+1)}$ übergehen. Beachtet man, daß $x_\varkappa^{(\nu-1)}$, $x_\varkappa^{(\nu-2)}$ ($\varkappa = 0, 1$) von a_ν, b_ν völlig unabhängig sind (da ja in den betreffenden Bestimmungsgleichungen alle Indizes sich nur bis $\nu - 1$ bzw. $\nu - 2$ erstrecken), so folgt aus (5) zunächst:

$$\begin{aligned} x_0^{(\nu+1)} &= (b_\nu b_{\nu+1} + a_{\nu+1})\, x_0^{(\nu-1)} + a_\nu b_{\nu+1} x_0^{(\nu-2)} \\ &= b_{\nu+1}\,(b_\nu x_0^{(\nu-1)} + a_\nu x_0^{(\nu-2)}) + a_{\nu+1} x_0^{(\nu-1)} \end{aligned}$$

also, mit nochmaliger Benützung von (5):

$$x_0^{(\nu+1)} = b_{\nu+1} x_0^{(\nu)} + a_{\nu+1} x_0^{(\nu-1)}$$

und ganz in derselben Weise:

$$x_1^{(\nu+1)} = b_{\nu+1} x_1^{(\nu)} + a_{\nu+1} x_1^{(\nu-1)},$$

d. h. die Formeln (5) bleiben bestehen, wenn ν durch $\nu + 1$ ersetzt wird. Sie gelten also für jedes $\nu \geqq 2$, da ihre Richtigkeit für $\nu = 2$ bereits feststeht.

Anders ausgesprochen genügen also $x_0^{(\nu)}$ und $x_1^{(\nu)}$, d. h. Zähler und Nenner der reduzierten Form des (aus *beliebig* gegebenen Zahlen gebildeten) Kettenbruches $b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu}$ der *gemeinsamen* Rekursionsformel:

$$(5^1) \qquad x^{(\nu)} = b_\nu x^{(\nu-1)} + a_\nu x^{(\nu-2)}$$

und unterscheiden sich nur in den Anfangswerten für $\nu = 0$ und $\nu =$ nämlich (nach Gl. (5_0) und (5_1)):

$$x_0^{(0)} = b_0 \qquad x_1^{(0)} = 1$$
$$x_0^{(1)} = b_1 b_0 + a_1 \qquad x_1^{(1)} = b_1.$$

3. Die Vergleichung dieser Beziehungen mit denjenigen für die Zähler A_ν und die Nenner B_ν der Näherungsbrüche eines *durchweg elementaren Kettenbruches,* namlich (S. 682, Gl. (I), (I_0), (I_1)):

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} A_0 = b_0 & B_0 = 1 \\ A_1 = b_1 b_0 + a_1 & B_1 = b_1 \\ A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2} & B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2}\ (\nu \geqq 2), \end{cases}$$

zeigt unmittelbar, daß:

$$(6_0)\qquad x_0^{(0)} = A_0 \qquad x_1^{(0)} = B_0$$

$$(6_1)\qquad x_0^{(1)} = A_1 \qquad x_1^{(1)} = B_1$$

und daher für jedes $\nu \geqq 2$ auch:

$$(6)\qquad x_0^{(\nu)} = A_\nu \qquad x_1^{(\nu)} = B_\nu,$$

wenn man in (I) unter $b_0, \cdots b_\nu$ und $a_1, \cdots a_\nu$ *dieselben* als *beliebig* gegeben anzusehenden Zahlen versteht, wie in dem Kettenbruche $b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu}$. Bezeichnet man also auch in diesem Falle die Bruchsymbole $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ ($\nu = 0, 1, \cdots n$), gleichgültig ob dieselben einen *Sinn* haben oder *nicht* (welcher letztere Fall ja nur eintritt, falls $B_\nu = 0$ ist), als *Näherungsbrüche* des Kettenbruches $b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu}$, so läßt sich das in den Gleichungen (6_0), (6_1), (6) enthaltene Ergebnis folgendermaßen aussprechen:

Die reduzierte Form $\frac{x_0}{x_1}$ eines aus beliebigen Zahlen gebildeten Kettenbruches $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$, deren ursprüngliche Definition auf der Herstellung durch direkte Reduktion *d. h. auf der Bestimmung von x_0 und x_1 aus dem Gleichungssystem:*

$$\begin{aligned} x_0 &= b_0 x_1 + a_1 x_2 \\ x_1 &= b_1 x_2 + a_2 x_3 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{n-1} &= b_{n-1} x_n + a_n \\ x_n &= b_n \end{aligned}$$

beruhte, kann auch rekursorisch *als Näherungsbruch n^{ter} Ordnung gewonnen werden, d. h. man hat:*

$$x_0 = A_n \qquad x_1 = B_n, \text{ also: } b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n = \frac{A_n}{B_n},$$

wo A_ν, B_ν für $\nu = 0, 1, \cdots n$ sukzessive aus den Formeln (I) *zu bestimmen sind.*

Oder auch, mit Rücksicht auf die am Anfang von Nr. 2, S. 685, und in der Fußnote 1, S 682, gemachten Bemerkungen:

Man gelangt zu dem gleichen Ergebnis, wenn man einen beliebigen Kettenbruch $b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n}$ *durch sukzessives Fortschaffen der Nenner von rechts nach links (also genau wie einen elementaren Kettenbruch, d. h. ohne Rücksicht auf das etwaige Vorkommen von Null als Nenner) auf die reduzierte Form bringt oder aber, wenn man die letztere von links nach rechts durch das Näherungsbruch-Verfahren bestimmt.*

Hieraus folgt insbesondere, daß der *Wert* eines *elementaren* Kettenbruches auch dann als *letzter Näherungsbruch* zum Vorschein kommt, wenn der Kettenbruch *kein durchweg* elementarer ist (im Gegensatz zu der § 89, Nr. 1 ausdrücklich gemachten Voraussetzung), wenn also unter den Näherungsbrüchen beliebig viele *sinnlose* vorkommen.

§ 91. Neue Bezeichnungen. — Ein Hauptsatz.

1. Um aus dem Hauptergebnis des vorigen Paragraphen noch weitere Folgerungen zu ziehen, führen wir zunächst einige neue Bezeichnungen ein

Es werde der Kettenbruch

$$b_\mu + \frac{a_{\mu+1}|}{|b_{\mu+1}} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} \quad (\text{wo: } 0 \leqq \mu \leqq \nu \leqq n)^{1)}$$

mit

$$(K_{\mu,\nu})$$

bezeichnet. Es ist also das Zeichen $(K_{\mu,\nu})$ als durchaus *identisch* mit dem obigen *Kettenbruche* anzusehen, bedeutet *nicht* etwa die *reduzierte Form* des letzteren. Wir drücken diese Festsetzung durch die Schreibweise aus:

$$(1) \qquad (K_{\mu,\nu}) \equiv b_\mu + \frac{a_{\mu+1}|}{|b_{\mu+1}} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu}.$$

Dabei dient also das Zeichen $\equiv$ als *Identitäts*zeichen und wird auch weiterhin in diesem Sinne von uns gebraucht werden, wie übrigens in der Algebra und Funktionenlehre allgemein üblich.[2])

---

1) Die als zulässig gedachte Annahme $\mu = \nu$ ist natürlich so zu verstehen, daß dann ein Glied mit dem Index $\mu + 1$ überhaupt nicht vorhanden ist und somit der Kettenbruch sich auf das Anfangsglied b_μ reduziert.

2) Anders in der *Zahlentheorie*, wo das nämliche Zeichen zur Bezeichnung der sog. *Kongruenz* dient. Bedeuten z. B. a, b, m ganze Zahlen, so besagt die Beziehung:

$$b \equiv a \pmod{m},$$

(in Worten: b ist *kongruent* a modulo m) soviel als: b unterscheidet sich von a nur um ein ganzes Vielfaches von m.

Bezeichnet man ferner mit $A_{\mu,\lambda}$, $B_{\mu,\lambda}$ $(\lambda=\mu,\ \mu+1,\cdots\nu)$ die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche von $(K_{\mu,\nu})$, so stellt $\frac{A_{\mu,\nu}}{B_{\mu,\nu}}$ die *reduzierte Form* von $(K_{\mu,\nu})$ vor, für welche letztere wir gelegentlich auch $K_{\mu,\nu}$ (ohne Klammer) schreiben werden, in Zeichen (vgl. S. 684, Formel (2)):

$$(2)\qquad (K_{\mu,\nu}) \mathrel{\substack{=\\=}} \frac{A_{\mu,\nu}}{B_{\mu,\nu}} \quad \text{bzw.}\quad K_{\mu,\nu}\equiv\frac{A_{\mu,\nu}}{B_{\mu,\nu}}.$$

Da hierbei $A_{0,\nu}$, $B_{0,\nu}$ offenbar genau dieselbe Bedeutung haben wie die früher benützten Bezeichnungen A_ν, B_ν, so werden wir uns zumeist für $A_{0,\nu}$, $B_{0,\nu}$ dieser einfacheren Bezeichnungen bedienen und dementsprechend auch kürzer (K_ν) bzw K_ν statt: $(K_{0,\nu})$ bzw. $K_{0,\nu}$ schreiben.

Beachtet man, daß:

$$(3)\qquad (K_{\mu,\mu})\equiv b_\mu \qquad (K_{\mu,\mu+1})\equiv b_\mu+\frac{a_{\mu+1}|}{|b_{\mu+1}}=\frac{b_{\mu+1}b_\mu+a_{\mu+1}}{b_{\mu+1}}$$

und daß beim Übergange von $(K_{0,\lambda})$ zu $(K_{\mu,\lambda})$ lediglich $A_{\mu,\lambda}$, $B_{\mu,\lambda}$ an die Stelle von $A_{0,\lambda}$, $B_{0,\lambda}$ bzw. A_λ, B_λ treten, so ergeben sich zur Berechnung der $A_{\mu,\lambda}$, $B_{\mu,\lambda}$ die folgenden Anfangsgleichungen und (mit Berücksichtigung der Formeln (I), S. 689) die folgenden Rekursionsformeln:

$$(\text{II})\begin{cases} A_{\mu,\mu}=b_\mu & B_{\mu,\mu}=1 \\ A_{\mu,\mu+1}=b_{\mu+1}b_\mu+a_{\mu+1} & B_{\mu,\mu+1}=b_{\mu+1} \\ A_{\mu,\nu}=b_\nu A_{\mu,\nu-1} & B_{\mu,\nu}=b_\nu B_{\mu,\nu-1} \\ \qquad +a_\nu A_{\mu,\nu-2} & \qquad +a_\nu B_{\mu,\nu-2} \end{cases} \quad \left|\begin{pmatrix}\mu\geqq 0\\ \nu\geqq\mu+2\end{pmatrix}\right.$$

Da ferner:

$$(K_{\mu,\nu})\equiv b_\mu+\frac{a_{\mu+1}\ |}{|(K_{\mu+1,\nu})}\text{[1]},$$

---

1) Bringt man das letzte Glied dieser Identität auf die Form. $\frac{a_{\mu+1}B_{\mu+1,\nu}}{A_{\mu+1,\nu}}$, so folgt:

$$\frac{A_{\mu,\nu}}{B_{\mu,\nu}}=\frac{b_\mu A_{\mu+1,\nu}+a_{\mu+1}B_{\mu+1,\nu}}{A_{\mu+1,\nu}}$$

und hieraus mit Benützung von (III) durch Vergleichung der Zähler, wenn man noch $\nu=n$ setzt·

$$B_{\mu-1,n}=b_\mu B_{\mu,n}+a_{\mu+1}B_{\mu+1,n}$$

für $n\geqq\mu+1$, also· $\mu<n$. Für $\mu=n$ hat man nach (II):

$$B_{n-1,n}=b_n.$$

Vergleicht man diese Beziehungen mit denjenigen des Gleichungssystems (11) von § 88, Nr 4, S. 675, wonach:

$$x_\mu=b_\mu x_{\mu+1}+a_{\mu+1}x_{\mu+2}$$
$$x_n=b_n,$$

so ergibt sich, daß

$$B_{\mu-1,n}=x_\mu,$$

falls x_μ aus dem Gleichungssystem (11) bestimmt wird.

so folgt, daß der *Nenner* $B_{\mu,\nu}$ von $K_{\mu,\nu}$ identisch ist mit dem *Zähler* $A_{\mu+1,\nu}$ von $K_{\mu+1,\nu}$, also:

$$\text{(III)} \qquad B_{\mu,\nu} = A_{\mu+1,\nu} \quad (\nu \geqq \mu + 1).$$

2. Aus den Betrachtungen des vorigen Paragraphen (vgl insbesondere die Fußnote 2, S. 685) folgt, daß die *reduzierte Form* des Kettenbruches:

$$\text{(4)} \qquad (K_n) \equiv b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n}$$

dieselbe ist wie diejenige des folgenden:

$$\text{(5)} \qquad b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-1}} + \frac{a_\nu x_{\nu+1}|}{|\ x_\nu} \qquad (\nu \leqq n-1),$$

wo x_ν und $x_{\nu+1}$ aus den Gleichungen zu bestimmen sind:

$$\begin{aligned} x_\nu \quad &= b_\nu x_{\nu+1} + a_{\nu+1} x_{\nu+2} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} &= b_{n-1} x_n + a_n \\ x_n \quad &= b_n \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen geht aber hervor, daß $\frac{x_\nu}{x_{\nu+1}}$ die reduzierte Form des Kettenbruches

$$\text{(6)} \qquad (K_{\nu,n}) \equiv b_\nu + \frac{a_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n}$$

vorstellt, sodaß also mit Benützung der in der vorigen Nummer eingeführten Bezeichnungen sich ergibt:

$$\text{(7)} \qquad x_\nu = A_{\nu,n} \qquad x_{\nu+1} = B_{\nu,n}.$$ [1])

Da ferner auf Grund jener neuen Bezeichnungen der Kettenbruch (K_n) auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\text{(8)} \qquad (K_n) \equiv b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-1}} + \frac{a_\nu\ |}{|(K_{\nu,n})},$$

so läßt sich das zu Anfang dieser Nummer ausgesprochene Ergebnis mit den soeben daran geknüpften Bemerkungen zu dem folgenden *Hauptsatz* zusammenfassen:

---

1) Setzt man in (5) und (7) speziell $\nu = 1$, so folgt, daß $\frac{A_n}{B_n}$ als reduzierte Form von (K_n) identisch ist mit der reduzierten Form von $b_0 + \frac{a_1 B_{1,n}}{A_{1,n}}$, also mit: $\frac{b_0 A_{1,n} + a_1 B_{1,n}}{A_{1,n}}$. Die Vergleichung der Nenner gibt nur die bereits aus Gl. (III) für $\mu = 0$, $\nu = n$ resultierende Beziehung:

$$B_n \equiv B_{0,n} = A_{1,n},$$

mit deren Benützung durch Vergleichung der Zähler sich ergibt:

$$A_n = b_0 B_n + a_1 B_{1,n}.$$

Der n-gliedrige Kettenbruch:

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-1}} + \frac{a_\nu \quad |}{|(K_{\nu,n})}$$

und der ν-gliedrige $(1 \leqq \nu < n)$

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-1}} + \frac{a_\nu B_{\nu,n}|}{|A_{\nu,n}} \quad \left(\text{wo also: } (K_{\nu,n}) \stackrel{=}{=} \frac{A_{\nu,n}}{B_{\nu,n}}\right)$$

haben die gleiche reduzierte Form, sie sind also entweder gleichwertig oder beide sinnlos.

3. Der vorstehende Satz würde offenbar eine noch etwas einfachere Form annehmen, falls es gestattet ist, bei dem zweiten der obigen Kettenbrüche Zähler und Nenner des letzten Teilbruches mit dem Faktor $\frac{1}{B_{\nu,n}}$ zu multiplizieren, den betreffenden Teilbruch also in den folgenden umzuformen: $\frac{a_\nu}{K_{\nu,n}}$ und auf diese Weise eine noch durchsichtigere Beziehung zu der ursprünglichen Form des Kettenbruches zu gewinnen.

Hierbei handelt es sich offenbar lediglich um die Entscheidung der Frage: In welcher Beziehung stehen die reduzierten Formen zweier Kettenbrüche von der Form

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-1}} + \frac{a_\nu|}{|b_\nu}$$

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-1}} + \frac{c a_\nu|}{|c b_\nu},$$

wo c eine beliebige, von *Null* verschiedene Zahl bedeutet?

Bezeichnet man die reduzierte Form des zweiten Kettenbruches mit $\frac{A'_\nu}{B'_\nu}$, so ergibt sich:

$$A'_\nu = c b_\nu A_{\nu-1} + c a_\nu A_{\nu-2} \qquad B'_\nu = c b_\nu B_{\nu-1} + c a_\nu B_{\nu-2}$$
$$= c A_\nu \qquad\qquad\qquad\qquad = c B_\nu,$$

d. h. die *reduzierte Form* des zweiten Kettenbruches ist mit derjenigen des ersten zwar *nicht identisch*, jedoch nur im Zähler und Nenner um den nämlichen Faktor verschieden oder, wie wir sagen wollen, *äquivalent*[1]), die Kettenbrüche selbst sind also entweder *gleichwertig* oder *beide sinnlos.*

1) Es handelt sich hier um den einfachsten Fall der sog. *Äquivalenz* zweier Kettenbrüche — einer Beziehung, von der sehr bald (s. § 94 Nr. 1, S. 706) noch ausführlich die Rede sein wird und die eine wichtige Rolle in der Lehre von den Kettenbrüchen spielt.

Die Anwendbarkeit dieses Ergebnisses auf den vorliegenden Fall erfordert nur, daß der dabei in Frage kommende Faktor $\frac{1}{B_{\nu,n}}$ eine bestimmte Zahl vorstellt, also $|B_{\nu,n}| > 0$ oder, was ja auf dasselbe hinausläuft, $K_{\nu,n}$ *nicht sinnlos* ist.

Hiernach ergibt sich als besonderer, übrigens besonders einfacher und wichtiger Fall des obigen Hauptsatzes der folgende Satz:

Ist die reduzierte Form $K_{\nu,n}$ nicht sinnlos, so sind die beiden Kettenbrüche:

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|(K_{\nu,n})} \text{ und } b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|K_{\nu,n}}$$

gleichwertig oder beide sinnlos.

4. Ein anderer wichtiger Sonderfall des Hauptsatzes von Nr. 2 kommt zum Vorschein, wenn man ihn auf den Kettenbruch:

$$\frac{1|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n} \text{ [1]}$$

anwendet. Schreibt man den letzteren folgendermaßen:

$$0 + \frac{1|}{|(K_{0,n})},$$

so folgt aus dem obigen Hauptsatze unmittelbar[2]), daß die *reduzierte Form* mit derjenigen von:

$$0 + \frac{B_{0,n}|}{|A_{0,n}}$$

übereinstimmt, d. h. sie lautet: $\frac{B_n}{A_n}$. Somit ergibt sich:

Die reduzierte Form des Kettenbruches:

$$\frac{1|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n}$$

ist die reziproke von derjenigen des Kettenbruches:

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n} \text{ [3]}),$$

---

1) Dabei ist es keineswegs notwendig, den Fall $b_0 = 0$ auszuschließen.

2) Man bemerke, daß der Index $\nu = 0$ hier dieselbe Rolle spielt wie $\nu = 1$ bei der Fassung des Hauptsatzes, sodaß also hier das betreffende Ergebnis auch noch für $\nu = 0$ gilt.

3) Da es offenbar freisteht, n auch durch jeden kleineren Index zu ersetzen, so folgt noch, daß *sämtliche Näherungsbrüche* des einen Kettenbruches die *reziproken* des anderen sind, d. h. bezeichnet man die Näherungsbrüche des zweiten Kettenbruches mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$, die des ersten mit $\frac{A'_\nu}{B'_\nu}$, so hat man. $\frac{A'_{\nu+1}}{B'_{\nu+1}} = \frac{B_\nu}{A_\nu}$

$(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$

er besitzt also einen bestimmten Wert, wenn $|A_n| > 0$ *ist, und zwar den reziproken Wert von demjenigen des zweiten Kettenbruches, wenn auch* $|B_n| > 0$, *den Wert Null, wenn* $B_n = 0$, *also der zweite Kettenbruch sinnlos ist. Dagegen wird er sinnlos, wenn* $A_n = 0$.

§ 92. Verallgemeinerung der Rekursionsformeln für die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche. — Differenzen der Näherungsbrüche.

1. Der Hauptsatz des vorigen Paragraphen kann dazu dienen, die Rekursionsformeln für die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche wesentlich zu verallgemeinern. Ist $0 \leqq \mu < \nu < \nu + \varrho$ und sodann:

$$(K_{\mu,\nu+\varrho}) \equiv b_\mu + \frac{a_{\mu+1}|}{|b_{\mu+1}} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} + \frac{a_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}} + \cdots + \frac{a_{\nu+\varrho}|}{|b_{\nu+\varrho}}$$
$$\equiv b_\mu + \frac{a_{\mu+1}|}{|b_{\mu+1}} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} + \frac{a_{\nu+1}|}{|(K_{\nu+1,\nu+\varrho})},$$

so besitzt dieser Kettenbruch auf Grund jenes Hauptsatzes dieselbe reduzierte Form wie der folgende:

$$b_\mu + \frac{a_{\mu+1}|}{|b_{\mu+1}} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} + \frac{a_{\nu+1} B_{\nu+1,\nu+\varrho}|}{|A_{\nu+1,\nu+\varrho}}.$$

Um diese letztere herzustellen, hat man zunächst mit Benützung der Rekursionsformeln (II), S 691:

$$b_\mu + \frac{a_{\mu+1}|}{|b_{\mu+1}} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} + \frac{a_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}} \mathrel{\substack{=\\=}} \frac{b_{\nu+1} A_{\mu,\nu} + a_{\nu+1} A_{\mu,\nu-1}}{b_{\nu+1} B_{\mu,\nu} + a_{\nu+1} B_{\mu,\nu-1}}$$

und daher:

$$(1) \qquad (K_{\mu,\nu+\varrho}) \mathrel{\substack{=\\=}} \frac{A_{\mu,\nu} A_{\nu+1,\nu+\varrho} + a_{\nu+1} A_{\mu,\nu-1} B_{\nu+1,\nu+\varrho}}{B_{\mu,\nu} A_{\nu+1,\nu+\varrho} + a_{\nu+1} B_{\mu,\nu-1} B_{\nu+1,\nu+\varrho}}.$$

Da andererseits:

$$(2) \qquad (K_{\mu,\nu+\varrho}) \mathrel{\substack{=\\=}} \frac{A_{\mu,\nu+\varrho}}{B_{\mu,\nu+\varrho}},$$

so ergeben sich durch Trennung von Zähler und Nenner die folgenden Beziehungen: [1])

$$(\text{IV}) \qquad \begin{cases} A_{\mu,\nu+\varrho} = A_{\mu,\nu} A_{\nu+1,\nu+\varrho} + a_{\nu+1} A_{\mu,\nu-1} B_{\nu+1,\nu+\varrho} \\ B_{\mu,\nu+\varrho} = B_{\mu,\nu} A_{\nu+1,\nu+\varrho} + a_{\nu+1} B_{\mu,\nu-1} B_{\nu+1,\nu+\varrho}, \end{cases}$$

---

1) Da nach (III), S. 692,
$$B_{\mu,\nu+\varrho} = A_{\mu+1,\nu+\varrho},$$
so läßt sich die zweite der Formeln (IV) auch folgendermaßen schreiben:
$$A_{\mu+1,\nu+\varrho} = A_{\mu+1,\nu} A_{\nu+1,\nu+\varrho} + a_{\nu+1} A_{\mu+1,\nu-1} B_{\nu+1,\nu+\varrho},$$
und sie unterscheidet sich dann von der ersten nur dadurch, daß $\mu+1$ an die Stelle von μ getreten ist.

Auch kann man offenbar mit Hilfe der obigen Beziehung die Formeln (IV) so umgestalten daß sie nur lauter A oder lauter B enthalten.

welche insbesondere für $\mu = 0$, wenn man wieder allgemein A_λ, B_λ statt $A_{0,\lambda}$, $B_{0,\lambda}$ schreibt, die folgende Form annehmen[1]):

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} A_{\nu+\varrho} = A_\nu \, A_{\nu+1,\nu+\varrho} + a_{\nu+1} \, A_{\nu-1} \, B_{\nu+1,\nu+\varrho} \\ B_{\nu+\varrho} = B_\nu \, A_{\nu+1,\nu+\varrho} + a_{\nu+1} \, B_{\nu-1} \, B_{\nu+1,\nu+\varrho} \end{cases} (1 \leqq \nu < \nu + \varrho)$$

oder auch (nach (III), S. 692):

$$\text{(Va)} \quad \begin{cases} A_{\nu+\varrho} = A_\nu \, B_{\nu,\nu+\varrho} + a_{\nu+1} A_{\nu-1} \, B_{\nu+1,\nu+\varrho} \\ B_{\nu+\varrho} = B_\nu \, B_{\nu,\nu+\varrho} + a_{\nu+1} \, B_{\nu-1} \, B_{\nu+1,\nu+\varrho}. \end{cases}$$

Man kann übrigens der *rechten* Seite dieser Beziehungen noch verschiedene andere Formen geben, wenn man davon Gebrauch macht, daß $\nu + \varrho$, also die *linke* Seite, ungeändert bleibt, falls man ν und ϱ vertauscht bzw. ν durch $\nu \pm \lambda$, ϱ durch $\varrho \mp \lambda$ ersetzt.

2. Eine andere wichtige Grundformel bezieht sich auf die *Differenz* zweier konsekutiver bzw. zweier beliebiger Näherungsbrüche.

Es werde gesetzt:

$$\text{(3)} \qquad \Delta_\nu \equiv A_\nu \, B_{\nu-1} - A_{\nu-1} \, B_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots),$$

also insbesondere:

$$\text{(3a)} \qquad \begin{aligned} \Delta_1 &\equiv A_1 \, B_0 - A_0 \, B_1 \\ &= (b_1 \, b_0 + a_1) - b_0 \, b_1 \text{ (nach (I), S. 689)} \\ &= a_1. \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Rekursionsformel (I) auf A_ν, B_ν ergibt sich aus der Definitionsgleichung für Δ_ν die Umformung:

$$\begin{aligned} \Delta_\nu &= B_{\nu-1} \, (b_\nu \, A_{\nu-1} + a_\nu \, A_{\nu-2}) - A_{\nu-1} \, (b_\nu \, B_{\nu-1} + a_\nu \, B_{\nu-2}) \\ &= a_\nu \, (A_{\nu-2} \, B_{\nu-1} - A_{\nu-1} \, B_{\nu-2}) \\ \text{(4)} \qquad &= - a_\nu \, \Delta_{\nu-1}. \end{aligned}$$

Ersetzt man in dieser Rekursionsformel ν der Reihe nach durch $\nu - 1$, $\nu - 2, \cdots 2$, so findet man weiter:

$$\begin{aligned} \Delta_{\nu-1} &= - a_{\nu-1} \, \Delta_{\nu-2} \\ \Delta_{\nu-2} &= - a_{\nu-2} \, \Delta_{\nu-3} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_2 &= - a_2 \, \Delta_1 = - a_2 \, a_1 \end{aligned}$$

und daher durch sukzessives Einsetzen dieser Resultate in Gl. (4) schließlich:

$$\text{(VI)} \quad \Delta_\nu \equiv A_\nu \, B_{\nu-1} - A_{\nu-1} \, B_\nu = (-1)^{\nu-1} \cdot a_1 a_2 \cdots a_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots).$$

---

[1]) Für $\varrho = 1$ gehen diese Beziehungen (wegen: $A_{\nu+1,\nu+1} = b_{\nu+1}$, $B_{\nu+1,\nu+1} = 1$ nach (II), S. 691) in die gewöhnlichen Rekursionsformeln für $A_{\nu+1}$, $B_{\nu+1}$ über.

Sind $B_{\nu-1}$, B_ν *von Null verschieden*, so ergibt sich also:

$$\text{(VII)}\quad K_\nu - K_{\nu-1} \equiv \frac{A_\nu}{B_\nu} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} = (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{a_1 a_2 \cdots a_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3 \cdots)$$

als Ausdruck für die Differenz zweier konsekutiver Näherungsbrüche.

Eine entsprechende Formel für die Differenz zweier *beliebiger* Näherungsbrüche findet man mit Hilfe der verallgemeinerten Rekursionsformeln (V). Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit B_ν und subtrahiert davon die mit A_ν multiplizierte zweite, so folgt zunächst:

$$\begin{aligned} A_{\nu+\varrho} B_\nu - A_\nu B_{\nu+\varrho} &= a_{\nu+1} B_{\nu+1, \nu+\varrho} (A_{\nu-1} B_\nu - A_\nu B_{\nu-1}) \\ &= - a_{\nu+1} B_{\nu+1, \nu+\varrho} \Delta_\nu, \end{aligned}$$

also mit Berücksichtigung von (VI):

$$\text{(VIII)}\quad A_{\nu+\varrho} B_\nu - A_\nu B_{\nu+\varrho} = (-1)^\nu \cdot a_1 a_2 \cdots a_{\nu+1} \cdot B_{\nu+1, \nu+\varrho} \quad (1 \leqq \nu < \nu + \varrho)$$

als Verallgemeinerung der Formel (VI) (welche wieder zum Vorschein kommt, wenn man $\varrho = 1$ annimmt und sodann $\nu + 1$ durch ν ersetzt — vgl. Fußnote 1 der vorigen Seite).

Man bemerke, daß die vorstehende, unter der Voraussetzung $\nu \geqq 1$ abgeleitete Formel auch noch für $\nu = 0$ gültig bleibt: Setzt man nämlich in der letzten Gleichung von Fußnote 1, S. 692, $n = \varrho$, so hat man:

$$\text{(5)}\qquad A_\varrho = b_0 B_\varrho + a_1 B_{1,\varrho}$$

oder auch, wegen: $A_0 = b_0$, $B_0 = 1$:

$$\text{(VIIIa)}\qquad A_\varrho B_0 - A_0 B_\varrho = a_1 B_{1,\varrho},$$

also genau diejenige Formel, welche aus (VIII) für $\nu = 0$ hervorgeht.

Sind B_ν, $B_{\nu+\varrho}$ wiederum *von Null verschieden*, so folgt weiter:

$$\text{(IX)}\quad K_{\nu+\varrho} - K_\nu \equiv \frac{A_{\nu+\varrho}}{B_{\nu+\varrho}} - \frac{A_\nu}{B_\nu} = (-1)^\nu \cdot \frac{a_1 a_2 \cdots a_{\nu+1} \cdot B_{\nu+1, \nu+\varrho}}{B_\nu B_{\nu+\varrho}}$$

als Ausdruck für die Differenz zweier *beliebiger* Näherungsbrüche.

3. Da das Anfangsglied b_0 nur für die Wertbestimmung des Kettenbruches rein additiv in Betracht kommt, dagegen auf seine sonstige Natur, insbesondere auf die Beschaffenheit der Näherungsbrüche nicht den geringsten Einfluß übt, so ist es zuweilen bequemer, bei Untersuchung der Näherungsbrucheigenschaften, lediglich mit Kettenbrüchen von der Form $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$ zu operieren (wobei dann, wie bereits in § 89 Nr. 1, S. 680, bemerkt wurde, $A_0 = 0$, $B_0 = 1$ zu setzen ist) und dementsprechend bei der Betrachtung von Teilkettenbrüchen statt der bisher benützten Form (§ 91, Nr. 1, S. 690/691, Gl. (1), (2)):

$$(K_{\mu,\nu}) \equiv b_\mu + \frac{a_{\mu+1}|}{|b_{\mu+1}} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} = \frac{A_{\mu,\nu}}{B_{\mu,\nu}},$$

die folgende zugrunde zu legen:

$$(5)\qquad (K^*_{\mu,\nu}) \equiv \frac{a_{\mu+1}|}{|b_{\mu+1}} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} = \frac{A^*_{\mu,\nu}}{B^*_{\mu,\nu}}\ (0 \leqq \mu < \nu \leqq n).[1]$$

Da das Glied b_μ auf den *Nenner* $B_{\mu,\nu}$ keinen Einfluß hat, so erkennt man zunächst, daß ein für allemal:

$$(6)\qquad B^*_{\mu,\nu} \equiv B_{\mu,\nu}.$$

Um auch $A^*_{\mu,\nu}$ in die früher benützten Bezeichnungen zu übertragen, hat man zunächst:

$$(K^*_{\mu,\nu}) \equiv \frac{a_{\mu+1}\ \ |}{|(K_{\mu+1,\nu})}$$

und daher nach dem Hauptsatz von § 91, Nr. (2):

$$\frac{A^*_{\mu,\nu}}{B_{\mu,\nu}} = \frac{a_{\mu+1}B_{\mu+1,\nu}}{A_{\mu+1,\nu}},$$

also insbesondere:

$$(7)\qquad A^*_{\mu,\nu} = a_{\mu+1}B_{\mu+1,\nu}.[2]$$

Mit Benützung dieser Beziehung lassen sich die Formeln (V a) in die folgende etwas einfachere Form setzen:

$$(\mathrm{V}')\qquad \begin{cases} A_{\nu+\varrho} = A_\nu B_{\nu,\nu+\varrho} + A_{\nu-1}A^*_{\nu,\nu+\varrho} \\ B_{\nu+\varrho} = B_\nu B_{\nu,\nu+\varrho} + B_{\nu-1}A^*_{\nu,\nu+\varrho} \end{cases}\ (1 \leqq \nu < \nu + \varrho),$$

ebenso die Formel (VIII) in die folgende:

$$(\mathrm{VIII}')\qquad A_{\nu+\varrho}B_\nu - A_\nu B_{\nu+\varrho} = (-1)^\nu \cdot a_1 a_2 \cdots a_\nu \cdot A^*_{\nu,\nu+\varrho}.$$

Ferner hat man mit Benützung der Bezeichnungsweise (5):

$$(8)\qquad (K_n) \equiv \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n \equiv \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-1}} + \frac{a_\nu\ \ |}{|b_\nu + (K^*_{\nu,n})},$$

---

1) Setzt man mit Benützung der bisherigen Bezeichnungsweise (bei welcher ja die Annahme $b_0 = 0$ nicht ausgeschlossen war):

$$(K_n) \equiv \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n,$$

so hat man also

$$(K^*_{0,n}) \equiv (K_n)$$

und sodann:

$$A^*_{0,n} \equiv A_n,\quad B^*_{0,n} \equiv B_n.$$

2) Die Vergleichung der Nenner ergibt nur die bereits auf S. 692 angeführte Formel (III):

$$B_{\mu,\nu} = A_{\mu+1,\nu}.$$

folglich hat (K_n), wegen:

$$(K^*_{\nu, n}) \frac{= A^*_{\nu, n}}{= B_{\nu, n}}$$

$$b_\nu + (K^*_{\nu, n}) \frac{= B_{\nu, n} b_\nu + A^*_{\nu, n}}{= B_{\nu, n}},$$

nach dem Hauptsatze von § 91, Nr. 2, S 693, dieselbe reduzierte Form wie der Kettenbruch:

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-1}} + \frac{B_{\nu, n} a_\nu|}{|B_{\nu, n} b_\nu + A^*_{\nu, n}},$$

sodaß also:

$$(9) \qquad K_n \equiv \frac{(B_{\nu, n} b_\nu + A^*_{\nu, n}) A_{\nu-1} + B_{\nu, n} a_\nu A_{\nu-2}}{(B_{\nu, n} b_\nu + A^*_{\nu, n}) B_{\nu-1} + B_{\nu, n} a_\nu B_{\nu-2}} \equiv \frac{B_{\nu, n} A_\nu + A^*_{\nu, n} A_{\nu-1}}{B_{\nu, n} B_\nu + A^*_{\nu, n} B_{\nu-1}},$$

d. h. schließlich: *Die beiden Kettenbruche*

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \dfrac{a_\nu|}{|b_\nu} + \dfrac{a_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}} \cdots + \dfrac{a_n|}{|b_n} \\ \textit{und:}\ \dfrac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \dfrac{a_\nu|}{|b_\nu} + \dfrac{A^*_{\nu, n}|}{|B_{\nu, n}} \end{cases}$$

haben dieselbe reduzierte Form.

Daraus folgt insbesondere, daß:

$$(11) \qquad \frac{a_1|}{b_1} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu + c} \equiv \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} + \frac{c|}{|1} \frac{= A_\nu + c A_{\nu-1}}{= B_\nu + c B_{\nu-1}}.$$

§ 93. Formale Eigenschaften der Näherungszähler und -nenner: Irreduzibilität. — Einfluß der Null als Teilzähler. — Eigenschaften der Näherungsbrüche, falls kein Teilzähler gleich Null ist.

1. Die Rekursionsformeln für die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche:

$$(\mathrm{I}) \qquad A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2}, \qquad B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2}$$

lassen zunächst unmittelbar erkennen, daß die ganzen Funktionen der a_λ, b_λ, welche zur Darstellung der A_ν, B_ν dienen, keinen einzigen von 1 verschiedenen *numerischen* Koeffizienten besitzen. Da nämlich $A_{\nu-1}$, $A_{\nu-2}$ bzw. $B_{\nu-1}$, $B_{\nu-2}$ weder a_ν noch b_ν enthalten, so kann *kein* Glied von $b_\nu A_{\nu-1}$ bzw. $b_\nu B_{\nu-1}$ in $a_\nu A_{\nu-2}$ bzw. $a_\nu B_{\nu-2}$ vorkommen. Haben also $A_{\nu-1}$, $A_{\nu-2}$ bzw. $B_{\nu-1}$, $B_{\nu-2}$ keinen von 1 verschiedenen Koeffizienten, so gilt das nämliche von A_ν bzw. B_ν. Da aber:

$$(\mathrm{I}_0) \qquad A_0 = b_0 \qquad B_0 = 1$$

$$(\mathrm{I}_1) \qquad A_1 = b_1 b_0 + a_1 \qquad B_1 = b_1,$$

so folgt mittelst vollständiger Induktion die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung für jedes A_ν bzw. B_ν. Daraus ergibt sich weiter, daß A_ν und B_ν keinen (ganzzahligen) *numerischen* Faktor, also auch keinen *gemeinsamen* derartigen *Teiler* besitzen [1])

Des weiteren läßt sich aber zeigen, daß A_ν bzw. B_ν überhaupt keinen „*Teiler*“ haben können, d. h. daß keine der aus den a_λ, b_λ zusammengesetzten ganzen Funktionen, welche zur Darstellung von A_ν bzw. B_ν dienen, in ein *Produkt* zweier solcher Funktionen zerlegbar ist (deren *jede* dann eben als ein *Teiler* der Gesamtfunktion zu gelten hätte). Wenn nämlich für A_ν eine solche Zerlegung existierte, so müßte sie mit Berücksichtigung des Umstandes, daß jedes Glied von A_ν *einen* der beiden Faktoren a_ν, b_ν in der ersten Potenz enthält, die Form haben:

$$A_\nu = (b_\nu K_\nu + a_\nu L_\nu) \cdot M_\nu, \tag{1}$$

wo K_ν, L_ν, M_ν ganze Funktionen der a_λ, b_λ für $\lambda \leqq \nu - 1$, also unabhängig von a_ν, b_ν wären und somit keine Veränderung erleiden könnten, wenn man a_ν, b_ν irgendwie spezialisiert. Mit Berücksichtigung von (I) würde sich also insbesondere aus Gl. (1) ergeben:

$$\begin{cases} \text{für } a_\nu = 1,\ b_\nu = 1: & A_{\nu-1} + A_{\nu-2} = (\ K_\nu + L_\nu) \cdot M_\nu \\ \text{für } a_\nu = 1,\ b_\nu = 2: & 2A_{\nu-1} + A_{\nu-2} = (2K_\nu + L_\nu) \cdot M_\nu, \end{cases} \tag{2}$$

und daher:

$$A_{\nu-1} = (2A_{\nu-1} + A_{\nu-2}) - (A_{\nu-1} + A_{\nu-2}) = K_\nu M_\nu\,{}^{2)}, \tag{3}$$

d. h. M_ν müßte *gemeinsamer* Teiler von A_ν und $A_{\nu-1}$ sein. Dann ließe sich aber ganz auf dieselbe Weise oder auch unmittelbar aus der Rekursionsformel (I) folgern, daß M_ν auch Teiler von $A_{\nu-2}$ und schließlich gemeinsamer Teiler von A_1 und A_0 sein müßte. Da aber,

---

1) Dies gilt natürlich nur so lange, als die a_λ, b_λ *ganz beliebige* Zahlen vorstellen, genauer gesagt, solange mit den *Zeichen* a_λ, b_λ rein formal gerechnet, aber über ihre Bedeutung keine spezielle Verfügung getroffen wird (z. B. in der Weise, daß zwischen irgendwelchen a_λ, b_λ von vornherein *besondere Beziehungen* bestehen wie in § 91, Nr. 3, S. 693, wo der letzte Teilbruch lautet: $\frac{c a_\nu}{c b_\nu}$, oder daß die a_λ, b_λ *numerisch* gegeben sind).

2) Man hätte dieses Resultat offenbar etwas kürzer aus Gl. (1) durch die einzige Festsetzung:

$$a_\nu = 0, \quad b_\nu = 1$$

erhalten. Da aber die *Null* als Teilzähler in gewisser Beziehung eine Ausnahmestellung einnimmt (wie in Nr. 2 dieses Paragraphen noch genauer erörtert wird), so erschien es zweckmäßig, diese (in dem vorliegenden Zusammenhange zwar als zulässig erweisbare) Annahme vorläufig zu vermeiden.

wie die Gleichungen (I_1) und (I_0) zeigen, A_1 und A_0 keinen gemeinsamen Teiler haben, so ergibt sich auf diese Weise die Unzulässigkeit der in Gl. (1) angenommenen Zerlegung.[1]) Man bezeichnet die hiermit festgestellte Unzerlegbarkeit von A_ν mit dem Ausdrucke: A_ν sei eine *irreduzible* ganze Funktion von $b_0, \cdots b_\nu; a_1, \cdots a_\nu$, bzw. kürzer: A_ν sei *irreduzibel.*

In analoger Weise ergibt sich, daß B_ν eine *irreduzible* ganze Funktion von $b_1, \cdots b_\nu; a_2, \cdots a_\nu$ ist (vgl. § 89, Nr. 1, S. 679) Daraus folgt weiter, daß die Näherungsbrüche $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ (von denen ja bereits gezeigt wurde, daß Zähler und Nenner keinen ganzzahligen numerischen Faktor gemein haben können) in der Form „reduzierter" Brüche im üblichen Sinne erscheinen, also nicht „gekürzt" werden können (immer unter der Voraussetzung, daß über die Auswahl der Zahlen a_λ, b_λ keine *speziellen* Verfügungen bestehen).

Es verdient bemerkt zu werden, daß die *Irreduzibilität* der A_ν, B_ν *mutatis muntandis* erhalten bleibt, wenn durchweg $a_\nu = 1$ oder (zum mindesten für $\nu \geqq 1$) $b_\nu = 1$ gesetzt wird, wenn es sich also um Kettenbrüche von den besonders häufigen und wichtigen Spezialformen $b_0 + \left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^n$ und $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^n$ handelt: im ersteren Falle sind die A_ν, B_ν irreduzible ganze Funktionen der b_λ, im zweiten ebensolche von b_0 und den a_λ. Dabei bleibt für den ersten Fall der oben geführte Beweis unverändert bestehen, da ja die unter (2) bezüglich a_ν gemachte Spezialannahme schon von vornherein erfüllt ist. Dagegen wäre im zweiten Falle die zweite der Spezialisierungen (2) wegen $b_\nu = 2$ unzulässig und müßte durch die folgende: $a_\nu = 2$, $b_\nu = 1$ ersetzt werden. Alsdann ergibt sich durch die oben benützte Schlußweise, daß zunächst $A_{\nu-2}$ den Teiler M_ν haben müßte, sodann aber auch $A_{\nu-1}$ wegen: $A_{\nu-1} = (K_\nu + L_\nu) M_\nu - A_{\nu-2}$, sodaß schließlich der weitere Fortgang des Beweises keine Änderung erfordert. Im übrigen ergibt sich, genau wie im Anfang dieser Nummer für den allgemeinen Fall, daß die A_ν, B_ν auch keinen (ganzzahligen) *numerischen* Teiler besitzen.

2. Wir wollen jetzt den Einfluß untersuchen, welchen das Auftreten der *Null* als Teilzähler auf den Charakter eines n-gliedrigen Kettenbruches ausübt. Man dürfte zunächst geneigt sein, dem Ketten-

---

1) Obschon in dem vorliegenden Zusammenhange die a_λ, b_λ als „beliebig" in der zuvor (S. 700, Fußnote 1) angegebenen Bedeutung zu gelten haben, so mag doch ausdrücklich bemerkt werden, daß im Falle $b_0 = 0$ alle A_ν ($\nu \geqq 1$) offenbar den Faktor a_1 haben.

bruche $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$, falls $a_1 = 0$ ist, ohne weiteres den Wert 0 beizulegen, und falls a_{m+1} für irgendein $m > 0$ der *erste* Teilzähler mit dem Werte 0 sein sollte, den Kettenbruch $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$ als gleichwertig mit demjenigen Kettenbruche anzusehen, welcher durch *Weglassung* des mit dem Zähler 0 beginnenden Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^n$ daraus entsteht, also mit: $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m$. Diese Schlüsse erweisen sich indessen sofort als unzulässig, wenn man bedenkt, daß der etwaige *Wert* eines Kettenbruches durch seine *reduzierte Form* bestimmt wird und daß diese letztere, auch wenn ihr *Zähler* gleich *Null* ist, noch keineswegs den *Wert Null* zu liefern braucht, vielmehr *sinnlos* wird, falls gleichzeitig der *Nenner* gleich *Null* ist.

Es werde nun angenommen, daß $a_{m+1} = 0$, wo $m \geqq 0$, und zwar soll m der *kleinste* Index sein, für welchen die *Null* als Teilzähler erscheint (eine Bedingung, die im Falle $m = 0$ schon von selbst erfüllt ist). Wir betrachten alsdann zunächst den Fall, daß $|B_m| > 0$ (welcher für $m = 0$, wegen $B_0 = 1$, der einzig mögliche ist), sodaß also dem Kettenbruche $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m$ (welcher für $m = 0$ sich auf b_0 reduziert) ein bestimmter Wert zukommt.

Aus den Beziehungen:

$$(4) \qquad \begin{cases} A_{m+\varrho} = A_m A_{m+1,\, m+\varrho} \\ B_{m+\varrho} = B_m A_{m+1,\, m+\varrho}, \end{cases}$$

welche aus den Formeln (V) des vorigen Paragraphen für $\nu = m$ und $a_{m+1} = 0$ hervorgehen, folgt sodann:

$$(5) \qquad \frac{A_{m+\varrho}}{B_{m+\varrho}} = \frac{A_m}{B_m}, \text{ also: } b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{m+\varrho} = b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m$$

für jedes ϱ, für welches $A_{m+1,\, m+\varrho}$ von Null verschieden ist, d. h.:

$$(6_1) \qquad \text{für } \varrho = 1, \text{ wenn: } b_{m+1} \neq 0^{1)},$$

$$(6) \text{ für } \varrho \geqq 2, \text{ wenn}^{2)}: b_{m+1} + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+2}^{m+\varrho} \neq 0, \text{ auch nicht von der Form: } \frac{0}{0}.$$

---

1) Wegen: $A_{m+1,\, m+1} = b_{m+1}$ (s. die erste der Gleichungen (II), S. 691).

2) Vgl. die aus Gl. (1), S. 691 zu entnehmende Definition von A [illegible]

Insbesondere hat man also für $n \geqq m+2$:

$$(7)\quad b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n = b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m, \text{ wenn: } b_{m+1} + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+2}^n \neq 0 \text{ und } \neq \frac{0}{0}.$$

Ist dagegen:

$$(8)\quad b_{m+1} = 0 \text{ bzw. für } \varrho \geqq 2:\ b_{m+1} + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+2}^{m+\varrho} = 0 \text{ oder von der Form: } \frac{0}{0},$$

so wird $\frac{A_{m+1}}{B_{m+1}}$ bzw. $\frac{A_{m+\varrho}}{B_{m+\varrho}}$ $(\varrho \geqq 2)$ *sinnlos* (nämlich nach (4) von der Form: $\frac{0}{0}$).

Es bleibt noch der Fall $B_m = 0$ zu betrachten, welcher offenbar nur eintreten kann, wenn $m > 0$. Dann folgt aber aus (4), daß: $B_{m+\varrho} = 0$ für *jedes* ϱ, mit anderen Worten: ist der Kettenbruch $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m$ *sinnlos*, so gilt das gleiche von *jedem* der Kettenbrüche $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{m+\varrho}$, insbesondere also von $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$.

Somit findet man als Gesamtergebnis der vorstehenden Betrachtung:

Ist a_{m+1} (wo $m \geqq 0$) der erste Teilzähler mit dem Werte **Null**, *so kann der Kettenbruch $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{m+\varrho}$ nur dann einen bestimmten Wert haben, und zwar:*

$$b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{m+\varrho} = b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m,$$

wenn der rechts stehende Kettenbruch einen Sinn hat und außerdem:

$$b_{m+1} + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+2}^{m+\varrho} \neq 0 \text{ bzw. } \neq \frac{0}{0}.$$[1]

Ist diese zweite Bedingung **nicht** *erfüllt, so wird $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{m+\varrho}$* **sinnlos**. *Das letztere findet für* **jedes** *$\varrho \geqq 1$ statt, wenn es schon für $\varrho = 0$ der Fall ist.*

3. Sind sämtliche a_ν $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$ *von Null verschieden*, so folgt zunächst aus der Differenzenformel (VI) von § 92, Nr. 2, S. 696, daß:

$$(9)\qquad |A_\nu B_{\nu-1} - A_{\nu-1} B_\nu| > 0$$

1) Im Falle $m = 0$ bzw. $\varrho = 1$, hat wiederum $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m$ bzw. $b_{m+1} + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+2}^{m+\varrho}$ die Bedeutung von b_0 bzw. b_{m+1}.

und daß daher die Näherungszähler und -nenner solcher Kettenbrüche die folgenden Eigenschaften besitzen:

I. Sind $B_{\nu-1}$ und B_ν *von Null verschieden*, so kann niemals die Beziehung $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} = \frac{A_\nu}{B_\nu}$ bestehen, sodaß also *zwei konsekutive* Näherungsbrüche, die überhaupt bestimmte Werte besitzen, stets *verschiedene* Werte haben.[1])

II. Ist $B_\nu = 0$, so folgt aus (9), daß $|B_{\nu-1}| > 0$ sein muß, und da gleichzeitig mit Ungl. (9) auch die durch Vertauschung von ν mit $\nu + 1$ daraus hervorgehende Beziehung besteht, so folgt analog, daß auch $|B_{\nu+1}| > 0$. Es können also niemals *zwei konsekutive* Näherungsbrüche gleichzeitig *sinnlos* ausfallen.

Daraus folgt insbesondere, daß ein *sinnloser* Kettenbruch (mit lauter von Null verschiedenen Teilzählern) durch *Weglassung* des letzten Teilbruches oder durch *Hinzufügung* eines beliebigen Teilbruches (mit von Null verschiedenem Zähler) bzw. durch beliebige *Abänderung* des letzten Teilnenners [2]) in einen solchen übergeht, der einen bestimmten *Wert* besitzt.

III. Ist $B_\nu = 0$, so muß $|A_\nu| > 0$ sein. Ein Näherungsbruch kann daher immer nur in der Weise *sinnlos* werden, daß sein *reziproker Wert* unzweideutig gleich *Null* ist

§ 94. Transformation eines Kettenbruches in einen äquivalenten. — Herstellung eines Kettenbruches mit vorgeschriebenen Näherungsbrüchen. — Die beiden Hauptformen eines Kettenbruches.

1. Multipliziert man den m^{ten} Teilzähler und Teilnenner und, falls $m < n$, auch den $(m+1)^{\text{ten}}$ Teilzähler des Kettenbruches:

$$(1) \qquad (K_n) \equiv b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_m|}{|b_m} + \frac{a_{m+1}|}{|b_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n}$$

mit einer beliebigen von Null verschiedenen Zahl c, so entsteht der Kettenbruch:

---

1) Dieses Resultat kann auch folgendermaßen ausgesprochen werden: Besteht für irgendein m die Beziehung: $\frac{A_{m+1}}{B_{m+1}} = \frac{A_m}{B_m}$, so muß für mindestens einen Index ν aus der Reihe $1, 2, \cdots m+1$ der Teilzähler $a_\nu = 0$ sein. Aus Nr. 2 folgt sodann, daß auch für *alle nicht sinnlosen* Näherungsbrüche mit höherem Index $m + \varrho$ gleichfalls die Beziehung gilt:

$$\frac{A_{m+\varrho}}{B_{m+\varrho}} = \frac{A_m}{B_m}.$$

2) Die Vermehrung des letzten Teilnenners um eine beliebige Zahl k ist ja gleichwertig mit der Hinzufügung des Teilbruches $\frac{k}{1}$.

$$(2) \qquad (K_n') \equiv b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{ca_m|}{|cb_m} + \frac{ca_{m+1}|}{|b_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n},$$

dessen Näherungsbrüche mit $\frac{A_\nu'}{B_\nu'}$ $(\nu = 0, 1, \cdots n)$ bezeichnet werden mögen. Man hat alsdann zunächst:

$$(3) \qquad A_\nu' = A_\nu, \quad B_\nu' = B_\nu \quad \text{für: } \nu = 0, 1, \cdots, m-1$$

Dagegen wird.

$$A_m' = cb_m A_{m-1} + ca_m A_{m-2} = cA_m$$
$$B_m' = cb_m B_{m-1} + ca_m B_{m-2} = cB_m$$

und analog:

$$A_{m+1}' = cA_{m+1}, \quad B_{m+1}' = cB_{m+1},$$

schließlich allgemein:

$$(4) \qquad A_\nu' = cA_\nu, \quad B_\nu' = cB_\nu \text{ für: } \nu = m, m+1, \cdots n,$$

wie sich durch vollständige Induktion leicht bestätigen läßt.

Hiernach ist jeder Näherungsbruch $\frac{A_\nu'}{B_\nu'}$ *gleichwertig* mit dem entsprechenden $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ bzw. *gleichzeitig* mit dem letzteren *sinnlos*.

Wir verallgemeinern nun die vorstehende Betrachtung in der Weise, daß wir ein analoges Multiplikationsverfahren auf *jeden* Teilbruch des Kettenbruches (K_n) anwenden. Es seien also $c_1, c_2, \cdots c_n$ beliebige von Null verschiedene Zahlen, und es werde jetzt gesetzt:

$$(5) \quad (K_n') \equiv b_0 + \frac{c_1 a_1|}{|c_1 b_1} + \frac{c_1 c_2 a_2|}{|c_2 b_2} + \cdots + \frac{c_{\nu-1} c_\nu a_\nu|}{|c_\nu b_\nu} + \cdots + \frac{c_{n-1} c_n b_n|}{|c_n b_n}.$$

Für die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche dieses Kettenbruches ergeben sich sodann die Beziehungen:

$$(6_0) \qquad A_0' = A_0, \qquad B_0' = B_0$$
$$(6_1) \qquad A_1' = c_1 A_1, \qquad B_1' = c_1 B_1$$
$$(6_2) \qquad A_2' = c_1 c_2 A_2, \quad B_2' = c_1 c_2 B_2$$

und schließlich allgemein:

$$(6) \qquad A_\nu' = c_1 c_2 \cdots c_\nu A_\nu, \quad B_\nu' = c_1 c_2 \cdots c_\nu B_\nu \quad (\nu = 1, 2, \cdots n),$$

wie wiederum mit Hilfe der Rekursionsformeln für die A_ν', B_ν' durch vollständige Induktion leicht bestätigt wird.

Daraus folgt auch wieder, daß jeder der Näherungsbrüche $\frac{A_\nu'}{B_\nu'}$ $(\nu = 0, 1, \cdots n)$ mit dem entsprechenden $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ *gleichwertig* bzw. *gleichzeitig* mit dem letzteren *sinnlos* ist.

Man bezeichnet zwei n-gliedrige Kettenbrüche $\left(K_n^{(1)}\right)$, $\left(K_n^{(2)}\right)$ als *äquivalent*, wenn für die Zähler und Nenner ihrer Näherungsbrüche durchweg Beziehungen von der Form bestehen:

$$(7)\quad A_\nu^{(2)} = C_\nu \cdot A_\nu^{(1)}, \quad B_\nu^{(2)} = C_\nu \cdot B_\nu^{(1)} \quad (\nu = 0, 1, \cdots n;\ |C_\nu| > 0)^{1)},$$

sodaß also entsprechende Näherungsbrüche *gleichwertig* oder *gleichzeitig sinnlos* ausfallen. Wir wollen eine derartige Beziehung zweier Kettenbrüche $\left(K_n^{(1)}\right)$ und $\left(K_n^{(2)}\right)$ durch die Schreibweise kennzeichnen[2]):

$$(8)\qquad \left(K_n^{(2)}\right) \simeq \left(K_n^{(1)}\right) \quad \left(\text{spr. } \left(K_n^{(2)}\right) \textit{ äquivalent } \left(K_n^{(1)}\right)\right)$$

oder auch:

$$(9)\qquad \frac{A_\nu^{(2)}}{B_\nu^{(2)}} \simeq \frac{A_\nu^{(1)}}{B_\nu^{(1)}} \quad (\nu = 0, 1, \cdots n).$$

Auf Grund der obigen Definition sind also die in Gl. (1) und (5) mit (K_n) und (K_n') bezeichneten Kettenbrüche äquivalent. Da sich (K_n') in die Form $b_0 + \left[\frac{c_{\nu-1}\, c_\nu\, a_\nu}{c_\nu b_\nu}\right]_1^n$ setzen läßt, wenn man c_0 die Bedeutung von 1 beilegt, so besteht also die Beziehung:

$$(10)\qquad b_0 + \left[\frac{c_{\nu-1}\, c_\nu\, a_\nu}{c_\nu b_\nu}\right]_1^n \simeq b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n,$$

---

1) Dabei ist offenbar, wegen.

$$B_0^{(2)} = B_0^{(1)} = 1,$$

in jedem Falle:

$$C_0 = 1$$

zu setzen.

2) Es erschien notwendig, für die „Äquivalenz" zweier Kettenbrüche statt der von anderen Mathematikern hierfür gelegentlich gebrauchten Bezeichnungen $\equiv$ oder $\sim$ zur Vermeidung von Verwechslungen ein *neues* Zeichen einzuführen, da wir ja das Zeichen $\equiv$ als *Identitäts*zeichen (§ 91, Nr. 1, Gl. (1), S. 696), das Zeichen $\sim$ zur Charakterisierung der *infinitären Ähnlichkeit* (§ 37, Nr. 6, Gl. (43a), S. 237) eingeführt haben.

Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, daß die beiden Seiten einer Beziehung von der Form (8) oder (9) *vertauschbar* sind und daß ferner aus den Voraussetzungen

$$\left(K_n^{(1)}\right) \simeq \left(K_n^{(2)}\right), \quad \left(K_n^{(2)}\right) \simeq \left(K_n^{(3)}\right)$$

stets folgt:

$$\left(K_n^{(1)}\right) \simeq \left(K_n^{(3)}\right).$$

sofern $c_1, c_2, \cdots c_n$ *ganz beliebige von Null verschiedene Zahlen* bedeuten, während $c_0 = 1$ zu setzen ist[1])

2 Es verdient bemerkt zu werden, daß der Inhalt der Beziehung (10) *umkehrbar* ist, sofern nur noch die Beschränkung $|a_\nu| > 0$ $(\nu = 1, 2, \cdots n)$ hinzugefügt wird, d. h. *jeder* mit $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$ *äquivalente* Kettenbruch ist dann in der Form enthalten: $b_0 + \left[\frac{c_{\nu-1} c_\nu a_\nu}{c_\nu b_\nu}\right]_1^n$ (wo: $c_0 = 1$, im übrigen: $|c_\nu| > 0$).

Dem Beweise schicken wir den folgenden *Hilfssatz* voran, der sich auch späterhin noch als nützlich erweisen wird:

Es gibt stets **einen** *und* **nur** *einen Kettenbruch* $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$, *dessen Näherungsbrüche* $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ *für* $\nu = 0, 1, \cdots n$ **identisch** *sind mit beliebig vorgeschriebenen (eventuell auch teilweise sinnlosen) Bruchsymbolen* $\frac{\mathfrak{A}_0}{1}$, $\frac{\mathfrak{A}_\nu}{\mathfrak{B}_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \cdots n)$, *sofern die Zahlen* $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ *der Bedingung genügen.*

$$|\mathfrak{A}_\nu \mathfrak{B}_{\nu-1} - \mathfrak{A}_{\nu-1} \mathfrak{B}_\nu| > 0 \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n).\text{[2]} \tag{11}$$

Beweis: Um zunächst die Forderungen $\frac{A_0}{B_0} \equiv \frac{\mathfrak{A}_0}{1}$, $\frac{A_1}{B_1} \equiv \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}_1}$ zu befriedigen, hat man zu setzen:

$$b_0 = \mathfrak{A}_0 \tag{12_0}$$

und sodann (wegen: $A_1 = b_0 b_1 + a_1$, $B_1 = b_1$):

$$\begin{cases} a_1 = \mathfrak{A}_1 - b_0 b_1, \quad b_1 = \mathfrak{B}_1 \\ \quad = \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_0 \mathfrak{B}_1. \end{cases} \tag{12_1}$$

---

1) Die linke Seite der Beziehung (10) läßt sich, wenn c_0, wie die übrigen c_ν, nur der Bedingung: $|c_0| > 0$ unterworfen wird, auch folgendermaßen schreiben

$$b_0 + \frac{1}{c_0} \cdot \left[\frac{c_{\nu-1} c_\nu a_\nu}{c_\nu b_\nu}\right]_1^n$$

oder auch ganz ohne Benützung von c_0 nach § 88, Nr. 3, Gl. (10a), S. 674, in der Form:

$$b_0 + \left[\frac{c_1 a_1}{c_1 b_1}, \frac{c_{\nu-1} c_\nu a_\nu}{c_\nu b_\nu}\right]_2^n.$$

2) Danach hat man also stets: $\frac{\mathfrak{A}_{\nu-1}}{\mathfrak{B}_{\nu-1}} \neq \frac{\mathfrak{A}_\nu}{\mathfrak{B}_\nu}$, und zwar in dem Sinne, daß zwei *konsekutive* dieser Bruchsymbole weder *gleichwertig* noch *gleichzeitig sinnlos* sein sollen.

Angenommen nun, man habe für irgendein $\nu \geqq 2$:

(13) $A_{\nu-2} = \mathfrak{A}_{\nu-2}$, $A_{\nu-1} = \mathfrak{A}_{\nu-1}$ und: $B_{\nu-2} = \mathfrak{B}_{\nu-2}$, $B_{\nu-1} = \mathfrak{B}_{\nu-1}$,

so folgt:

(14) $$A_\nu = \mathfrak{A}_\nu, \quad B_\nu = \mathfrak{B}_\nu$$

dann und *nur* dann, wenn a_ν und b_ν den Bedingungen genügen:

$$b_\nu \mathfrak{A}_{\nu-1} + a_\nu \mathfrak{A}_{\nu-2} = \mathfrak{A}_\nu, \quad b_\nu \mathfrak{B}_{\nu-1} + a_\nu \mathfrak{B}_{\nu-2} = \mathfrak{B}_\nu,$$

d. h. wenn gesetzt wird:

(12) $$a_\nu = -\frac{\mathfrak{A}_\nu \mathfrak{B}_{\nu-1} - \mathfrak{A}_{\nu-1}\mathfrak{B}_\nu{}^{1)}}{\mathfrak{A}_{\nu-1}\mathfrak{B}_{\nu-2} - \mathfrak{A}_{\nu-2}\mathfrak{B}_{\nu-1}}, \quad b_\nu = \frac{\mathfrak{A}_\nu \mathfrak{B}_{\nu-2} - \mathfrak{A}_{\nu-2}\mathfrak{B}_\nu}{\mathfrak{A}_{\nu-1}\mathfrak{B}_{\nu-2} - \mathfrak{A}_{\nu-2}\mathfrak{B}_{\nu-1}}$$
$$(\nu \geqq 2).$$

Da diese Ausdrücke auf Grund der Voraussetzung (11) eindeutig bestimmte Zahlen vorstellen und andererseits die Gültigkeit der Bedingungen (13) für $\nu = 2$ bereits feststeht, so ergibt sich zunächst die Richtigkeit der Beziehungen (14) für $\nu = 2$, falls a_ν, b_ν gemäß den Gleichungen (12) bestimmt werden, und sodann durch vollständige Induktion in entsprechender Weise für jedes weitere $\nu \leqq n$.

Somit genügt der durch Gl. (12_0), (12_1), (12) definierte Kettenbruch $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$ den verlangten Bedingungen, und er ist der einzige dieser Art.

3. Es werde jetzt angenommen, man habe:

(15) $$b_0' + \left[\frac{a_\nu'}{b_\nu'}\right]_1^n \simeq b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n \text{ und } |a_\nu| > 0 \text{ für } \nu = 1, 2, \cdots, n.$$

Bezeichnet man wieder mit $\frac{A_\nu'}{B_\nu'}$ bzw. $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ $(\nu = 0, 1, \cdots, n)$ die Näherungsbrüche dieser Kettenbrüche, so folgt aus den Formeln (12), daß:

(16) $$a_\nu' = -\frac{A_\nu' B_{\nu-1}' - A_{\nu-1}' B_\nu'}{A_{\nu-1}' B_{\nu-2}' - A_{\nu-2}' B_{\nu-1}'}, \quad b_\nu' = \frac{A_\nu' B_{\nu-2}' - A_{\nu-2}' B_\nu'}{A_{\nu-1}' B_{\nu-2}' - A_{\nu-2}' B_{\nu-1}'}$$

(17) $$a_\nu = -\frac{A_\nu B_{\nu-1} - A_{\nu-1} B_\nu}{A_{\nu-1} B_{\nu-2} - A_{\nu-2} B_{\nu-1}}, \quad b_\nu = \frac{A_\nu B_{\nu-2} - A_{\nu-2} B_\nu}{A_{\nu-1} B_{\nu-2} - A_{\nu-2} B_{\nu-1}}$$

für $\nu \geqq 2$.

Infolge der Äquivalenz (15) müssen nach Gl. (7) für $\nu = 0, 1, \cdots, n$ Beziehungen von der Form bestehen:

(18) $A_\nu' = C_\nu A_\nu$, $B_\nu' = C_\nu B_\nu$ (wo: $C_0 = 1$, im übrigen $|C_\nu| > 0$),

1) Man bemerke, daß diese Beziehung, sobald man die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ durch A, B ersetzt, keine andere ist als die in § 92, Nr. 2, S. 696, als Gl. (4) in der Form angeschriebene:
$$\Delta_\nu = -a_\nu \Delta_{\nu-1}.$$

sodaß sich durch Einsetzen dieser Werte in die Ausdrücke (16) und Vergleichung mit den entsprechenden Ausdrücken (17) ergibt:

$$a_\nu' = \frac{C_\nu}{C_{\nu-2}} \cdot a_\nu, \quad b_\nu' = \frac{C_\nu}{C_{\nu-1}} \cdot b_\nu \quad (\nu \geqq 2),$$

anders geschrieben:

$$(19) \qquad a_\nu' = c_{\nu-1} c_\nu a_\nu, \quad b_\nu' = c_\nu b_\nu \quad (\nu \geqq 2),$$

wenn für $\nu \geqq 2$ gesetzt wird:

$$(20) \qquad \frac{C_{\nu-1}}{C_{\nu-2}} = c_{\nu-1}, \text{ also speziell: } C_1 = c_1.$$

Da überdies aus (15) folgt:

$$A_0' = A_0, \quad B_0' = B_0,$$

d. h.

$$(19_0) \qquad b_0' = b_0,$$

und sodann:

$$A_1' = c_1 A_1, \quad B_1' = c_1 B_1,$$

d. h.

$$(19_1) \qquad \begin{cases} b_1' b_0' + a_1' = c_1 b_1 b_0 + c_1 a_1, \quad b_1' = c_1 b_1, \\ \text{also:} \quad a_1' = c_1 a_1, \end{cases}$$

so erkennt man schließlich, daß, wie oben behauptet, in jedem Falle:

$$(21) \qquad b_0' + \left[\frac{a_\nu'}{b_\nu'}\right]_1^n \equiv b_0 + \left[\frac{c_1 a_1}{c_1 b_1}, \quad \frac{c_{\nu-1} c_\nu a_\nu}{c_\nu b_\nu}\right]_2^n$$

sein muß.

Durch Zusammenfassung des vorstehenden Resultates mit demjenigen von Nr. 1 ergibt sich also (mit Rücksicht auf die Willkürlichkeit der Zahlen $c_1, c_2, \cdots, c_n$):

Zu jedem Kettenbruche $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$ *gibt es unendlich viele ihm äquivalente, nämlich alle von der Form:* $b_0 + \left[\frac{c_{\nu-1} c_\nu a_\nu}{c_\nu b_\nu}\right]_1^n$ *(wo* $c_0 = 1$*), und zwar, falls durchweg* $|a_\nu| > 0$, *nur diese.*[1])

---

1) Ist etwa $a_m = 0$ und m der kleinste Index, für welchen dieser Fall eintritt, so wird ja nach § 92, Nr. 2, Gl. (VI), S. 696:

$$A_\nu B_{\nu-1} - A_{\nu-1} B_\nu = 0$$

für jedes $\nu \geqq m$ und somit die Darstellung der a_ν durch Gl. (17) für $\nu \geqq m+1$ *sinnlos*. In der Tat wird ja in diesem Falle nach § 93, Nr. 2 am Schlusse, S. 703, für $\nu \geqq m$ *jeder* nicht sinnlose Näherungsbruch $\frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}$, sodaß also die besonderen Werte der Teilzähler für $\nu > m$ und der Teilnenner für $\nu \geqq m$, soweit sie nicht *sinnlose* Näherungsbrüche liefern, auf deren *Wert* keinerlei Einfluß üben.

4 Da es bei den Anwendungen der Kettenbrüche im allgemeinen *nicht* auf die besondere *Form* der Näherungsbrüche, sondern nur auf deren *Wert* ankommt, so pflegt man jede Menge von *äquivalenten* Kettenbrüchen als *verschiedene Formen* jedes einzelnen anzusehen, und man bedient sich auf Grund dieser Auffassung der Ausdrucksweise, es werde ein Kettenbruch durch *Äquivalenz-Transformation* in einen anderen (nur formal verschiedenen) übergeführt.

Unter den verschiedenen Formen, deren ein Kettenbruch in dem obigen Sinne fähig ist, wollen wir zwei als besonders nützlich und wichtig hervorheben und als *erste* und *zweite Hauptform* bezeichnen, nämlich diejenigen, bei welchen sämtliche *Teilzähler* bzw. sämtliche *Teilnenner* den Wert 1 haben

Um einen Kettenbruch durch Äquivalenz-Transformation auf die *erste* Hauptform zu bringen, etwa:

$$(22)\qquad b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n \simeq b_0 + \left[\frac{1}{b'_\nu}\right]_1^n,$$

was offenbar nur möglich ist, wenn durchweg $|a_\nu| > 0$, hat man lediglich die oben mit c_ν $(\nu = 1, 2, \cdots, n)$ bezeichneten Hilfsfaktoren so zu bestimmen, daß:

$$c_1 a_1 = 1, \quad c_1 c_2 a_2 = 1, \quad c_2 c_3 a_3 = 1, \cdots, \quad c_{\nu-1} c_\nu a_\nu = 1 \quad (\nu = 2, 3, \cdots n)$$

und findet daher zunächst:

$$c_1 = \frac{1}{a_1}, \quad c_2 = \frac{1}{c_1 a_2} = \frac{a_1}{a_2}, \quad c_3 = \frac{1}{c_2 a_3} = \frac{a_2}{a_1 a_3}$$

und allgemein:

$$c_{2\mu} = \frac{a_1 a_3 \cdots a_{2\mu-1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2\mu}}, \quad c_{2\mu+1} = \frac{a_2 a_4 \cdots a_{2\mu}}{a_1 a_3 \cdots a_{2\mu-1} a_{2\mu+1}} \quad (\mu = 1, 2, 3 \cdots),$$

sodaß sich für die Teilnenner b'_ν jener *ersten Hauptform* die Ausdrücke ergeben:

$$(23)\qquad \begin{cases} b'_1 = \dfrac{1}{a_1} \cdot b_1 \quad \text{und:} \quad b'_{2\mu} = \dfrac{a_1 a_3 \cdots a_{2\mu-1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2\mu}} \cdot b_{2\mu} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad b'_{2\mu+1} = \dfrac{a_2 a_4 \cdots a_{2\mu}}{a_1 a_3 \cdots a_{2\mu-1} a_{2\mu+1}} \cdot b_{2\mu+1}. \end{cases}$$ [1]

---

1) Eine verwandte, gelegentlich mit Vorteil benützte Spezialform von im übrigen wesentlich geringerer Bedeutung gewinnt man, indem man sämtlichen Teilzählern den Wert -1 gibt, sodaß also etwa:

$$b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n \simeq b_0 + \left[-\frac{1}{b''_\nu}\right]_1^n.$$

Man findet alsdann ganz analog wie im Texte bei der Herstellung der ersten Hauptform:

Einfacher gestalten sich die entsprechenden Formeln für die Transformation eines Kettenbruches in die *zweite Hauptform*, etwa:

$$b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n \simeq b_0 + \left[\frac{a'_\nu}{1}\right]_1^n, \tag{24}$$

welche im übrigen nur anwendbar ist, wenn durchweg $|b_\nu| > 0$. Zur Bestimmung der c_ν dient in diesem Falle die Beziehung:

$$c_\nu b_\nu = 1, \text{ also: } c_\nu = \frac{1}{b_\nu} \ (\nu = 1, 2, \cdots n),$$

sodaß sich ergibt:

$$a'_1 = \frac{a_1}{b_1} \text{ und für } \nu \geqq 2: \ a'_\nu = \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}. \tag{25}$$

Außer zur Herstellung der ersten oder zweiten Hauptform eines Kettenbruches kann die Äquivalenz-Transformation zuweilen sich vorteilhaft erweisen, um einen Kettenbruch in einen formal einfacheren überzuführen. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn die einzelnen Teilzähler und Teilnenner zunächst selbst in Bruchform erscheinen. Man findet auf diese Weise:

$$b_0 + \left[\frac{\frac{a_\nu}{a'_\nu}}{\frac{b_\nu}{a'_\nu}}\right]_1^n \simeq b_0 + \left[\frac{a_1}{b_1}, \ \frac{a'_{\nu-1} a_\nu}{b_\nu}\right]_2^n \tag{26}$$

und noch allgemeiner:

$$b_0 + \left[\frac{\frac{a_\nu}{a'_\nu}}{\frac{b_\nu}{b'_\nu}}\right]_1^n \simeq b_0 + \left[\frac{b'_1 a_1}{a'_1 b_1}, \ \frac{a'_{\nu-1} b'_{\nu-1} b'_\nu a_\nu}{a'_\nu b_\nu}\right]_2^n. \tag{27}$$

Schließlich sei noch bemerkt, daß man bei einem Kettenbruche von der Form: $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$, wo die a_ν, b_ν *beliebige reelle* Zahlen bedeuten, durch eine sehr einfache Äquivalenz-Transformation alle etwaigen *negativen* Teilnenner in *positive* verwandeln, ihn also auf die Form bringen kann: $\left[\frac{\varepsilon_\nu a_\nu}{|b_\nu|}\right]_1^n$, wo $\varepsilon_\nu = \pm 1$. Man hat zu diesem Zwecke nur zu setzen: $c_\nu = \frac{|b_\nu|}{b_\nu}$.

$$b''_\nu = (-1)^\nu \cdot b'_\nu \ (\nu = 1, 2, \cdots n),$$

wo b'_ν die in den Formeln (23) angegebene Bedeutung hat.

Der fraglichen Kettenbruchform, die bisher in wenig charakteristischer und leicht mißverständlicher Weise als *reduzierte Form* bezeichnet wurde, könnte im Rahmen der hier gewählten Terminologie (bei der ja über die Bedeutung des Ausdruckes „*reduzierte Form*" eines Kettenbruches bereits anderweitig verfügt wurde) etwa die Bezeichnung *negative erste Hauptform* beigelegt werden.

§ 95. Transformation eines Kettenbruches in eine äquivalente Summe bzw. ein äquivalentes Produkt und umgekehrt.

1. Angenommen, die Näherungsbrüche des Kettenbruches $(K_n) \equiv b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$ haben für $n \geqq m$ (wo $m \geqq 0$) bestimmte Werte (also $|B_n| > 0$ für $n \geqq m$), so findet man mit Hilfe der Identität[1]):

$$K_n = K_m + \sum_{m+1}^{n} \nu\, (K_\nu - K_{\nu-1})$$

und der Differenzenformel (VII) von § 92, Nr. 2, S. 697:

$$(1) \qquad \frac{A_n}{B_n} = \frac{A_m}{B_m} + \sum_{m+1}^{n} \nu\, (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{a_1 a_2 \cdots a_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu},$$

also insbesondere, wenn die fragliche Näherungsbruch-Eigenschaft schon für $m = 0$ besteht:

$$(2) \qquad \frac{A_n}{B_n} = \frac{A_0}{B_0} + \sum_{1}^{n} \nu\, (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{a_1 a_2 \cdots a_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu}$$

$$= b_0 + \frac{a_1}{B_1} - \frac{a_1 a_2}{B_1 B_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{B_2 B_3} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{B_{n-1} B_n}$$

Es erscheint auf diese Weise der Wert des Kettenbruches dargestellt durch eine *Summe* gewöhnlicher Brüche. Diese letztere kann aber geradezu als *äquivalent* mit jenem Kettenbruche angesehen werden, in Zeichen:

$$(3) \qquad b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n \simeq \frac{A_0}{B_0} + \sum_{1}^{n} \nu\, (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{a_1 a_2 \cdots a_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu},$$

in dem Sinne, daß auch jede durch Abbrechen bei irgendeinem Index $\nu = m < n$ entstehende *Teilsumme*, wie aus der Art der Herleitung unmittelbar hervorgeht, denselben Wert liefert wie der entsprechende Näherungsbruch $\frac{A_m}{B_m}$.

Ist durchweg $|a_\nu| > 0$ $(\nu = 1, 2, \cdots n)$, so sind alle Glieder der Reihe (2) bzw. (3) *von Null verschieden.* Ist dagegen $a_{m+1} = 0$ und m der kleinste Index, für welchen dieser Fall eintritt, so bricht die Summe mit dem Gliede $(-1)^{m-1} \cdot \frac{a_1 a_2 \cdots a_m}{B_{m-1} B_m}$ ab, in Übereinstimmung mit der früher (§ 93, Nr. 2, Gl. (7), S. 703) bereits festgestellten Tatsache, daß in diesem Falle durchweg: $\frac{A_{m+\varrho}}{B_{m+\varrho}} = \frac{A_m}{B_m}$ $(\varrho = 1, 2, \cdots n - m)$.

1) Vgl. § 88, Nr. 1, Fußnote 1, S. 668

2. Das Ergebnis der vorigen Nummer ist auch *umkehrbar*, d. h. zu jeder beliebig vorgelegten *Summe* läßt sich auch ein (in dem oben angegebenen Sinne) ihr *äquivalenter Kettenbruch* herstellen.

Versteht man unter $K_0, K_1, \cdots K_n$ beliebig gegebene Zahlen, welche nur der einzigen Beschränkung: $K_{\nu-1} \neq K_\nu$ $(\nu = 1, 2, \cdots n)$ unterliegen, so liefert der in Nr. 2 des vorigen Paragraphen bewiesene Hilfssatz sofort das Mittel, *einen* Kettenbruch $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$ herzustellen, dessen Näherungsbrüche die Werte $K_0, K_1, \cdots, K_n$ haben, nämlich denjenigen, dessen Näherungsbrüche *identisch* sind mit den Bruchsymbolen $\frac{K_\nu}{1}$ $(\nu = 0, 1, \cdots, n)$. Man hat danach in den Formeln (12_0), (12_1), (12) des vorigen Paragraphen (S. 707/8) nur zu setzen:

$$\mathfrak{A}_\nu = K_\nu, \quad \mathfrak{B}_\nu = 1 \quad (\nu = 0, 1, \cdots n)$$

und findet auf diese Weise:

$$(4) \quad \begin{cases} & b_0 = K_0 \\ a_1 = K_1 - K_0, & b_1 = 1 \\ a_\nu = -\dfrac{K_\nu - K_{\nu-1}}{K_{\nu-1} - K_{\nu-2}} & b_\nu = \dfrac{K_\nu - K_{\nu-2}}{K_{\nu-1} - K_{\nu-2}} \quad (\nu = 2, 3, \cdots, n).^{1)} \end{cases}$$

Ist nun eine Summe: $\sum_0^n k_\nu$ mit beliebigen, für $\nu \geqq 1$ von Null verschiedenen Gliedern gegeben und setzt man:

$$k_0 + k_1 + \cdots + k_\nu = K_\nu \quad (\nu = 0, 1, \cdots, n),$$

so folgt:

$$K_\nu - K_{\nu-1} = k_\nu, \quad K_\nu - K_{\nu-2} = k_{\nu-1} + k_\nu, \quad K_{\nu-1} - K_{\nu-2} = k_{\nu-1}$$

und daher für $1 < m \leqq n$:

$$\sum_0^m k_\nu \simeq k_0 + \frac{k_1|}{|1} - \frac{\frac{k_2}{k_1}\Big|}{\Big|1 + \frac{k_2}{k_1}} - \cdots - \frac{\frac{k_m}{k_{m-1}}\Big|}{\Big|1 + \frac{k_m}{k_{m-1}}},$$

also insbesondere:

$$(5) \qquad \sum_0^n k_\nu \simeq k_0 + \frac{k_1|}{|1} - \frac{\frac{k_2}{k_1}\Big|}{\Big|1 + \frac{k_2}{k_1}} - \cdots - \frac{\frac{k_n}{k_{n-1}}\Big|}{\Big|1 + \frac{k_n}{k_{n-1}}}$$

---

1) Man hat also für $\nu \geqq 2$:
$$b_\nu = 1 - a_\nu.$$

oder auch, wenn man mit Benützung der Formel (26) des vorigen Paragraphen die Nenner der als Teilzähler und in den Teilnennern auftretenden Brüche fortschafft:

$$(6)\ \sum_0^n {}_\nu k_\nu \simeq k_0 + \frac{k_1|}{|1} - \frac{k_2\ |}{|k_1+k_2} - \frac{k_1 k_3\ |}{|k_2+k_3} - \cdots - \frac{k_{\nu-2}k_\nu\ |}{|k_{\nu-1}+k_\nu} - \cdots - \frac{k_{n-2}k_n\ |}{|k_{n-1}+k_n}.$$

Man kann dieser wichtigen Beziehung noch verschiedene andere zuweilen nützliche Formen geben. Setzt man in der Formel (5): $k_\nu = \frac{1}{C_\nu}$, so geht sie zunächst in die folgende über:

$$\sum_0^n {}_\nu \frac{1}{C_\nu} \simeq \frac{1}{C_0} + \frac{\frac{1}{C_1}\Big|}{|1} - \frac{\frac{C_1}{C_2}\ \Big|}{\Big|1+\frac{C_1}{C_2}} - \cdots - \frac{\frac{C_{n-1}}{C_n}\ \Big|}{\Big|1+\frac{C_{n-1}}{C_n}},$$

und hieraus ergibt sich durch Fortschaffung der Nenner innerhalb der einzelnen Teilbrüche:

$$(7)\ \sum_0^n {}_\nu \frac{1}{C_\nu} \simeq \frac{1}{C_0} + \frac{1|}{|C_1} - \frac{C_1^2\ |}{|C_1+C_2} - \cdots - \frac{C_{\nu-1}^2\ |}{|C_{\nu-1}+C_\nu} - \cdots - \frac{C_{n-1}^2\ |}{|C_{n-1}+C_n}.$$

Setzt man in Formel (5): $k_0 = 1$ und für $\nu \geqq 1$: $k_\nu = h_1 \cdots h_\nu$, also: $h_\nu = \frac{k_\nu}{k_{\nu-1}}$ $(\nu \geqq 1)$, so ergibt sich:

$$(8\text{a})\qquad 1 + \sum_1^n {}_\nu h_1 \cdots h_\nu \simeq 1 + \frac{h_1|}{|1} - \frac{h_2\ |}{|1+h_2} - \cdots - \frac{h_n\ |}{|1+h_n}.$$

Die beiden Anfangsglieder dieses Kettenbruches gestatten noch eine merkwürdige Umformung.

Läßt man nämlich auf beiden Seiten der Gleichung (5) das Glied k_0 fort und ersetzt n durch $n+1$, so wird zunächst:

$$\sum_0^n {}_\nu k_{\nu+1} \simeq \frac{k_1|}{|1} - \frac{\frac{k_2}{k_1}\ \Big|}{\Big|1+\frac{k_2}{k_1}} - \frac{\frac{k_3}{k_2}\ \Big|}{\Big|1+\frac{k_3}{k_2}} - \cdots - \frac{\frac{k_{n+1}}{k_n}\ \Big|}{\Big|1+\frac{k_{n+1}}{k_n}}.$$

Setzt man sodann:

$$k_1 = 1 \text{ und für } \nu \geqq 1:\ k_{\nu+1} = h_1 \cdots h_\nu,$$

so ergibt sich:

$$(8\text{b})\qquad 1 + \sum_1^n {}_\nu h_1 \cdots h_\nu \simeq \frac{1|}{|1} - \frac{h_1\ |}{|1+h_1} - \frac{h_2\ |}{|1+h_2} - \cdots - \frac{h_n\ |}{|1+h_n},$$

also für die auch in der Formel (8a) auftretende Summe ein äquivalenter Kettenbruch, der erst vom dritten Gliede ab mit jenem früheren übereinstimmt.[1])

3. Um zu einem gegebenen Kettenbruche (K_n) ein ihm *äquivalentes Produkt* herzustellen, hat man von der Identität auszugehen:

$$K_n = K_0 \cdot \prod_1^n {}^{\nu} \frac{K_\nu}{K_{\nu-1}}, \tag{9}$$

für deren Gültigkeit nur erforderlich ist, daß sämtliche K_ν bestimmte Zahlen vorstellen und — allenfalls mit Ausnahme von K_n — *von Null verschieden* sind. Da sodann:

$$K_0 = b_0$$

und für $\nu \geqq 1$:

$$\frac{K_\nu}{K_{\nu-1}} = \frac{A_\nu B_{\nu-1}}{A_{\nu-1} B_\nu} = 1 + \frac{A_\nu B_{\nu-1} - A_{\nu-1} B_\nu}{A_{\nu-1} B_\nu}$$
$$= 1 + (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{a_1 a_2 \cdots a_\nu}{A_{\nu-1} B_\nu},$$

so geht die Beziehung (9) in die folgende über:

$$\frac{A_n}{B_n} = b_0 \cdot \prod_1^n {}^{\nu} \left(1 + (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{a_1 a_2 \cdots a_\nu}{A_{\nu-1} B_\nu}\right), \tag{10}$$

und da deren Gültigkeit erhalten bleibt, wenn man n durch jede kleinere natürliche Zahl ersetzt, so findet man:

$$b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n \simeq b_0 \cdot \prod_1^n {}^{\nu} \left(1 + (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{a_1 a_2 \cdots a_\nu}{A_{\nu-1} B_\nu}\right). \tag{11}$$

Ist umgekehrt ein *Produkt* von der Form: $\prod_0^n {}^{\nu} (1 + k_\nu)$ vorgelegt, dessen Faktoren — allenfalls mit Ausnahme des *letzten* — *von* 0 *verschieden* und — allenfalls mit Ausnahme des *ersten* — auch *von* 1 *verschieden* sind, und handelt es sich jetzt darum, einen mit diesem Produkte *äquivalenten Kettenbruch* herzustellen, so hat man zu setzen:

$$(1 + k_0)(1 + k_1) \cdots (1 + k_\nu) = K_\nu \quad (\nu = 0, 1, \cdots, n), \tag{12}$$

wo infolge der gemachten Einschränkungen:

$$\left.\begin{aligned} K_\nu &\neq 0 \\ K_\nu &\neq K_{\nu+1} \end{aligned}\right\} (\nu = 0, 1, \cdots n - 1).$$

---

1) Es beruht dies schließlich auf der unmittelbar zu verifizierenden Identität:

$$1 + \frac{h_1}{1+K} = \frac{1}{1 - \dfrac{h_1}{1 + h_1 + K}}.$$

Um sodann einen Kettenbruch: $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$ herzustellen, dessen Näherungsbrüche die Form $\frac{K_\nu}{1}$ $(\nu = 0, 1, \cdots, n)$ haben, kann man entweder die a_ν, b_ν wieder mit Hilfe der Formeln (4) bestimmen oder etwas schneller zum Ziele gelangen, indem man, von der Umformung eines *Produktes* in eine *Summe* ausgehend, nämlich (s. § 85, Nr 1, S. 646, Gl. (5)):

$$(13)\qquad K_n = 1 + k_0 + \sum_1^n{}_\nu K_{\nu-1} k_\nu$$

auf diese Summe das in der vorigen Nummer gewonnene Ergebnis anwendet. Man findet auf diese Weise mit Benützung der Äquivalenzformel (5):

$$(14)\qquad \prod_0^n{}_\nu (1 + k_\nu) \simeq 1 + k_0 + \frac{c_1|}{|1} - \frac{c_2|}{|1 + c_2} - \cdots - \frac{c_\nu|}{|1 + c_\nu} - \cdots - \frac{c_n|}{|1 + c_n},$$

wo:

$$(14\text{a})\qquad c_1 = (1 + k_0)k_1 \text{ und für } \nu \geqq 2:\ c_\nu = (1 + k_{\nu-1}) \cdot \frac{k_\nu}{k_{\nu-1}}.$$

§ 96. Kontraktion und Extension eines Kettenbruches.

1. Der Hilfssatz von § 94, Nr. 2, S. 707, kann auch dazu dienen, um aus einem n-gliedrigen Kettenbruche $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$, dessen Teilzähler a_ν von Null verschieden sind und dem ein bestimmter Wert zukommt, einen anderen mit *geringerer* Gliederzahl m, etwa $b_0' + \left[\frac{a_\nu'}{b_\nu'}\right]_1^m$ herzuleiten, der nicht nur den gleichen Wert besitzt, sondern dessen sämtliche Näherungsbrüche $\frac{A_\nu'}{B_\nu'}$ $(\nu = 0, 1, \cdots m)$ mit einer (bis auf gewisse Einschränkungen) *beliebig herausgehobenen Folge* von $m + 1$ Näherungsbrüchen $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ jenes n-gliedrigen Kettenbruches der Reihe nach übereinstimmen.

Es werde mit $p_0, p_1, \cdots p_m$ eine Folge wachsender ganzer Zahlen bezeichnet, und zwar sei $p_m = n$. Alsdann bedeuten die Ausdrücke $\frac{A_{p_0}}{B_{p_0}}, \frac{A_{p_1}}{B_{p_1}}, \cdots, \frac{A_{p_m}}{B_{p_m}}$ eine Folge von $m + 1$ (mit $\frac{A_n}{B_n}$ schließenden) Näherungsbrüchen, welche nur den Bedingungen genügen sollen:

$$(1)\qquad |B_{p_0}| > 0,\ \frac{A_{p_{\nu-1}}}{B_{p_{\nu-1}}} \neq \frac{A_{p_\nu}}{B_{p_\nu}}\ (\nu = 1, 2, \cdots, m).^{1)}$$

1) D. h. wieder (vgl. S. 707, Fußnote 2): zwei solche Bruchsymbole sollen weder *gleichwertig* noch *gleichzeitig sinnlos* sein, sodaß also mit Rücksicht auf die Voraussetzung $|a_\nu| > 0$ und den Inhalt von § 93, Nr. 3, III, S. 704, durchweg:

$$|A_{p_\nu} B_{p_{\nu-1}} - A_{p_{\nu-1}} B_{p_\nu}| > 0.$$

Die oben gestellte Aufgabe ist dann offenbar gelöst, wenn man setzt:

$$(2_0)\qquad b_0' = \frac{A_{p_0}}{B_{p_0}}$$

und im übrigen die a_ν', b_ν' $(\nu = 1, 2, \cdots, m)$ so bestimmt, daß:

$$\frac{A_\nu'}{B_\nu'} \equiv \frac{A_{p_\nu}}{B_{p_\nu}} \quad (\nu = 1, 2, \cdots, m).$$

Mit Benützung des oben erwähnten Hilfssatzes (S. 707, Gl. (12_1) und (12)) ergibt sich also:

$$(2_1)\qquad a_1' = A_{p_1} - \frac{A_{p_0}}{B_{p_0}} \cdot B_{p_1}, \quad b_1' = B_{p_1}$$

$$(2)\qquad a_\nu' = -\frac{A_{p_\nu} B_{p_{\nu-1}} - A_{p_{\nu-1}} B_{p_\nu}}{A_{p_{\nu-1}} B_{p_{\nu-2}} - A_{p_{\nu-2}} B_{p_{\nu-1}}},$$

$$b_\nu' = \frac{A_{p_\nu} B_{p_{\nu-2}} - A_{p_{\nu-2}} B_{p_\nu}}{A_{p_{\nu-1}} B_{p_{\nu-2}} - A_{p_{\nu-2}} B_{p_{\nu-1}}} \quad (\nu = 2, 3, \cdots, m).$$

Dabei lassen sich a_1', a_ν', b_ν' auf Grund der allgemeinen Differenzenformel (VIII) von § 92, Nr. 2, S. 697, auch in die Form setzen:

$$(2^{\text{bis}})\quad \begin{cases} a_1' = (-1)^{p_0} \cdot a_1 a_2 \cdots a_{p_0+1} \dfrac{B_{p_0+1, p_1}}{B_{p_0}} \\ a_\nu' = (-1)^{p_{\nu-1} - p_{\nu-2} - 1} \cdot a_{p_{\nu-2}+2} a_{p_{\nu-2}+3} \cdots a_{p_{\nu-1}+1} \cdot \dfrac{B_{p_{\nu-1}+1, p_\nu}}{B_{p_{\nu-2}+1, p_{\nu-1}}}, \\ b_\nu' = \dfrac{B_{p_{\nu-2}+1, p_\nu}}{B_{p_{\nu-2}+1, p_{\nu-1}}}. \end{cases}$$

Der m-gliedrige Kettenbruch $b_0' + \left[\frac{a_\nu'}{b_\nu'}\right]_1^m$, dessen Teilzähler und Teilnenner durch die Gleichungen (2_0), (2_1), (2) bzw. (2^{bis}) definiert sind, oder jeder damit *äquivalente*[1]) hat dann offenbar die im Anfange dieser Nummer beschriebenen Eigenschaften und wird passend als ein aus dem Kettenbruche $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$ durch *Kontraktion* hervorgegangener bezeichnet.

2. Als Beispiel für die Anwendung der vorstehenden Formeln wollen wir den $2m$-gliedrigen Kettenbruch: $(K_{2m}) \equiv b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{2m}$ in

1) Man kann z. B. noch die in den a_ν', b_ν' $(\nu = 1, 2, \cdots m)$ auftretenden Nenner durch die in § 94, Nr. 3, Gl. (26), S. 711, angegebene Äquivalenz-Transformation fortschaffen.

einen m-gliedrigen: $b_0' + \left[\frac{a_\nu'}{b_\nu'}\right]_1^m$ „kontrahieren", dessen Näherungsbrüche mit den Näherungsbrüchen *gerader* Ordnung $\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}$ $(\nu = 0, 1, \cdots, m)$ übereinstimmen.[1]) Man hat also in den allgemeinen Formeln der vorigen Nummer $p_\nu = 2\nu$ $(\nu = 0, 1, \cdots, m)$ zu setzen und findet zunächst aus (2_0), (2_1):

$$(3_0) \qquad b_0' = \frac{A_0}{B_0} = b_0, \quad b_1' = B_2 = b_1 b_2 + a_2$$

und sodann aus (2^{bis}) mit Benützung der Formel (III), § 91, Nr. 1, S. 692:

$$a_1' = a_1 \cdot \frac{B_{1,2}}{B_0} = a_1 A_{2,2}$$

$$\left.\begin{aligned} a_\nu' &= -a_{2\nu-2}\, a_{2\nu-1} \frac{B_{2\nu-1,2\nu}}{B_{2\nu-3,2\nu-2}}, & b_\nu' &= \frac{B_{2\nu-3,2\nu}}{B_{2\nu-3,2\nu-2}} \\ &= -a_{2\nu-2}\, a_{2\nu-1} \frac{A_{2\nu,2\nu}}{A_{2\nu-2,2\nu-2}} & &= \frac{A_{2\nu-2,2\nu}}{A_{2\nu-2,2\nu-2}} \end{aligned}\right\} \nu \geqq 2.$$

Da nach § 91, S. 691, Gl. (II) $A_{\mu,\mu} = b_\mu$, im übrigen $A_{\mu,\nu}$ den Zähler der reduzierten Form von: $(K_{\mu,\nu}) \equiv b_\mu + \frac{a_{\mu+1}|}{|b_{\mu+1}} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu}$ vorstellt, also $A_{2\nu-2,2\nu}$ denjenigen der reduzierten Form von:

$$(K_{2\nu-2,2\nu}) \equiv b_{2\nu-2} + \frac{a_{2\nu-1}|}{|b_{2\nu-1}} + \frac{a_{2\nu}|}{|b_{2\nu}},$$

so ergibt sich:

$$\begin{aligned} A_{2,2} &= b_2, \quad A_{2\nu,2\nu} = b_{2\nu}, \quad A_{2\nu-2,2\nu-2} = b_{2\nu-2} \\ A_{2\nu-2,2\nu} &= (b_{2\nu-2}\, b_{2\nu-1} + a_{2\nu-1})\, b_{2\nu} + b_{2\nu-2}\, a_{2\nu} \end{aligned}$$

und daher:

$$(3_1) \qquad a_1' = a_1 b_2$$

$$(3) \qquad a_\nu' = -a_{2\nu-2}\, a_{2\nu-1} \frac{b_{2\nu}}{b_{2\nu-2}},$$

$$b_\nu' = \frac{(b_{2\nu-2}\, b_{2\nu-1} + a_{2\nu-1})\, b_{2\nu} + b_{2\nu-2}\, a_{2\nu}}{b_{2\nu-2}} \quad (\nu \geqq 2).$$

---

1) Dabei ist auf Grund der zweiten Bedingung (1) ausdrücklich vorauszusetzen, daß durchweg:

$$\frac{A_{2\nu-2}}{B_{2\nu-2}} + \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}.$$

Hierzu ist, wie ein Blick auf die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} A_{2\nu} &= b_{2\nu} A_{2\nu-1} + a_{2\nu} A_{2\nu-2} \\ B_{2\nu} &= b_{2\nu} B_{2\nu-1} + a_{2\nu} B_{2\nu-2} \end{aligned}$$

zeigt, erforderlich, daß durchweg:

$$|b_{2\nu}| > 0 \quad (\nu = 0, 1, \cdots, m).$$

Der Kettenbruch: $b_0' + \left[\frac{a_\nu'}{b_\nu'}\right]_1^m$, dessen Teilzähler und Teilnenner durch die Gleichungen (3_0), (3_1), (3) definiert sind, hat dann die verlangten Eigenschaften. Durch Fortschaffung des den a_ν', b_ν' $(\nu \geqq 2)$ gemeinsamen Nenners[1] $b_{2\nu-2}$ nimmt er schließlich die Form an:

(4) $$(K_m') \equiv b_0$$
$$+\left[\frac{a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2}, -\frac{a_2 a_3 b_4}{(b_2 b_3 + a_3) b_4 + b_2 a_4}, -\frac{a_{2\nu-2} a_{2\nu-1} b_{2\nu-4} b_{2\nu}}{(b_{2\nu-2} b_{2\nu-1} + a_{2\nu-1}) b_{2\nu} + b_{2\nu-2} a_{2\nu}}\right]_3^m$$

und man hat, wenn man die Näherungsbrüche dieses Kettenbruches mit $\frac{A_\nu'}{B_\nu'}$ bezeichnet:

(5) $$\frac{A_\nu'}{B_\nu'} \simeq \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} \quad (\nu = 0, 1, \cdots m)\,^{2)}$$

In ganz analoger Weise läßt sich auch der Kettenbruch:

$$(K_{2m+1}) \equiv b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{2m+1}$$

in einen m-gliedrigen $b_0'' + \left[\frac{a_\nu''}{b_\nu''}\right]_1^m$ kontrahieren, dessen Näherungsbrüche mit den Näherungsbrüchen *ungerader* Ordnung $\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}}$ $(\nu = 0, 1, \cdots m)$ übereinstimmen. Man findet (nach Fortschaffung der Nenner in den a_ν'', b_ν''):

(6) $$(K_m'') \equiv \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1}$$
$$+\left[-\frac{a_1 a_2 \cdot \frac{b_3}{b_1}}{(b_1 b_2 + a_2) b_3 + b_1 a_3}, -\frac{a_{2\nu-1} a_{2\nu} b_{2\nu-3} b_{2\nu+1}}{(b_{2\nu-1} b_{2\nu} + a_{2\nu}) b_{2\nu+1} + b_{2\nu-1} a_{2\nu+1}}\right]_2^m$$

und hat sodann:

(7) $$\frac{A_\nu''}{B_\nu''} \simeq \frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} \quad (\nu = 0, 1, \cdots m),$$

wenn die Näherungsbrüche von (K_m'') mit $\frac{A_\nu''}{B_\nu''}$ bezeichnet werden.

---

1) Vgl. die Fußnote 1 auf S. 718.

2) Infolge der zur Fortschaffung der Nenner benützten Äquivalenz-Transformation sind ja die betreffenden Näherungsbrüche nicht mehr *identisch*, sondern nur *äquivalent*, sodaß also die Schreibweise (5) so viel besagen soll wie:

$$\frac{A_\nu'}{B_\nu'} = \frac{C_\nu A_\nu}{C_\nu B_\nu} \quad (|C_\nu| > 0).$$

Die vorstehenden Formeln vereinfachen sich sehr wesentlich, wenn die zu kontrahierenden Kettenbrüche in der *zweiten Hauptform* gegeben sind, etwa (indem man der Einfachheit halber $b_0 = 0$ setzt):

$$(8)\quad (K_n) \equiv \left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^n, \text{ also: } (K_{2m}) \equiv \left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^{2m}, \ (K_{2m+1}) \equiv \left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^{2m+1}.$$

Alsdann ergibt sich aus (4) und (6):

$$(9)\ (K'_m) \equiv \left[\frac{a_1}{1+a_2}, -\frac{a_{2\nu-2}\,a_{2\nu-1}}{1+a_{2\nu-1}+a_{2\nu}}\right]_2^m, (K''_m) \equiv a_1 + \left[-\frac{a_{2\nu-1}\,a_{2\nu}}{1+a_{2\nu}+a_{2\nu+1}}\right]_1^m$$

und man hat wieder:

$$(10)\qquad \frac{A'_\nu}{B'_\nu} \simeq \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}, \quad \frac{A''_\nu}{B''_\nu} \simeq \frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} \quad (\nu = 0,\ 1,\ \cdots\ m)$$

3. Ist ein m-gliedriger Kettenbruch (K'_m) aus einem n-gliedrigen (K_n) (wo: $n > m$) durch *Kontraktion* hervorgegangen und betrachtet man sodann diesen kontrahierten Kettenbruch als den ursprünglich gegebenen, so kann man sich die Aufgabe stellen, aus diesem letzteren jenen *mehr*gliedrigen Kettenbruch herzuleiten, der in diesem Zusammenhange als durch *Extension* erzeugt bezeichnet wird. Es handelt sich hierbei also darum, dem m-gliedrigen Kettenbruche (K'_m) mit den Näherungsbrüchen $\frac{A'_\nu}{B'_\nu}$ $(\nu = 0,\ 1,\ \cdots,\ m)$ einen n-gliedrigen zuzuordnen, bei dem in die Folge der $(m+1)$ Näherungsbrüche $\frac{A'_\nu}{B'_\nu}$ an beliebigen Stellen noch $(n-m)$ weitere willkürlich vorgeschriebene eingeschaltet sind. Und zwar genügt es offenbar, diese Aufgabe für den Fall eines einzigen in dieser Weise einzuschaltenden Näherungsbruches zu lösen, da ja durch entsprechende Wiederholung des betreffenden Verfahrens die Zahl der einzuschaltenden Näherungsbrüche nach Belieben vermehrt werden kann.

Der ursprünglich vorgelegte Kettenbruch werde wieder mit $(K_n) \equiv b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$ (wo durchweg: $|a_\nu| > 0$), mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ $(\nu = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ die Folge seiner Näherungsbrüche bezeichnet. Bedeutet sodann C' eine (bis auf eine sogleich noch anzugebende Beschränkung) beliebig vorgeschriebene Zahl, so soll ein $(n+1)$-gliedriger Kettenbruch $(K'_{n+1}) \equiv b'_0 + \left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_1^{n+1}$ hergestellt werden, für welchen die Reihe der Näherungsbrüche, nämlich:

$$\frac{A'_0}{B'_0}, \frac{A'_1}{B'_1}, \cdots \frac{A'_{m-1}}{B'_{m-1}}, \frac{A'_m}{B'_m}, \frac{A'_{m+1}}{B'_{m+1}}, \cdots, \frac{A'_{n+1}}{B'_{n+1}} \quad (m \geq 1)$$

mit der folgenden übereinstimmt:

$$\frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1}{B_1}, \cdots \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}, C', \frac{A_m}{B_m}, \ldots, \frac{A_n}{B_n}.$$

Dabei soll C' nur der Beschränkung unterliegen, von $\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}$ und $\frac{A_m}{B_m}$ *verschieden* zu sein [1])

Zunächst ist unmittelbar ersichtlich, daß für $\nu \leqq m-1$:

$$(11) \qquad a_\nu' \equiv a_\nu, \quad b_\nu' \equiv b_\nu.$$

Die Abweichung der a_ν', b_ν' von den a_ν, b_ν beginnt also erst bei $\nu = m$. Setzt man: $C' = \frac{A'}{B'}$, wobei wir uns die besondere Auswahl der ja nur bis auf einen ganz willkürlichen gemeinsamen Faktor bestimmten Zahlen A', B' noch vorbehalten, so folgt aus den allgemeinen Formeln (12) des Hilfssatzes von § 94, Nr. 2, S. 708, für $\nu \geqq 2$:

$$a_\nu' = -\frac{A_\nu' B_{\nu-1}' - A_{\nu-1}' B_\nu'}{A_{\nu-1}' B_{\nu-2}' - A_{\nu-2}' B_{\nu-1}'}, \quad b_\nu' = \frac{A_\nu' B_{\nu-2}' - A_{\nu-2}' B_\nu'}{A_{\nu-1}' B_{\nu-2}' - A_{\nu-2}' B_{\nu-1}'},$$

also mit Rücksicht auf die Beziehungen: $\frac{A_m'}{B_m'} \equiv \frac{A'}{B'}$, $\frac{A_{\nu+1}'}{B_{\nu+1}'} \equiv \frac{A_\nu}{B_\nu}$ (für $\nu \geqq m$) und mit Benützung des Differenzensymbols Δ_ν (§ 92, Nr. 2, Gl (3), S. 696):

$$(12)\begin{cases} a_m' = -\frac{A' B_{m-1} - A_{m-1} B'}{\Delta_{m-1}}, & b_m' = \frac{A' B_{m-2} - A_{m-2} B'}{\Delta_{m-1}} \quad (m \geqq 2) \\ a_{m+1}' = -\frac{A_m B' - A' B_m}{A' B_{m-1} - A_{m-1} B'}, & b_{m+1}' = \frac{\Delta_m}{A' B_{m-1} - A_{m-1} B'} \quad (m \geqq 1) \\ a_{m+2}' = -\frac{\Delta_{m+1}}{A_m B' - A' B_m}, & b_{m+2}' = \frac{A_{m+1} B' - A' B_{m+1}}{A_m B' - A' B_m}. \end{cases}$$

Weiter erstreckt sich der Einfluß der Zahlen A', B' auf die Bildung der a_ν', b_ν' *nicht*. Denn man hat:

$$a_{m+3}' = -\frac{A_{m+2} B_{m+1} - A_{m+1} B_{m+2}}{A_{m+1} B_m - A_m B_{m+1}} = a_{m+2},$$

$$b_{m+3}' = \frac{A_{m+2} B_m - A_m B_{m+2}}{A_{m+1} B_m - A_m B_{m+1}} = b_{m+2}$$

und in dieser Weise fortschließend allgemein:

$$(13) \qquad a_{\nu+1}' = a_\nu, \quad b_{\nu+1}' = b_\nu \quad (\nu = m+2, m+3, \cdots n).$$

Der Unterschied zwischen dem ursprünglich gegebenen und dem „*extendierten*" Kettenbruche beschränkt sich also darauf, daß an die Stelle der *zwei* Teilbrüche: $\frac{a_m}{b_m}$, $\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}$ diejenigen *drei* treten, deren Zähler

---

1) Daß $\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} \neq \frac{A_m}{B_m}$, folgt schon aus der gemachten Voraussetzung $|a_\nu| > 0$ (nach § 93, Nr. 3, I, S. 704).

und Nenner durch die Gl. (12) vollständig definiert sind, sobald man noch über die bis zu einem gewissen Grade willkürlich gebliebenen Zahlen A', B' verfügt, z. B. indem man setzt: $A' = C'$, $B' = 1$. In diesem Falle ist offenbar $\frac{A'_m}{B'_m} \equiv \frac{C'}{1}$, während bei jeder anderen (der Bedingung $\frac{A'}{B'} = C'$ genügenden) Wahl nur $\frac{A'_m}{B'_m} \simeq \frac{C'}{1}$ und der resultierende Kettenbruch dem zuvor gewonnenen *äquivalent* ausfällt. Unter den hiernach vorhandenen Möglichkeiten verdient eine ausdrücklich hervorgehoben zu werden, bei welcher der extendierte Kettenbruch eine besonders einfache Form annimmt.

Dividiert man Zähler und Nenner des in (12) angegebenen Ausdruckes für a'_{m+1} durch B', so folgt:

(14) $a_{m+1} = \frac{B_m C' - A_m}{B_{m-1} C' - A_{m-1}}$,[1] also: (15) $C' = \frac{A_m - A_{m-1} a'_{m+1}}{B_m - B_{m-1} a'_{m+1}}$.

Hiernach steht es frei, unter der Voraussetzung, daß unter a'_{m+1} die durch Gl. (14) definierte Zahl verstanden wird, zu setzen:

$$(16) \qquad \begin{cases} A' = A_m - A_{m-1} a'_{m+1} \\ B' = B_m - B_{m-1} a'_{m+1}, \end{cases}$$

sodaß sich weiter ergibt:

$$(17) \quad \begin{cases} A' B_{m-1} - A_{m-1} B' = A_m B_{m-1} - A_{m-1} B_m \equiv \Delta_m \\ A_m B' - A' B_m = -(A_m B_{m-1} - A_{m-1} B_m) \cdot a'_{m+1} \equiv -\Delta_m a'_{m+1}. \end{cases}$$

Durch Einsetzen dieser Ergebnisse in die Ausdrücke (12) folgt sodann:

$$(18) \begin{cases} \left.\begin{aligned} a'_m &= -\frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}} = a_m \\ a'_{m+2} &= \frac{\Delta_{m+1}}{\Delta_m} \cdot \frac{1}{a'_{m+1}} = -\frac{a_{m+1}}{a'_{m+1}} \end{aligned}\right\} \text{(s. § 92, Nr. 2, Gl. (4), S. 696)} \\ b'_m = \frac{A_m B_{m-2} - A_{m-2} B_m - (A_{m-1} B_{m-2} - A_{m-2} B_{m-1}) a'_{m+1}}{\Delta_{m-1}} \\ \qquad = b_m - a'_{m+1} \\ b'_{m+1} = \frac{\Delta_m}{\Delta_m} = 1 \\ b'_{m+2} = -\frac{A_{m+1} B_m - A_m B_{m+1} - (A_{m+1} B_{m-1} - A_{m-1} B_{m+1}) a'_{m+1}}{\Delta_m \cdot a'_{m+1}} \\ \qquad = \frac{a_{m+1}}{a'_{m+1}} + b_{m+1}. \end{cases}$$

---

1) a'_{m+1} (und übrigens auch b'_{m+2}) hängt also nicht von den Einzelwerten, A', B', sondern nur von C' ab, im Gegensatz zu a'_m, a'_{m+2}, b'_m, b'_{m+1}.

Die für a'_m, b'_m gefundenen Werte gelten mit Rücksicht auf das *erste* Gleichungspaar (12) zunächst nur für $m \geqq 2$. Im Falle $m = 1$ tritt mit Benützung der Gleichungen (12_1) von § 94, Nr. 2, S. 707, an die Stelle dieses Gleichungspaares das folgende:

$$a'_1 = A' - b_0 B', \quad b'_1 = B',$$

und da andererseits die Gleichungen (16) in diesem Falle die Form annehmen:

$$A' = A_1 - A_0 a'_2 = b_0 b_1 + a_1 - b_0 a'_2, \quad B' = B_1 - B_0 a'_2 = b_1 - a'_2,$$

so findet man:

$$(18_1) \qquad a'_1 = a_1, \quad b'_1 = b_1 - a'_2,$$

d. h. genau dieselben Werte, die sich aus (18) für $m = 1$ ergeben würden.

Schreibt man schließlich noch der Einfachheit halber a' statt a'_{m+1}, so kann das vorstehende Ergebnis in folgender Weise ausgesprochen werden:

Ersetzt man in dem Kettenbruch: $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$ (wo: $|a_\nu| > 0$) *mit den Näherungsbrüchen* $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ ($\nu = 0, 1, \cdots n$) *die beiden Teilbrüche:*

$$\frac{a_m|}{|b_m} + \frac{a_{m+1}|}{|b_{m+1}} \quad (\text{wo: } 1 \leqq m < n)$$

durch die drei folgenden:

$$(19) \qquad \frac{a_m|}{|b_m - a'} + \frac{a'|}{|1} - \frac{\frac{a_{m+1}}{a'}|}{|b_{m+1} + \frac{a_{m+1}}{a'}}, \quad \textit{wo: } a' = \frac{B_m C - A_m}{B_{m-1} C - A_{m-1}}$$

und C eine ganz beliebige, nur von $\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}, \frac{A_m}{B_m}$ *verschiedene Zahl bedeutet, so genügen die Näherungsbrüche* $\frac{A'_\nu}{B'_\nu}$ *des auf diese Weise entstandenen Kettenbruches den Beziehungen:*

$$(20) \quad \frac{A'_\nu}{B'_\nu} = \frac{A_\nu}{B_\nu} (\nu \leqq m-1), \; \frac{A'_m}{B'_m} = C, \; \frac{A'_\nu}{B'_\nu} = \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} (\nu = m+1, m+2, \cdots, n+1).$$

Der Vollständigkeit halber sei noch bemerkt, daß ein analoges Ergebnis auch für den Fall $m = 0$ besteht, wenn es sich also darum

handelt, einen Näherungsbruch mit beliebig vorgeschriebenem Werte C nicht in die Folge der $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ einzuschalten, sondern ihr vorauszuschicken. Man hat alsdann die beiden Anfangsglieder:

(21a) $$b_0 + \frac{a_1}{b_1}$$

durch die drei folgenden zu ersetzen:

(21b) $$(b_0 - a') + \frac{a'|}{|1} - \frac{\frac{a_1}{a'}\,\Big|}{\Big|\, b_1 + \frac{a_1}{a'}}, \text{ wo: } a' = b_0 - C,$$

wie sich (ähnlich wie im Falle $m = 1$) durch entsprechende Modifikation der Gleichungen (12) ergibt, übrigens auch leicht durch direkte Ausrechnung bestätigt werden kann.

§ 97. Unendliche Kettenbrüche. — Konvergenz. — Außerwesentliche und wesentliche Divergenz. — Unveränderlichkeit des Konvergenz- und Divergenzcharakters bei Äquivalenz-Transformationen. — Verwandlung unendlicher Kettenbrüche in äquivalente Reihen oder Produkte.

1. Aus zwei beliebig gegebenen unbegrenzt fortsetzbaren Zahlenfolgen:

$$a_1,\ a_2,\ \cdots a_\nu,\ \cdots\cdots$$
$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \cdots b_\nu,\ \cdots\cdots$$

kann man zunächst rein formal den *„unendlichen“* d. h. unbegrenzt fortsetzbaren Kettenbruch bilden:

(1) $$(K_\infty) \equiv b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} + \cdots\cdots,$$

kürzer geschrieben:

(2) $$b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \text{ oder nach Bedarf: } b_0 + \left[\frac{a_1}{b_1}, \cdots \frac{a_m}{b_m}, \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty.$$

Bezeichnet man sodann wieder mit:

$$K_0,\ K_1, \cdots K_n,\ \cdots\cdots \text{ oder auch: } \frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1}{B_1}, \cdots \frac{A_n}{B_n}, \cdots\cdots$$

die *reduzierten Formen* der Kettenbrüche (K_0), (K_1), $\cdots$, (K_n), $\cdots\cdots$, welche entstehen, wenn man den Kettenbruch (K_∞) beim Index $\nu = 0, 1, \cdots n, \cdots\cdots$ abbricht, anders ausgesprochen die *Näherungs-*

brüche $0^{\text{ter}}, 1^{\text{ter}}, \ldots, n^{\text{ter}}, \ldots$ Ordnung des *unendlichen* Kettenbruches (K_∞), so heißt der letztere *konvergent* und K sein *Wert*, in Zeichen:

$$b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = K \text{ bzw. } (K_\infty) = K, \tag{3}$$

wenn $\frac{A_n}{B_n}$ für $n \to \infty$ einen *bestimmten Grenzwert* K besitzt, wenn also:

$$\lim_{n\to\infty} K_n \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = K \tag{4}$$

und K eine bestimmte Zahl vorstellt.[1])

In jedem anderen Falle heißt der unendliche Kettenbruch *divergent*. Dabei soll er als *außerwesentlich divergent* bezeichnet werden, wenn die Folge der *reziprok* genommenen Näherungsbrüche den *Grenzwert Null* besitzt, wenn also:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{A_n} = 0. \tag{5}$$

Dieser Fall tritt offenbar insbesondere ein, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \infty$ (d h wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{A_n}{B_n}\right| = \infty$), wenn also, wie man in diesem Falle sagt, der Kettenbruch *nach Unendlich divergiert;* aber auch dann, wenn unter den Näherungsbrüchen *unendlich viele sinnlose* (mit nicht verschwindenden Zählern[2])) vorkommen und nur die Folge der übrigen nach ∞ divergiert, ja selbst, wenn von irgendeiner Stelle ab *alle* Näherungsbrüche *sinnlos* (mit der angegebenen Beschränkung) ausfallen.[3]) Es läßt sich leicht zeigen und wird im nächsten Paragraphen noch deutlicher hervortreten, daß solche *außerwesentlich divergente* Kettenbrüche noch eine gewisse Verwandtschaft mit den *konvergenten* besitzen.

Nach dem Satze von § 91, Nr. 4, S. 694, Fußnote 3, stehen zwei Kettenbrüche von der Form:

---

1) Hiermit ist schon implizite gesagt, daß die Näherungsbrüche $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ zum mindesten von einer gewissen Stelle ab *bestimmte Zahlen* vorstellen müssen. Dagegen läßt die gegebene Konvergenzdefinition sehr wohl die Möglichkeit offen, daß die Folge der Näherungsbrüche eine beliebige *endliche* Anzahl *sinnloser* enthalten kann.

2) Diese Bedingung ist allemal von selbst erfüllt, wenn durchweg $|a_\nu| > 0$: vgl. § 93, Nr. 3, III, S. 704.

3) Dieser Fall kann nach § 93, Nr. 3, II, S. 704, niemals eintreten, wenn durchweg $|a_\nu| > 0$, wohl aber, wenn mindestens *ein* $a_\nu = 0$ ist (s. a. a. O. Nr. 2 und § 99, Nr 4, S. 746).

$$b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \quad \text{und:} \quad \left[\frac{1}{b_0}, \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$$

in der Beziehung, daß die Näherungsbrüche des einen die *reziproken* des anderen sind. Wenn also einer der beiden gegen den von Null verschiedenen Wert K *konvergiert*, so *konvergiert* der andere gegen den Wert $\frac{1}{K}$. Wenn dagegen der eine nach *Null* konvergiert, so ist der andere *außerwesentlich divergent*, und *umgekehrt*.[1])

Wenn nun andererseits der Kettenbruch $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ (wo $|a_1| > 0$) *außerwesentlich divergiert*, so gilt das gleiche auch von dem Kettenbruche $\left[\frac{1}{b_1}, \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty$. Denn bezeichnet man die Näherungsbrüche des ersteren wieder mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$, die des letzteren mit $\frac{A'_\nu}{B'_\nu}$, so hat man nach § 91, Nr 2 für $\nu \geqq 1$:

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{b_0 B'_\nu + a_1 A'_\nu}{B'_\nu}$$

und somit zum mindesten für hinlänglich große ν (für welche ja auf Grund der Voraussetzung $|A_\nu| > 0$ sein muß):

$$\frac{B'_\nu}{A'_\nu} = \frac{a_1 B_\nu}{A_\nu - b_0 B_\nu} = \frac{B_\nu}{A_\nu} \cdot \frac{a_1}{1 - b_0 \frac{B_\nu}{A_\nu}},$$

also:

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{B'_\nu}{A'_\nu} = 0, \quad \text{wenn:} \lim_{\nu \to \infty} \frac{B_\nu}{A_\nu} = 0.$$

Analog erschließt man umgekehrt aus der *außerwesentlichen Divergenz* von $\left[\frac{1}{b_1}, \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty$, falls $|a_1| > 0$, diejenige von $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$.

Durch Anwendung der zuvor gemachten Bemerkung ergibt sich also der folgende Satz:

---

1) Statt des Kettenbruches $\left[\frac{1}{b_0}, \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ kann man auch den durch Multiplikation mit einer beliebigen von Null verschiedenen Zahl a_0 daraus hervorgehenden $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_0^\infty$ einführen. Ist alsdann $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = K \neq 0$, so hat man $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_0^\infty = \frac{a_0}{K}$. Umgekehrt würde aus $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_0^\infty = K' \neq 0$ folgen: $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{a_0}{K'}$. Im Falle $K = 0$ bzw $K' = 0$ erleidet die entsprechende Aussage des Textes keine Änderung.

I. Ist der Kettenbruch $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, wo $|a_1| > 0$, *(also auch der Kettenbruch* $\left[\frac{1}{b_1}, \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty$*) außerwesentlich divergent, so konvergiert* $b_1 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty$ *nach Null, und umgekehrt. Ist der letztgenannte Kettenbruch außerwesentlich divergent, so konvergiert* $\left[\frac{1}{b_1}, \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty$ *nach Null, also* $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *nach dem Werte* b_0, *und umgekehrt.*

Bezeichnet man einen unendlichen Kettenbruch, von dem nur so viel feststeht, daß er entweder *konvergiert* oder *außerwesentlich divergiert*, als *höchstens außerwesentlich divergent*, so folgt noch:

II. Ist der Kettenbruch $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *höchstens außerwesentlich divergent, so ist entweder er selbst oder der Kettenbruch* $b_1 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty$ *konvergent.*

Jeder unendliche Kettenbruch, der weder konvergiert noch außerwesentlich divergiert, soll *wesentlich divergent* heißen. Diese Bezeichnung findet also insbesondere Anwendung, wenn die Folge der Näherungsbrüche *mehrere Häufungsstellen*[1]) besitzt, in welchem Falle der Kettenbruch auch als *ossillierend* bezeichnet wird. Ein anderer Fall von *wesentlicher Divergenz* würde ferner dann eintreten, wenn der Kettenbruch *unendlich viele sinnlose* Näherungsbrüche liefert, ohne daß diese selbst sowie die Folge der etwa noch übrigen Näherungsbrüche den oben für die *außerwesentliche* Divergenz geforderten Bedingungen genügen.

2. Wir bezeichnen zwei *unendliche* Kettenbrüche $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ und $b_0' + \left[\frac{a_\nu'}{b_\nu'}\right]_1^\infty$ als *äquivalent*, in Zeichen:

$$b_0' + \left[\frac{a_\nu'}{b_\nu'}\right]_1^\infty \simeq b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty, \tag{6}$$

---

1) Mindestens eine dieser Häufungsstellen muß offenbar eine *endliche* bestimmte Zahl sein, da ja in dem vorliegenden Zusammenhange Limites mit dem *absoluten Betrage* $+\infty$ und *verschiedenen Einheitsfaktoren* als eine *einzige* Häufungsstelle anzusehen sind (vgl. § 73, Nr. 4, Gl. (24), S. 566). Besteht z. B. der Kettenbruch aus lauter *reellen* Zahlen, und besitzt die Folge der Näherungsbrüche *nur* die beiden Limites $-\infty$ und $+\infty$, so gelten diese hier nur als *eine* Häufungsstelle ∞ (ohne Vorzeichen). In der Tat ist ja der fragliche Kettenbruch auf Grund der gegebenen Definition nur als *außerwesentlich* divergent anzusehen.

wenn $b_0' = b_0$ und für jedes $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ die Beziehung besteht:

$$(7) \qquad b_0' + \left[\frac{a_\nu'}{b_\nu'}\right]_1^n \simeq b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n .$$

Auf Grund des Satzes von § 94, Nr. 3, S. 709, ist dann insbesondere:

$$(8)\ b_0 + \left[\frac{c_{\nu-1}\, c_\nu\, a_\nu}{c_\nu\, b_\nu}\right]_1^\infty \simeq b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \text{ (wo: } c_0 = 1, \text{ im übrigen: } |c_\nu| > 0),$$

und *umgekehrt* ist, sofern nur durchweg $|a_\nu| > 0$, jeder mit $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *äquivalente* Kettenbruch in der Form $b_0 + \left[\frac{c_{\nu-1}\, c_\nu\, a_\nu}{c_\nu\, b_\nu}\right]_1^\infty$ enthalten

Des weiteren ergibt sich, daß zu jedem *unendlichen* Kettenbruche $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, für welchen durchweg $|a_\nu| > 0$ bzw. $|b_\nu| > 0$ $(\nu \geqq 1)$ *ein* und *nur* ein ihm *äquivalenter* von der Form $b_0 + \left[\frac{1}{b_\nu'}\right]_1^\infty$ bzw $b_0 + \left[\frac{a_\nu'}{1}\right]_1^\infty$ existiert, welcher wiederum als dessen *erste* bzw. *zweite Hauptform* bezeichnet werden soll (s. § 94, Nr. 4, S. 710). Dabei sind die b_ν' bzw. a_ν' wieder durch die a. a. O. angegebenen Formeln (23) bzw. (25) bestimmt.

Da infolge der definierenden Beziehung (7) entsprechende Näherungsbrüche zweier *äquivalenter unendlicher* Kettenbrüche stets *gleichwertig* oder aber *gleichzeitig* und *in gleicher Art sinnlos* sind, so erkennt man unmittelbar, daß zwei solche Kettenbrüche stets *gleichzeitig konvergieren* bzw. *gleichzeitig divergieren.* Und zwar besteht im Falle der *Konvergenz* die *Gleichung*:

$$(9) \qquad b_0' + \left[\frac{a_\nu'}{b_\nu'}\right]_1^\infty = b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$$

in dem Sinne, daß ihre beiden Seiten ein und dieselbe bestimmte Zahl vorstellen; während im anderen Falle die beiden Kettenbrüche nicht nur *überhaupt* gleichzeitig *divergieren,* sondern *völlig gleichartig* divergieren.

3. Analoge Verhältnisse ergeben sich bei der Übertragung der Transformation in *äquivalente Summen* oder *Produkte* auf *unendliche* Kettenbrüche. Sind die Näherungsbruch-Nenner des unendlichen

Kettenbruches $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ für $\nu \geqq m$ durchweg *von Null verschieden*, so hat man nach § 95, Nr. 1, Gl. (1), S. 712, für *jedes* $n > m$:

$$(10) \qquad b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n = \frac{A_m}{B_m} + \sum_{m+1}^{n} {}_\nu (-1)^{\nu-1} \frac{a_1 \cdots a_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu},$$

bzw. in dem besonderen Falle $m = 0$:

$$(11) \qquad b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n = b_0 + \sum_{1}^{n} {}_\nu (-1)^{\nu-1} \frac{a_1 \cdots a_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu}.$$

Wenn also durchweg $|a_\nu| > 0$ und der *Kettenbruch konvergiert* (in welchem Falle ja verschwindende B_ν nur in endlicher Anzahl vorkommen können), so gehen auch die rechtsstehenden Summen für $n \to \infty$ in *konvergente Reihen* über, und umgekehrt würde aus der *Konvergenz* dieser *Reihen* auch diejenige des betreffenden *Kettenbruches* folgen. Man hat also in jedem dieser Fälle:

$$(12) \qquad b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{A_m}{B_m} + \sum_{m+1}^{\infty} {}_\nu (-1)^{\nu-1} \frac{a_1 \cdots a_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu}$$

bzw.

$$(13) \qquad b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = b_0 + \sum_{1}^{\infty} {}_\nu (-1)^{\nu-1} \frac{a_1 \cdots a_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu},$$

und zwar im Sinne der „*Äquivalenz*" von Kettenbruch und Reihe, d. h. so, daß für jedes $n > m$ bzw. $n > 0$ die Beziehung (10) bzw. (11) stattfindet und daher das Gleichheitszeichen in Gl. (12), (13) auch durch das Zeichen $\simeq$ ersetzt werden kann

Gleichzeitig mit dem Kettenbruche *divergieren* auch die betreffenden Reihen und *umgekehrt.* Bei der ersten dieser Aussagen wird vorausgesetzt, daß die Divergenz des Kettenbruches nicht mit dem Auftreten *unendlich vieler sinnloser* Näherungsbrüche verbunden ist: in diesem Falle wird die Möglichkeit der Gleichungen (10), (11) von vornherein hinfällig, und die betreffenden Reihen werden *sinnlos.*

4. Geht man statt von der Umformung eines Kettenbruches in eine äquivalente Summe von dem umgekehrten Prozeß, also von den Formeln (6)—(8b) des § 95, S. 714, aus, so ergibt sich für $n \to \infty$:

$$(14) \quad \sum_{0}^{\infty} {}_\nu k_\nu \simeq k_0 + \left[\frac{k_1}{1}, -\frac{k_2}{k_1+k_2}, -\frac{k_{\nu-2} k_\nu}{k_{\nu-1}+k_\nu}\right]_2^\infty \quad (|k_\nu| > 0 \text{ für } \nu \geqq 1)$$

$$(15) \quad \sum_{0}^{\infty} {}_\nu \frac{1}{c_\nu} \simeq \frac{1}{c_0} + \left[\frac{1}{c_1}, -\frac{c_{\nu-1}^2}{c_{\nu-1}+c_\nu}\right]_2^\infty$$

(16a) $$1 + \sum_1^\infty{}_\nu h_1 h_2 \cdots h_\nu \simeq 1 + \left[\frac{h_1}{1}, -\frac{h_\nu}{1+h_\nu}\right]_2^\infty$$

(16b) $$\simeq \left[\frac{1}{1}, -\frac{h_\nu}{1+h_\nu}\right]_1^\infty$$

in dem Sinne, daß für jede noch so große an die Stelle des Zeichens ∞ gesetzte Zahl n die betreffende Äquivalenz besteht[1]); daß ferner *gleichzeitig* mit der unendlichen *Reihe* auch der entsprechende *Kettenbruch konvergiert* bzw. gleichartig *divergiert,* und daß im Falle der *Konvergenz* jene Äquivalenzformeln durch *Gleichungen* ersetzt werden können.

Beispiele. 1) Wir fanden früher (§ 59, Nr. 3, Gl. (9), S 415):

$$\sum_1^\infty{}_\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{\nu} = lg\, 2.$$

Um diese Reihe und somit $lg\, 2$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, hat man in der Formel (15) zu setzen:

$$\frac{1}{C_0} = 0, \text{ im übrigen: } C_\nu = (-1)^{\nu-1} \cdot \nu,$$

sodaß sich ergibt:

$$lg\, 2 = \frac{1|}{|1} - \frac{1^2|}{|-1} - \frac{2^2|}{|1} - \cdots - \frac{\nu^2|}{|(-1)^\nu} - \cdots\cdots$$
$$= \frac{1|}{|1} + \frac{1^2|}{|1} + \frac{2^2|}{|1} + \cdots + \frac{\nu^2|}{|1} + \cdots\cdots\,^{2)}$$

2) Es ist (s. § 33, Nr. 4, Gl. (26), S. 204):

$$1 + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!} = e.$$

Setzt man daher in den Formeln (16a, b):

$$h_\nu = \frac{1}{\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots),$$

so findet man nach Wegschaffung der Nenner in den Zählern und Nennern der Teilbrüche:

(17a) $$e = 1 + \frac{1|}{|1} - \frac{1|}{|3} - \frac{2|}{|4} - \cdots - \frac{\nu-1|}{|\nu+1} - \cdots\cdots$$

(17b) $$= \frac{1|}{|1} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|3} - \frac{2|}{|4} - \cdots - \frac{\nu-1|}{|\nu+1} - \cdots\cdots.$$

1) Daraus folgt insbesondere, daß ein solcher Kettenbruch *niemals sinnlose Näherungsbrüche* besitzen kann, da ja $\sum_0^n{}_\nu k_\nu$ stets eine bestimmte Zahl vorstellt.

2) Die (auf Grund der Herleitung bereits feststehende) *Konvergenz* dieses Kettenbruches folgt auch aus dem Kriterium (V, B) des § 102, S. 767, und wird dort ausdrücklich als Beispiel angeführt.

Aus diesen Kettenbruchdarstellungen der Zahl e würde nach einem später mitzuteilenden Satze (s. § 109, Nr. 3, S. 776) unmittelbar deren (in § 33, Nr. 4, S. 205, bereits anderweitig bewiesene) *Irrationalität* folgen.

3) Eine andere merkwürdige Kettenbruchdarstellung der Zahl e ergibt sich aus der Reihenentwicklung:

$$e^{-1} = 1 + \sum_1^\infty {}^\nu (-1)^\nu \frac{1}{\nu!},$$

welche mit den hier zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln am einfachsten in folgender Weise hergeleitet werden kann. Bezeichnet man die Summe der obigen Reihe vorläufig mit s, so findet man mit Benützung der Cauchyschen Multiplikationsregel:

$$e \cdot s \equiv \left(1 + \sum_1^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!}\right)\left(1 + \sum_1^\infty {}^\nu (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!}\right) = \sum_0^\infty {}^\nu c_\nu,$$

wo:

$$c_0 = 1$$

und für $\nu \geqq 1$:

$$\begin{aligned} c_\nu &= \frac{1}{\nu!} - \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{(\nu-1)!} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{(\nu-2)!} - \cdots + (-1)^{\nu-1} \frac{1}{(\nu-1)!} \cdot \frac{1}{1!} + (-1)^\nu \frac{1}{\nu!} \\ &= \frac{1}{\nu!}\left(1 - \frac{\nu!}{1!\,(\nu-1)!} + \frac{\nu!}{2!\,(\nu-2)!} - \cdots + (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\nu!}{(\nu-1)!\,1!} + (-1)^\nu\right) \\ &= \frac{1}{\nu!}\left(1 - (\nu)_1 + (\nu)_2 - \cdots + (-1)^{\nu-1} (\nu)_{\nu-1} + (-1)^\nu \cdot\right)^{1)} \\ &= \frac{1}{\nu!}(1-1)^\nu = 0, \end{aligned}$$

sodaß also:

$$e \cdot s = 1, \text{ somit } s = e^{-1}.$$

Setzt man hiernach in der Formel (16a):

$$h_\nu = -\frac{1}{\nu} \quad (\nu = 1,\ 2,\ 3, \cdots\cdots),$$

so ergibt sich nach Wegschaffung der Nenner in den Zählern und Nennern der Teilbrüche:

$$e^{-1} = 1 - \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{2|}{|2} + \cdots + \frac{\nu|}{|\nu} + \cdots\cdots.$$

Hieraus durch Subtraktion von 1, Multiplikation mit -1 und Übergang zum reziproken Werte:

$$\frac{e}{e-1} = 1 + \frac{1|}{|1} + \frac{2|}{|2} + \cdots + \frac{\nu|}{|\nu} + \cdots\cdots,$$

---

1) S. § 14, Nr. 4, Gl. (5a), S. 89

durch nochmalige Subtraktion von 1:

$$\frac{1}{e-1} = \frac{1|}{|1} + \frac{2|}{|2} + \cdots + \frac{\nu|}{|\nu} + \cdots\cdots$$

und schließlich durch nochmaligen Übergang zum reziproken Werte und Addition von 1:

$$e = 2 + \frac{2|}{|2} + \cdots + \frac{\nu|}{|\nu} + \cdots\cdots.$$ [1])

5 Die früher gefundene Formel für die Umwandlung eines endlichen Kettenbruches in ein Produkt (§ 95, Nr. 3, Gl. (10), S. 715) gilt auch für $n \longrightarrow \infty$, also:

$$(18) \qquad b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \simeq b_0 \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 + (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{a_1 \cdots a_\nu}{A_{\nu-1} B_\nu}\right)$$

unter der Voraussetzung, daß für $\nu \geqq 1$ durchweg: $|A_{\nu-1}| > 0, |B_\nu| > 0$, und zwar gilt sie wiederum in dem Sinne, daß *Äquivalenz* besteht, wenn man das Zeichen ∞ durch jede beliebige Zahl n ersetzt; daß ferner der *Kettenbruch konvergiert*, wenn das *unendliche Produkt konvergiert* oder *nach Null divergiert*[2]) und *umgekehrt*, daß in jedem dieser Fälle das *Äquivalenz*zeichen durch ein *Gleichheits*zeichen ersetzt werden kann und daß schließlich, abgesehen von dem Falle der *Divergenz* des Produktes nach *Null*, Produkt und Kettenbruch auch *gleichzeitig* und *gleichartig divergieren*.

Das analoge gilt bezüglich der Formel für die umgekehrte Operation, also für die Umwandlung eines Produktes in einen äquivalenten Kettenbruch (a. a. O. S. 716, Formel (14)), d. h. man hat in entsprechendem Sinne, wie die Formel (18), die folgende:

---

1) Danach besteht neben der im Text benützten Kettenbruchdarstellung von e^{-1} auch die folgende:

$$e^{-1} = \frac{1.|}{|2} + \frac{2|}{|2} + \cdots + \frac{\nu|}{|\nu} + \cdots\cdots,$$

welche man auch direkt gewinnen kann, wenn man die zugrunde liegende Reihenentwicklung auf die Form bringt:

$$e^{-1} = \sum_1^\infty{}_\nu (-1)^{\nu-1} \frac{1}{2 \cdots (\nu+1)}$$

und die Formel (16a) in der Weise anwendet, daß man das Anfangsglied 1 auf beiden Seiten wegläßt und setzt:

$$h_1 = \frac{1}{2}, \quad h_\nu = -\frac{1}{\nu+1} \text{ für } \nu \geqq 2.$$

2) Vgl § 80, Nr. 8, S. 619.

$$(19)\qquad \prod_{\nu=0}^{\infty}(1+k_\nu) \simeq 1 + k_0 + \left[\frac{c_1}{1}, -\frac{c_\nu}{1+c_\nu}\right]_2^{\infty}$$

wo:

$$c_1 = (1+k_0)\,k_1, \quad c_\nu = (1+k_{\nu-1})\,\frac{k_\nu}{k_{\nu-1}}\ (\nu \geqq 2),$$

unter der Voraussetzung, daß für jedes n:

$$\prod_{0}^{n}{}^{\nu}(1+k_\nu)\begin{cases} \neq 0 \\ \neq \prod\limits_{0}^{n+1}{}^{\nu}(1+k_\nu). \end{cases}$$

§ 98. Verhalten von Kettenbrüchen bei Weglassung von Anfangsgliedern. — Bedingte und unbedingte Konvergenz.

1. Das additive Anfangsglied b_0 übt offenbar keinerlei Einfluß auf die *Konvergenz* oder *Divergenz* des Kettenbruches $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{\infty}$, da ja *jeder* seiner Näherungsbrüche von dem entsprechenden des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{\infty}$ sich immer nur um diesen Summanden b_0 unterscheidet. Beide Kettenbrüche sind also entweder gleichzeitig *konvergent* oder gleichzeitig *divergent* und besitzen im letzteren Falle auch völlig *gleichartigen Divergenzcharakter*.

Dagegen fanden wir in Nr. 1 des vorigen Paragraphen, daß der Kettenbruch $b_1 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^{\infty}$ (außerwesentlich) *divergiert*, falls $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{\infty}$ gegen den Wert b_0 *konvergiert*. Es zeigt sich hier also die von dem entsprechenden Verhalten *konvergenter Reihen* oder *Produkte* völlig abweichende Erscheinung, daß ein *konvergenter Kettenbruch* lediglich durch Weglassung gewisser Anfangsglieder in einen *divergenten* übergehen kann. Wir wollen daraufhin jetzt allgemein untersuchen, was sich unter der Voraussetzung der *Konvergenz* des Kettenbruches $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{\infty}$ über alle möglichen Kettenbrüche von der Form $b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ $(m \geqq 1)$ aussagen läßt.

Setzt man in den Formeln (V) von § 92, Nr. 1, S. 696: $\nu = m-1$, $\nu + \varrho = n$, so nehmen sie die Form an:

$$(1)\qquad \begin{cases} A_n = A_{m,n}\,A_{m-1} + a_m\,B_{m,n}\,A_{m-2} \\ B_n = A_{m,n}\,B_{m-1} + a_m\,B_{m,n}\,B_{m-2} \end{cases} (n \geqq m \geqq 2).$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit B_{m-2} bzw. B_{m-1}, die zweite mit A_{m-2} bzw. A_{m-1}, so folgt durch Subtraktion:

$$2)\ \left.\begin{cases} A_n\,B_{m-2} - B_n\,A_{m-2} = A_{m,n}\,\Delta_{m-1} \\ A_n\,B_{m-1} - B_n\,A_{m-1} = -a_m\,B_{m,n}\,\Delta_{m-1} \end{cases}\right\}\text{wo:}\ \Delta_{m-1} = A_{m-1}B_{m-2} - A_{m-2}B_{m-1}$$

Es werde jetzt angenommen, daß durchweg $|a_\nu| > 0$, also auch $|\Delta_\nu| > 0$ (s. § 93, Nr. 3, Ungl. (9), S 703), daß ferner der Kettenbruch $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ den Wert K besitze, sodaß also:

$$\lim_{n\to\infty} K_n = K, \quad \text{wo: } K_n \equiv \frac{A_n}{B_n}. \tag{3}$$

Da alsdann zum mindesten für jedes n, welches eine passend gewählte Zahl n_0 übersteigt, $|B_n| > 0$ sein muß, so lassen sich die Gleichungen (2) jetzt in die folgende Form setzen:

$$\begin{cases} A_{m,n}\,\Delta_{m-1} = \qquad B_n\,(K_n B_{m-2} - A_{m-2}) \\ B_{m,n}\,\Delta_{m-1} = -\frac{1}{a_m}\cdot B_n\,(K_n B_{m-1} - A_{m-1}) \end{cases} \quad (n > n_0). \tag{4}$$

Da $\frac{A_{m,n}}{B_{m,n}}$ die reduzierte Form des Kettenbruches $b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^n$ vorstellt, so ist es, um eine Aussage über $b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ machen zu können, noch erforderlich, diese beiden Gleichungen durch einander zu dividieren, was wiederum nur gestattet ist, wenn der Divisor, d. h schließlich der letzte Faktor auf der rechten Seite der einen oder anderen Gleichung (4), *von Null verschieden* ist. Man hat nun:

$$\lim_{n\to\infty} (K_n B_{m-1} - A_{m-1}) = KB_{m-1} - A_{m-1}, \tag{5}$$

und es bestehen daher nur die beiden Möglichkeiten:

$$|KB_{m-1} - A_{m-1}| > 0, \quad \text{also: } \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} \neq K \tag{6a}$$

(d. h $\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}$ ist entweder eine *von K verschiedene Zahl* oder *sinnlos*) oder:

$$KB_{m-1} - A_{m-1} = 0, \quad \text{also: } \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = K \tag{6b}$$

(wenn man berücksichtigt, daß offenbar $|B_{m-1}| > 0$ sein muß, da ja im Falle: $B_{m-1} = 0$ auch: $A_{m-1} = 0$ sein müßte, was, wegen $|a_\nu| > 0$, nach § 93, Nr. 3, III, S. 704, unmöglich ist).

2. Hiernach sind also nur die folgenden *zwei Fälle* möglich:

Fall I: $\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} \neq K$. Wegen $|KB_{m-1} - A_{m-1}| > 0$ ist dann mit Rücksicht auf die Beziehung (5) für hinlänglich große n, etwa für $n > n_1 \geqq n_0$, auch:

$$|K_n B_{m-1} - A_{m-1}| > 0,$$

sodaß aus (4) durch Division hervorgeht:

$$(7)\qquad \frac{A_{m,n}}{B_{m,n}} = -a_m \cdot \frac{K_n B_{m-2} - A_{m-2}}{K_n B_{m-1} - A_{m-1}}$$

und schließlich für $n \to \infty$ sich ergibt:

$$(8)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{A_{m,n}}{B_{m,n}} = -a_m \cdot \frac{K B_{m-2} - A_{m-2}}{K B_{m-1} - A_{m-1}}$$

d. h. der Kettenbruch $b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ ist *konvergent*, und zwar hat man:

$$(9)\qquad b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty} \begin{cases} \neq 0, \text{ wenn: } |KB_{m-2} - A_{m-2}| > 0, \\ = 0, \text{ wenn: } \ KB_{m-2} - A_{m-2} \ = 0. \end{cases}$$

Fall II: $\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = K$. Da unter dieser Voraussetzung nach § 93, Nr. 3, II und III *weder* $\frac{A_{m-2}}{B_{m-2}} = K$, *noch*: $A_{m-2} = B_{m-2} = 0$ sein kann, so hat man:

$$|KB_{m-2} - A_{m-2}| > 0$$

und daher mit Rücksicht auf die Beziehung (5) für hinlänglich große n, etwa für $n > n_2 \geqq n_0$, auch:

$$|K_n B_{m-2} - A_{m-2}| > 0.$$

Alsdann folgt aber, indem man die *zweite* der Gleichungen (4) durch die *erste* dividiert:

$$(10)\qquad \frac{B_{m,n}}{A_{m,n}} = -\frac{1}{a_m} \cdot \frac{K_n B_{m-1} - A_{m-1}}{K_n B_{m-2} - A_{m-2}}$$

und somit für $n \to \infty$:

$$(11)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{B_{m,n}}{A_{m,n}} = -\frac{1}{a_m} \cdot \frac{K B_{m-1} - A_{m-1}}{K B_{m-2} - A_{m-2}} = 0,$$

d. h. der Kettenbruch $b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ ist *außerwesentlich divergent.*

Zugleich ergibt sich dann noch aus dem Satze I von Nr. 1 des vorigen Paragraphen, S. 727, daß:

$$(12)\qquad b_{m-1} + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m}^{\infty} = b_{m-1}$$

$$(13)\qquad b_{m+1} + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+2}^{\infty} = 0$$

und daß umgekehrt *jede* dieser beiden Beziehungen die *außerwesentliche Divergenz* des Kettenbruches $b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ und somit schließlich auch die Existenz der Beziehung $\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = K$ nach sich zieht.

Den vorstehenden Betrachtungen lag durchweg die Annahme $m \geqq 2$ zugrunde. Die Gültigkeit der gefundenen Resultate auch für $m = 1$ ergibt sich indessen unmittelbar aus dem soeben erwähnten Satze I von Nr 1 des vorigen Paragraphen und der vorausgeschickten Bemerkung über die *Reziprozität* zweier Kettenbrüche von der Form: $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ und: $\left[\frac{1}{b_0}, \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, sofern man nur beachtet, daß ja $\frac{A_0}{B_0} = b_0$ und $K = b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, folglich die Bedingung:

$$\frac{A_0}{B_0} \neq K \text{ identisch ist mit der folgenden: } \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = K - b_0 \neq 0,$$

$$\frac{A_0}{B_0} = K \quad \text{,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,,} \quad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = 0.$$

Durch Zusammenfassung dieser Ergebnisse erhält man also den folgenden *Hauptsatz*:

Ist K der Wert des konvergenten Kettenbruches $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *(wo durchweg:* $|a_\nu| > 0$*), so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz eines beliebigen Kettenbruches von der Form:* $b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ *(wo:* $m \geqq 1$*) in der Beziehung:*

$$\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} \neq K \text{ (d. h. } \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} \text{ soll eine von } K \text{ verschiedene Zahl}$$

oder auch sinnlos sein).

Ist dagegen:

$$\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = K,$$

so divergiert der Kettenbruch $b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ *außerwesentlich, während die beiden „benachbarten" Kettenbrüche dieser Art, d. h. diejenigen, die durch Vertauschung von m mit* $m-1$ *bzw.* $m+1$ *daraus entstehen, konvergieren, und zwar hat man:*

$$(12) \quad b_{m-1} + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_m^\infty = b_{m-1}\text{[1]}, \qquad (13)\ b_{m+1} + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+2}^\infty = 0.$$

---

1) Im Falle $m = 1$ fällt die Beziehung (12) mit der Voraussetzung $\frac{A_0}{B_0} = K$, d. h. $b_0 = b_0 + \left[\frac{a_\nu}{1}\right]^\infty$ zusammen.

Umgekehrt zieht jede der Beziehungen (12) und (13) die außerwesentliche Divergenz des Kettenbruches $b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ *und diese letztere, unter der Voraussetzung, daß der Kettenbruch* $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{\infty}$ *gegen den Wert K konvergiert, die Beziehung:* $\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = K$ *nach sich.*

3. Aus dem eben ausgesprochenen Satze folgt insbesondere, daß unter der Voraussetzung: $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{\infty} = K$ $(|a_\nu| > 0)$ *jeder* der Kettenbrüche von der Form: $b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ $(m = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ *konvergiert*, wenn in dem nämlichen Umfange die Beziehung: $\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} \neq K$ besteht, d. h. wenn *keiner* der Näherungsbrüche $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ mit dem Werte des unendlichen Kettenbruches übereinstimmt.

Wir wollen einen *konvergenten* Kettenbruch als *unbedingt konvergent* bezeichnen, wenn jeder durch Weglassung beliebig vieler Anfangsglieder daraus hervorgehende, also jeder von der Form: $b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ $(m \geqq 1)$ *gleichfalls konvergiert*. Mit Benützung dieser Ausdrucksweise läßt sich also das vorstehende Ergebnis auch folgendermaßen formulieren:

> *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die unbedingte Konvergenz eines konvergenten Kettenbruches mit lauter von Null verschiedenen Teilzählern besteht darin, daß sein Wert keinem seiner Näherungsbrüche gleich ist.*

Von der wirklichen *Existenz* solcher *unbedingt konvergenter* Kettenbrüche kann man sich (ohne Benützung irgendwelcher hier noch nicht zur Verfügung stehenden Konvergenz-Kennzeichen) leicht überzeugen, wenn man denjenigen Kettenbruch betrachtet, welcher mit einer aus *positiven* Zahlen bestehenden *konvergenten Reihe* $\sum_0^{\infty} k_\nu = K$ *äquivalent* ist, also (s. § 97, Nr. 4, Gl. (14), S. 729) den Kettenbruch:

$$(14)\quad k_0 + \frac{k_1|}{|1} - \frac{k_2\;|}{|k_1 + k_2} - \frac{k_1 k_3\;|}{|k_2 + k_3} - \cdots - \frac{k_{\nu-2} k_\nu\;|}{|k_{\nu-1} + k_\nu} - \cdots\cdots = K.$$

Da die Näherungsbrüche auf Grund der Beziehung: $\frac{A_n}{B_n} = \sum_0^n k_\nu$ mit n *monoton zunehmen*, also keiner derselben den Grenzwert K erreicht, so folgt, daß der obige Kettenbruch *unbedingt* konvergiert.

4. Ein *konvergenter* Kettenbruch $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ soll *bedingt konvergent* heißen, wenn unter den durch Weglassung von Anfangsgliedern daraus hervorgehenden Kettenbrüchen *mindestens ein divergenter*: $b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ $(m \geqq 1)$ sich befindet. Wird dann wieder angenommen, daß durchweg: $|a_\nu| > 0$, so folgt aus dem Hauptsatze von Nr. 2 dieses Paragraphen, daß jeder dieser divergenten Kettenbrüche nur *außerwesentlich* divergieren kann, daß ferner die beiden „benachbarten", d. h. die mit dem Gliede b_{m-1} bzw. b_{m+1} beginnenden unendlichen Kettenbrüche allemal *konvergieren*. Es können also in diesem Zusammenhange niemals *zwei konsekutive divergente* Kettenbrüche vorkommen.

Ist $b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ der *einzige* bzw. der *letzte divergierende* Kettenbruch, so konvergiert der Kettenbruch $b_{m+1} + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+2}^\infty$ *unbedingt*. Es können aber auch solche divergierende Teilkettenbrüche in *unbegrenzter* Menge auftreten, sodaß also von *keiner* Stelle ab *unbedingte* Konvergenz stattfindet. Auch für das Eintreten dieses Falles lassen sich mit Hilfe der Kettenbruch-Transformation passend gewählter Reihen einfache Beispiele herstellen.

Es sei (m_λ) für $\lambda = 0, 1, 2 \cdots\cdots$ eine unbegrenzte Folge wachsender natürlicher Zahlen von der Beschaffenheit, daß: $2 \leqq m_{\lambda+1} - m_\lambda \leqq n$, wo n eine beliebig gewählte ganze Zahl $\geqq 2$ bedeutet, ferner (k_ν) eine unbegrenzte Folge bis auf gewisse, sogleich anzugebende Beschränkungen beliebiger Zahlen, und es werde gesetzt:

$$(15) \qquad \sum_0^{m_0} k_\nu = K, \quad \sum_{m_\lambda+1}^{m_{\lambda+1}} k_\nu = 0 \quad (\lambda = 0, 1, 2, \cdots\cdots),$$

wobei die letzte Kategorie von Bedingungen so zu verstehen ist, daß man $k_{m_\lambda+1}, k_{m_\lambda+2}, \cdots k_{m_{\lambda+1}-1}$ willkürlich annehmen kann und sodann nur $k_{m_{\lambda+1}} = -\sum_{m_\lambda+1}^{m_{\lambda+1}-1} k_\nu$ zu setzen hat. Aus (15) folgt alsdann, daß: $\sum_0^{m_\lambda} k_\nu = K$ für $\lambda = 0, 1, 2 \cdots\cdots$. Werden jetzt die k_ν noch der Beschränkung unterworfen: $\lim_{\nu\to\infty} k_\nu = 0$ zunächst für $\nu \neq m_\lambda$, so ergibt sich infolge der Voraussetzung $m_{\lambda+1} - m_\lambda \leqq n$, daß auch:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sum_{m_\lambda+1}^{m} k_\nu = 0 \qquad (m_\lambda + 1 \leqq m < m_{\lambda+1}), \qquad \lim_{\lambda\to\infty} k_{m_\lambda} = 0.$$

Daraus folgt weiter, daß die Reihe $\sum_0^\infty k_\nu$ *konvergiert*, und zwar gegen den Wert K. Das gleiche gilt daher wieder für den mit der Reihe äquivalenten Kettenbruch (14). Zugleich hat man: $\frac{A_{m_\lambda}}{B_{m_\lambda}} = \sum_0^{m_\lambda} k_\nu = K$ $(\lambda = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$, sodaß also jeder Kettenbruch von der Form $b_{m_\lambda+1} + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m_\lambda+2}^\infty$ d. h.:

$$k_{m_\lambda} + k_{m_\lambda+1} - \frac{k_{m_\lambda} k_{m_\lambda+2} \mid}{\mid k_{m_\lambda+1} + k_{m_\lambda+2}} - \cdots - \frac{k_{\nu-2} k_\nu \mid}{\mid k_{\nu-1} + k_\nu} - \cdots\cdots (\lambda = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

divergieren muß.

5. Ist der Kettenbruch $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *außerwesentlich divergent*, so besagt ja der Satz I von § 97, Nr. 1, S. 727, daß alsdann der Kettenbruch $b_1 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty$ (nach Null) *konvergiert*. Somit hängt das Verhalten aller weiteren Kettenbrüche von der Form $b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ $(m \geqq 2)$ lediglich davon ab, ob der mit dem Gliede b_1 beginnende Kettenbruch *unbedingt* oder nur *bedingt* konvergiert.

Steht ferner zunächst nur so viel fest, daß *irgendeiner* der Kettenbrüche von der Form $b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ *höchstens außerwesentlich divergiert*, so gilt das gleiche auf Grund der vorhergehenden Bemerkungen nicht nur für jeden durch Weglassung weiterer Anfangsglieder entstehenden Kettenbruch, sondern mit Benützung der Reziprozitätssätze von § 97, Nr. 1 (s. insbesondere S. 726, Zeile 3) für alle Kettenbrüche, welche zum Vorschein kommen, wenn man den Index m sukzessive durch $m-1$, $m-2, \cdots 0$ ersetzt. Hiernach läßt sich das Hauptergebnis der vorstehenden Betrachtungen in folgender Weise aussprechen:

> *Ist der Kettenbruch* $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, wo $|a_\nu| > 0$, *höchstens außerwesentlich divergent, so gilt das gleiche von jedem durch Weglassung von Anfangsgliedern daraus hervorgehenden Kettenbruche, jedoch können in der Folge der Kettenbrüche* $b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ $(m = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ *niemals zwei konsekutive divergieren. Auch wenn nur so viel feststeht, daß irgendeiner der Kettenbrüche* $b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ *höchstens außerwesentlich divergiert, so gilt das*

*gleiche für **jedes** m (einschließlich $m = 0$ und mit dem gleichen Zusatz bezüglich des Verhaltens zweier in dem obigen Sinne konsekutiver Kettenbrüche).*

Aus diesem Ergebnis lassen sich aber unmittelbar noch die folgenden, das Verhalten *wesentlich divergenter* Kettenbrüche charakterisierenden Schlüsse ziehen:

*Ist der Kettenbruch $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, wo $|a_\nu| > 0$, **wesentlich divergent**, so gilt das gleiche von **jedem** durch Weglassung von Anfangsgliedern daraus hervorgehenden Kettenbruche. Umgekehrt ist jener Kettenbruch (und somit auch jeder durch Weglassung von Anfangsgliedern daraus hervorgehende) **wesentlich** divergent, wenn nur **irgendeiner** der Kettenbrüche $b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ **wesentlich** divergiert.*

Hiernach bestimmt die Beschaffenheit eines Kettenbruches von der Form: $b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ bei *beliebig groß* anzunehmendem m oder, wie man auch sagen kann, das *infinitäre Verhalten* der a_ν, b_ν den Charakter des Kettenbruches $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ (unter der Voraussetzung $|a_\nu| > 0$) nur insoweit, als daraus unzweideutig hervorgeht, ob derselbe ***höchstens** außerwesentlich* oder *wesentlich divergiert.* Steht das erstere bereits fest, so hängt die *Konvergenz* noch durchaus von den *Anfangsgliedern* (abgesehen von b_0 und a_1) ab, die *unbedingte Konvergenz* von *jedem einzelnen Gliede* (mit den eben genannten Ausnahmen).

§ 99. Übertragung des Hauptsatzes von § 91 auf unendliche Kettenbrüche. — Einfluß der Null als Teilzähler.

1. Im vorigen Paragraphen haben wir uns insbesondere mit der Frage beschäftigt, welchen Einfluß die *Divergenz* (zumal die *außerwesentliche,* schließlich auch die *wesentliche*) eines Kettenbruches von der Form: $b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ $(m \geqq 1)$ auf das Verhalten des Kettenbruches $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ mit durchweg von Null verschiedenen Teilzählern ausübt. Wir wollen jetzt untersuchen, welcher Zusammenhang im Falle der *Konvergenz* des Kettenbruches $b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ zwischen dessen *Werte* und dem Verhalten des Gesamtkettenbruches $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ ($|a_\nu| > 0$) besteht

Dabei können wir uns von vornherein auf die Annahme $m \geqq 2$ beschränken, da ja der Fall $m = 1$ durch die Betrachtungen von § 97, Nr. 1, S. 726/7, über Kettenbrüche mit *reziproken* Näherungsbrüchen seine unmittelbare Erledigung findet. Danach hat man nämlich, falls $b_1 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty = K \neq 0$ ist: $\left[\frac{1}{b_1}, \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty = \frac{1}{K}$, also: $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = b_0 + \frac{a_1}{K}$ und umgekehrt; während im Falle $K = 0$: $b_0 + \frac{a_1}{K}$ *sinnlos* wird und der Kettenbruch $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *außerwesentlich divergiert* (vgl. a. a O. Satz I) — Ergebnisse, die mit den nunmehr für $m \geqq 2$ abzuleitenden durchaus übereinstimmen.

Nach Analogie der bereits eingeführten Abkürzungen:

$$(K_{m,n}) \equiv b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^n \quad \text{(s. § 91, Nr. 1, Gl. (1), S. 690)}$$

$$(K_\infty) \equiv b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \quad \text{(s. § 97, Nr. 1, Gl. (1), S. 724)}$$

wollen wir einen unendlichen Kettenbruch von der Form:

$$b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$$

mit

$$(K_{m,\infty})$$

bezeichnen (sodaß also (K_∞) die Bedeutung von $(K_{0,\infty})$ hat, wie wir ja auch K_n, A_n, B_n statt $K_{0,n}$, $A_{0,n}$, $B_{0,n}$ zu schreiben pflegen).

Ferner wird im Falle der *Konvergenz* des unendlichen Kettenbruches $(K_{m,\infty})$ der *Wert* desselben mit $K^{(m)}$ bezeichnet (dabei werden wir statt $K^{(0)}$, wie bisher, K schreiben). Es besteht somit in jedem Falle die formale *Identität:*

$$(K_{m,\infty}) \equiv b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty \tag{1}$$

und im Falle der *Konvergenz* von $(K_{m,\infty})$ die *Gleichung:*

$$(K_{m,\infty}) = K^{(m)}. \tag{2}$$

Mit Benützung der Bezeichnung (1) hat man:

$$b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \equiv b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{m-1}|}{|b_{m-1}} + \frac{a_m|}{|(K_{m,\infty})}, \tag{3}$$

und es handelt sich jetzt darum, unter der Voraussetzung (2), die Beziehung dieses unendlichen Kettenbruches zu dem endlichen Kettenbruche:

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{m-1}|}{|b_{m-1}} + \frac{a_m|}{|K^{(m)}} \tag{4}$$

festzustellen, also den Hauptsatz von § 91 in der am Schlusse von Nr. 3, S. 694, gegebenen Fassung auf den Fall eines unendlichen Kettenbruches zu übertragen

2. Durch Division der für $n \geqq m \geqq 2$ geltenden Formeln (1) von Nr. 1 des vorigen Paragraphen ergibt sich:

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{A_{m,n} A_{m-1} + a_m B_{m,n} A_{m-2}}{A_{m,n} B_{m-1} + a_m B_{m,n} B_{m-2}}. \tag{5}$$

Infolge der Voraussetzung (2), welche ja besagt, daß:

$$\lim_{n \to \infty} K_{m,n} \equiv \lim_{n \to \infty} \frac{A_{m,n}}{B_{m,n}} = K^{(m)}, \tag{6}$$

muß $B_{m,n}$ für hinlänglich große n, etwa für $n > n'$, durchweg von Null verschieden sein. Es ist daher für $n > n'$ gestattet, die Beziehung (5), indem man Zähler und Nenner des rechts stehenden Ausdrucks durch $B_{m,n}$ dividiert, in die folgende umzuformen:

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{K_{m,n} A_{m-1} + a_m A_{m-2}}{K_{m,n} B_{m-1} + a_m B_{m-2}}, \tag{7}$$

und hieraus folgt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{K_{m,n} A_{m-1} + a_m A_{m-2}}{K_{m,n} B_{m-1} + a_m B_{m-2}}, \tag{8}$$

sobald nur feststeht, daß *einer* der beiden Grenzwerte (im weitesten Sinne) *existiert*, insbesondere also, wenn er *endlich* ausfällt.

Wir gehen nun *erstens* von der Voraussetzung aus, daß dies für den *links* stehenden Grenzwert gilt, daß also:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_n}{B_n} = K, \text{ mithin: } b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = K. \tag{9}$$

Alsdann ergibt sich zunächst, daß auch:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{K_{m,n} A_{m-1} + a_m A_{m-2}}{K_{m,n} B_{m-1} + a_m B_{m-2}} = K. \tag{10}$$

Dabei steht es frei, den Grenzwert dieses Quotienten durch den Quotienten der betreffenden Grenzwerte, also die Beziehung (10) durch die folgende zu ersetzen:

$$\frac{K^{(m)} A_{m-1} + a_m A_{m-2}}{K^{(m)} B_{m-1} + a_m B_{m-2}} = K, \tag{11}$$

falls der Nenner dieses Ausdrucks *von Null verschieden* ist. Wäre nun aber:

$$K^{(m)} B \quad . + a \; B_- \quad . = 0,$$

so müßte mit Rücksicht auf die Endlichkeit des Grenzwertes (10) auch der Zähler den Grenzwert *Null* besitzen, man hätte also zugleich:

$$K^{(m)} A_{m-1} + a_m A_{m-2} = 0,$$

und aus diesen beiden Beziehungen würde, wenn man die erste mit A_{m-1}, die zweite mit B_{m-1} multipliziert, durch Subtraktion sich ergeben:

$$a_m (A_{m-1} B_{m-2} - A_{m-2} B_{m-1}) = 0,$$

was mit Rücksicht auf die Voraussetzung $|a_\nu| > 0$ unmöglich ist (s. § 93, Nr. 3, Ungl. (9), S. 703). Somit besteht in der Tat die Gleichung (11). Da aber deren linke Seite offenbar die reduzierte Form des folgenden endlichen Kettenbruches:

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{m-1}|}{|b_{m-1}} + \frac{a_m|}{|K^{(m)}} \tag{12}$$

vorstellt, so folgt, daß der letztere den *Wert K* besitzt, also denselben Wert wie der als *konvergent* vorausgesetzte unendliche Kettenbruch $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$.

Wird jetzt *zweitens* angenommen, daß der in Gl. (8) *rechts* stehende Grenzwert eine bestimmte Zahl K ist, daß also Gl. (10) besteht, so läßt sich diese zunächst auf Grund der oben angestellten Betrachtung durch Gl. (11), also schließlich durch die Annahme ersetzen, daß der endliche Kettenbruch (12) den Wert K besitzt. Dann folgt aber aus Gl. (8), daß auch $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = K$, d. h. daß der unendliche Kettenbruch (3) gegen den Wert K *konvergiert.*

Da jedes dieser beiden Ergebnisse die Umkehrung des anderen vorstellt, so liefern sie auch völlig bestimmte Aussagen für den Fall, daß — immer unter der Voraussetzung der *Konvergenz* von $(K_{m,\infty})$ — die sonst noch in Frage kommende Voraussetzung der *Konvergenz* des unendlichen Kettenbruches (3) bzw. der *Bestimmtheit* des endlichen Kettenbruches (12) *nicht* erfüllt ist. Wird nämlich die *Divergenz* des unendlichen Kettenbruches (3) vorausgesetzt (welche übrigens wegen der Konvergenz von $(K_{m,\infty})$ nach Nr. 5 des vorigen Paragraphen jedenfalls nur eine *außerwesentliche* sein kann), so muß der endliche Kettenbruch (12) *sinnlos* werden: denn hätte er einen bestimmten Wert K, so müßte ja jener unendliche Kettenbruch nach K *konvergieren.* Und wird der endliche Kettenbruch (12) als *sinnlos* vorausgesetzt, so kann wiederum der betreffende unendliche Kettenbruch

nicht gegen einen bestimmten Wert K konvergieren, er muß also (außerwesentlich) *divergieren.*[1])

Durch Zusammenfassung dieser Ergebnisse läßt sich also die oben angekündigte Übertragung des *Hauptsatzes* von § 91, Nr. 3 in folgender Weise formulieren:

Ist durchweg $|a_\nu| > 0$ *und ist* $b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty = K^{(m)}$, *so gilt die Gleichung:*

$$(13)\qquad b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{m-1}|}{|b_{m-1}} + \frac{a_m|}{|K^{(m)}},$$

sofern nur feststeht, daß entweder der unendliche Kettenbruch (links) konvergiert oder daß der endliche Kettenbruch (rechts) einen bestimmten Wert besitzt. Wenn der unendliche Kettenbruch divergiert (und zwar dann eo ipso außerwesentlich), so wird der endliche sinnlos, und umgekehrt.

Man kann diesem Satze auch die folgende Form geben:

Unter der Voraussetzung $|a_\nu| > 0$ $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$ *und* $b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty = K^{(m)}$ *besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz des unendlichen Kettenbruches* $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *darin, daß der endliche Kettenbruch* $b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{m-1}|}{|b_{m-1}} + \frac{a_m|}{|K^{(m)}}$ *einen bestimmten Wert besitzt, der dann mit demjenigen des unendlichen Kettenbruches zusammenfällt*

---

1) In dem (ja keineswegs ausdrücklich ausgeschlossenen) Falle $K^{(m)} = 0$ reduziert sich die Gleichung (11) auf die folgende:

$$\frac{A_{m-2}}{B_{m-2}} = K,$$

und man findet daher:

$$b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{A_{m-2}}{B_{m-2}},$$

sofern nur feststeht, daß entweder der unendliche Kettenbruch *konvergiert* oder daß der Näherungsbruch $\frac{A_{m-2}}{B_{m-2}}$ einen *bestimmten Wert* besitzt. Dieses Resultat ist bereits in dem Hauptsatze von Nr. 2 des vorigen Paragraphen enthalten: man braucht nur in dem auf Gl. (18), S. 736, bezüglichen Teil des Satzes $m+1$ durch m zu ersetzen.

3. Der in Gl. (13) enthaltene Satz läßt sich auch in der Weise umkehren, daß er, statt die Konvergenz des Kettenbruches $(K_{m,\infty}) \equiv b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ gegen einen gewissen Wert $K^{(m)}$ zur *Voraussetzung* zu haben, eine *Aussage* über die *Konvergenz* und den *Wert* dieses Kettenbruches liefert, nämlich:

Besteht die Gleichung:

$$b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{\infty} = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{m-1}|}{|b_{m-1}} + \frac{a_m|}{|R} \quad (|a_\nu| > 0), \tag{14}$$

d. h. stellt der endliche Kettenbruch (rechts) eine bestimmte Zahl vor und konvergiert der unendliche Kettenbruch (links) gegen diese, so folgt:

$$(K_{m,\infty}) \equiv b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty} = R. \tag{15}$$

Beweis. Aus Gl. (14) ergibt sich:

$$b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{\infty} = \frac{R A_{m-1} + a_m A_{m-2}}{R B_{m-1} + a_m B_{m-2}} \neq \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} \tag{16}$$

(da ja $A_{m-1} B_{m-2} - A_{m-2} B_{m-1}$ nach § 92, Gl. (VI), S. 696, von Null verschieden), folglich lehrt der Hauptsatz von Nr. 2 des vorigen Paragraphen, daß der Kettenbruch $b_m + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ *konvergieren* muß. Wird sein Wert wieder mit $K^{(m)}$ bezeichnet, so besteht auf Grund des vorigen Satzes die Gleichung (13) und man findet somit, wenn man die reduzierten Formen der rechten Seiten von Gl. (13) und (14) vergleicht, die Beziehung:

$$\frac{K^{(m)} A_{m-1} + a_m A_{m-2}}{K^{(m)} B_{m-1} + a_m B_{m-2}} = \frac{R A_{m-1} + a_m A_{m-2}}{R B_{m-1} + a_m B_{m-2}}, \tag{17}$$

aus welcher (mit Benützung der über $A_{m-1} B_{m-2} - A_{m-2} B_{m-1}$ bereits gemachten Bemerkung) hervorgeht, daß, wie behauptet:

$$K^{(m)} = R, \text{ also: } (K_{m,\infty}) = R.$$

4. Die Konvergenzbetrachtungen dieses und des vorhergehenden Paragraphen (abgesehen von den *Definitionen* der bedingten und unbedingten Konvergenz) bezogen sich ausschließlich auf Kettenbrüche mit durchweg *von Null verschiedenen* Teilzählern. Es ist noch festzustellen, in welcher Weise der schon bei *endlichen* Kettenbrüchen beobachtete Einfluß des Auftretens von *Null* als Teilzähler bei *unendlichen* Kettenbrüchen sich geltend macht.

Es sei $a_{m+1} = 0$, und zwar $m+1$ der *kleinste* Index, für welchen der zugehörige Teilzähler den Wert *Null* hat. Ist alsdann der Kettenbruch $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m$, also der Näherungsbruch $\frac{A_m}{B_m}$ ($m \geqq 1$) *sinnlos*, so gilt das gleiche für *jeden* Näherungsbruch $\frac{A_{m+\varrho}}{B_{m+\varrho}}$ ($\varrho = 1, 2, 3, \cdots\cdots$) nach dem Schlußteile des Satzes von § 93, Nr. 2, S. 703, und der unendliche Kettenbruch $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ ist somit *divergent*. Dabei ist die Divergenz eine *außerwesentliche*, wenn von irgendeiner Stelle ab durchweg $|A_{m+\varrho}| > 0$ ausfällt. Da nach Gl. (4), S. 702: $A_{m+\varrho} = A_m A_{m+1,\, m+\varrho}$ und andererseits: $|A_m| > 0$ (nach § 93, Nr. 3, III, S. 704 — wegen $|a_\nu| > 0$ für $\nu \leqq m$), so ist die fragliche Bedingung erfüllt, wenn $|A_{m+1,\, m+\varrho}| > 0$ für alle ϱ, die eine gewisse Zahl ϱ' übersteigen, und hierzu würde es (auf Grund des soeben zitierten Ergebnisses von § 93) genügen, wenn durchweg $|a_\nu| > 0$ für $\nu > m + \varrho'$, mit anderen Worten, wenn der Kettenbruch $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ nur eine *endliche* Anzahl von Teilzählern $a_\nu = 0$ enthält.

Hat dagegen der Kettenbruch $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m$ einen bestimmten Wert K_m, so besteht für *alle nicht sinnlosen* Näherungsbrüche mit einem Index $n > m$ die Beziehung (s. a. a. O. Gl. (5)):

$$\frac{A_n}{B_n} = K_m. \tag{18}$$

Wenn also der unendliche Kettenbruch $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *überhaupt konvergiert*, so ist sein Wert gleichfalls K_m.

Nun wird jeder Näherungsbruch $\frac{A_{m+\varrho}}{B_{m+\varrho}}$ *sinnlos*, für dessen letzten Index $m+\varrho$ die Beziehung besteht (s. a. a. O. Gl. (8)):

$$b_{m+1} + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+2}^{m+\varrho} = 0. \tag{19}$$

Findet diese letztere also für *unendlich viele* ϱ statt, so enthält die Folge der Näherungsbrüche $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ *unendlich viele sinnlose*, und der unendliche Kettenbruch $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ wird *divergent*. Er *konvergiert* dagegen, wenn die Gleichung (19) höchstens für eine *endliche* Anzahl von Werten ϱ erfüllt ist.

Kapitel II.

Endliche und unendliche Kettenbrüche aus reellen Zahlen.

§ 100. Endliche Kettenbrüche mit positiven Teilzählern und nichtnegativen Teilnennern. — Besondere Eigenschaften der Näherungsbrüche.

1. Es mögen α_ν, β_ν $(\nu = 1, 2, \cdots, n)$ wesentlich *positive* Zahlen bedeuten, während β_0 auch eine *beliebige reelle* Zahl (einschließlich der *Null*) sein kann, und es werde gesetzt:

$$(1) \qquad (\mathrm{K}_n) \equiv \beta_0 + \frac{\alpha_1|}{|\beta_1} + \frac{\alpha_2|}{|\beta_2} + \cdots + \frac{\alpha_n|}{|\beta_n} = \frac{\mathrm{A}_n}{\mathrm{B}_n}.$$

Werden die Näherungsbrüche durchweg mit $\frac{\mathrm{A}_\nu}{\mathrm{B}_\nu} \equiv \mathrm{K}_\nu$ $(\nu = 0, 1, \cdots, n)$ bezeichnet, so folgt aus den Beziehungen:

$$(2) \qquad \mathrm{B}_0 = 1, \quad \mathrm{B}_1 = \beta_1, \quad \mathrm{B}_\nu = \beta_\nu \mathrm{B}_{\nu-1} + \alpha_\nu \mathrm{B}_{\nu-2} \quad (\nu \geqq 2),$$

daß sämtliche *Nenner* B_ν *wesentlich positiv* ausfallen.[1]

Das gleiche gilt wegen:

$$(3) \qquad \mathrm{A}_0 = \beta_0, \quad \mathrm{A}_1 = \beta_1\beta_0 + \alpha_1, \quad \mathrm{A}_\nu = \beta_\nu \mathrm{A}_{\nu-1} + \alpha_\nu \mathrm{A}_{\nu-2} \ (\nu \geqq 2)$$

auch von den *Zählern* A_ν für $\nu \geqq 0$, falls $\beta_0 > 0$, und für $\nu \geqq 1$, falls $\beta_0 = 0$. Ist dagegen $\beta_0 < 0$, so fallen *alle* A_ν *negativ* aus, falls: $\beta_1\beta_0 + \alpha_1 \leqq 0$, während sie im Falle: $\beta_1\beta_0 + \alpha_1 > 0$ von einer gewissen Stelle ab auch *positiv* werden können und sodann auch positiv *bleiben*, wenn von zwei konsekutiven A_ν das eine $\geqq 0$, das andere > 0 ist

Setzt man in der Formel (IX) von § 92, Nr. 2, S. 697, $\varrho = 2$ und berücksichtigt, daß nach § 91, Nr. 1, Gl. (III), S. 692:

$$\mathrm{B}_{\nu+1,\,\nu+2} = \mathrm{A}_{\nu+2,\,\nu+2} = \beta_{\nu+2}$$

(wenn analog den dort eingeführten Bezeichnungen:

$$(\mathrm{K}_{\mu,\,\nu}) \equiv \beta_\mu + \frac{\alpha_{\mu+1}|}{|\beta_{\mu+1}} + \cdots + \frac{\alpha_\nu|}{|\beta_\nu} = \frac{\mathrm{A}_{\mu,\,\nu}}{\mathrm{B}_{\mu,\,\nu}}$$

gesetzt wird), so folgt:

$$(4) \qquad \mathrm{K}_{\nu+2} - \mathrm{K}_\nu = (-1)^\nu \cdot \frac{\alpha_1 \cdots \alpha_{\nu+1}\beta_{\nu+2}}{\mathrm{B}_\nu \mathrm{B}_{\nu+2}}\ ^{2)}$$

---

1) Danach ist also das Vorkommen *sinnloser* Näherungsbrüche bei Kettenbrüchen von der Form (1) und auch solchen, die durch Weglassen von Anfangsgliedern daraus entstehen, ein für allemal ausgeschlossen. Solche Kettenbrüche sind also, wie schon am Schlusse von § 88, S. 679, erwähnt wurde, *durchweg elementare* in dem dort angegebenen Sinne.

2) Die Formel wird etwas eleganter, wenn man ν durch $\nu - 1$ ersetzt, nämlich:

$$\mathrm{K}_{\nu+1} - \mathrm{K}_{\nu-1} = (-1)^{\nu-1} \frac{\alpha_1 \cdots \alpha_\nu \beta_{\nu+1}}{\mathrm{B}_{\nu-1}\mathrm{B}_{\nu+1}}.$$

und daher:

$$\text{(5)} \qquad K_{\nu+2} - K_\nu \begin{cases} > 0, & \text{wenn } \nu \text{ gerade (inkl. } \nu = 0) \\ < 0, & \text{wenn } \nu \text{ ungerade,} \end{cases}$$

sodaß also die Näherungsbrüche mit *geradem* Index eine *monoton zunehmende*, die mit *ungeradem Index* eine *monoton abnehmende* Folge bilden:

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} K_0 < K_2 < \cdots < K_{2\mu} \quad < \cdots < K_{2(\mu+\varrho)} \quad < \cdots \\ K_1 > K_3 > \cdots > K_{2\mu+1} > \cdots > K_{2(\mu+\varrho)+1} > \cdots . \end{cases}$$

Da andererseits aus Formel (VII), § 92, Nr. 2, S. 697, für $\nu = 2\mu + 1$ folgt:

$$\text{(7)} \qquad K_{2\mu+1} - K_{2\mu} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{2\mu+1}}{B_{2\mu} B_{2\mu+1}}, \text{ also } > 0,$$

so hat man zunächst:

$$\text{(8)} \qquad K_{2\mu} < K_{2\mu+1}$$

und daher mit Rücksicht auf die Ungleichungen (6):

$$K_{2\mu} < K_{2(\mu-\varrho)+1} \text{ und: } K_{2\mu} < K_{2(\mu+\varrho)} < K_{2(\mu+\varrho)+1},$$

also schließlich:

$$\text{(9)} \qquad K_{2\mu} < K_{2\lambda+1}$$

bei beliebiger Wahl von μ und λ, d. h. *jeder* Näherungsbruch mit *geradem* Index ist *kleiner* als *jeder* mit *ungeradem* Index.

Ist sodann die Gliederzahl n des Kettenbruches eine *gerade*, so hat man:

$$\text{(10a)} \qquad K_0 < K_2 < \cdots < K_{n-2} < K_n < K_{n-1} < \cdots < K_3 < K_1$$

und im Falle eines *ungeraden* n:

$$\text{(10b)} \qquad K_0 < K_2 < \cdots < K_{n-1} < K_n < K_{n-2} < \cdots < K_3 < K_1.$$

Die Brüche $K_\nu \equiv \frac{A_\nu}{B_\nu}$ gewinnen also hier den (schon in § 89, Nr. 1 am Schlusse der Fußnote 1, S. 682, angekündigten) prägnanteren Charakter von *Näherungs*brüchen in dem Sinne, daß ihre *Werte* bei wachsendem ν dem *Werte* des Kettenbruches $\alpha_0 + \left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^n$ sich mehr und mehr *nähern*, und zwar bei *geradem ν wachsend* von der Seite der *kleineren* Zahlen, bei *ungeradem ν abnehmend* von der Seite der *größeren* Zahlen.

Da im übrigen aus (10a, b) folgt, daß:

$$\text{(11)} \qquad K_{2\mu} < K_n \begin{cases} < K_{2\mu-1} \\ < K_{2\mu+1}, \end{cases}$$

so kann man den Inhalt dieser Ungleichungen auch dahin zusammenfassen, daß K stets *zwischen* K . und K ($\nu = 1, 2, \cdots n - 1$) liegt.

2. Während aus den Ungleichungen (10a, b) nur so viel hervorgeht, daß $K_{\nu+1}$ stets *näher* an K_n liegt als $K_{\nu-1}$, so legt die zuletzt gemachte Aussage die Frage nahe, ob auch für K_ν und $K_{\nu-1}$ die analoge Beziehung stattfindet. Diese Frage ist nicht ohne weiteres, wohl aber dann zu bejahen, wenn die α_ν, β_ν $(\nu \geqq 1)$ noch gewissen Nebenbedingungen genügen, nämlich den folgenden:

$$(12) \qquad \beta_\nu \geqq \alpha_\nu \text{ und zugleich: } \beta_\nu \geqq 1 \quad (\nu = 1, 2, \cdots n).$$

Infolge der zweiten dieser Bedingungen *nehmen* die (ja bereits in Nr. 1 als wesentlich *positiv* erkannten) B_ν mit ν *monoton zu*, wegen:

$$(13) \qquad B_\nu = \beta_\nu B_{\nu-1} + \alpha_\nu B_{\nu-2} > B_{\nu-1}.$$

Da *sinnlose* Näherungsbrüche in dem vorliegenden Zusammenhange nicht vorkommen können, so liefert der Hauptsatz von § 91, Nr. 3, S. 694, für $\varrho \geqq 1$ die Beziehung:

$$(14) \quad K_{\nu+\varrho} = \beta_0 + \frac{\alpha_1|}{|\beta_1} + \cdots + \frac{\alpha_\nu|}{|\beta_\nu} + \frac{\alpha_{\nu+1}\;\;|}{|K_{\nu+1,\,\nu+\varrho}} = \frac{K_{\nu+1,\,\nu+\varrho} A_\nu + \alpha_{\nu+1} A_{\nu-1}}{K_{\nu+1,\,\nu+\varrho} B_\nu + \alpha_{\nu+1} B_{\nu-1}},$$

wo:

$$(15) \quad K_{\nu+1,\,\nu+\varrho} = \beta_{\nu+1} + \frac{\alpha_{\nu+2}|}{|\beta_{\nu+2}} + \cdots + \frac{\alpha_{\nu+\varrho}|}{|\beta_{\nu+\varrho}} \geqq \beta_{\nu+1} \geqq \alpha_{\nu+1}.^{1)}$$

Aus Gl. (14) findet man:

$$(16) \qquad K_{\nu+\varrho} B_\nu - A_\nu = - \frac{\alpha_{\nu+1}}{K_{\nu+1,\,\nu+\varrho}} (K_{\nu+\varrho} B_{\nu-1} - A_{\nu-1})$$

und daher mit Rücksicht auf die in (15) enthaltene Ungleichung:

$$(17) \qquad |K_{\nu+\varrho} B_\nu - A_\nu| \leqq |K_{\nu+\varrho} B_{\nu-1} - A_{\nu-1}|,$$

wo das *Gleichheits*zeichen nur gilt, wenn gleichzeitig $\varrho = 1$, $\beta_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1}$ (s. Fußnote 1). Die Differenzen $K_{\nu+\varrho} B_\nu - A_\nu$ haben also, wie aus (16) hervorgeht, alternierendes Vorzeichen[2]) und *ihre absoluten Beträge nehmen mit wachsendem* ν *monoton ab* (abgesehen von dem eben erwähnten Sonderfall, in welchem *Gleichheit* zweier konsekutiver Absolutwerte stattfindet).

Multipliziert man Ungl. (17) mit $\frac{1}{B_\nu}$ und zieht rechts den Faktor $B_{\nu-1}$ heraus, so folgt weiter:

$$(18) \quad |K_{\nu+\varrho} - K_\nu| \leqq \frac{B_{\nu-1}}{B_\nu} \cdot |K_{\nu+\varrho} - K_{\nu-1}| < |K_{\nu+\varrho} - K_{\nu-1}| \quad \text{(s. Ungl. (13))}$$

---

1) Das *erste Gleichheits*zeichen würde nur für $\varrho = 1$ gelten (in welchem Falle ja $K_{\nu+1,\,\nu+1} = \beta_{\nu+1}$ wird), das *zweite*, wenn dann außerdem: $\beta_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1}$ (was ja auf Grund der ersten Bedingung (12) zulässig ist).

2) Dabei hat $K_{\nu+\varrho} B_\nu - A_\nu$ das Vorzeichen von $(-1)^\nu$, da für $\nu = 0$, $\varrho \geqq 1$ sich ergibt:

$$K_\varrho B_0 - A_0 = K_\varrho - \beta_0 > 0.$$

und durch wiederholte Anwendung dieser Ungleichung:

$$(19) \qquad |K_{\nu+\varrho} - K_\nu| < |K_{\nu+\varrho} - K_\mu| \quad (\mu < \nu,\ \varrho \geqq 1),$$

also insbesondere für $\nu + \varrho = n$:

$$(20) \quad |K_n - K_\nu| < |K_n - K_\mu| \quad (\mu < \nu < n, \text{ übrigens offenbar auch für } \nu = n).$$

Somit ergibt sich der folgende Satz:

Genugen die positiven Zahlen α_ν, β_ν $(\nu = 1, 2, \cdots n)$ den Bedingungen (12), so liegt jeder Näherungsbruch einem Näherungsbruch mit höherem Index bzw. dem Werte des Gesamt-Kettenbruches n ä h e r *als irgendeiner seiner Vorgänger.*

3 Sind alle $\alpha_\nu = 1$, gehört also der Kettenbruch der *ersten Hauptform* an (s. § 94, Nr. 4, S. 710), so reduzieren sich die beiden Bedingungen (12) auf die eine:

$$(21) \qquad \beta_\nu \geqq 1 \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n).$$

Die Differenzenformel (VII) von § 92, Nr. 2, S. 697, nimmt alsdann die einfache Form an:

$$(22) \qquad K_\nu - K_{\nu-1} = \frac{(-1)^{\nu-1}}{B_{\nu-1} B_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

und daraus folgt insbesondere für $\nu = n$:

$$(23\text{a}) \qquad |K_n - K_{n-1}| = \frac{1}{B_{n-1} B_n} < \frac{1}{B_{n-1}^2} \quad (\text{s Ungl. (13)}).$$

Nimmt man andererseits $\nu \leqq n - 2$ an, so liegt auf Grund der Schlußbemerkung von Nr. 1 dieses Paragraphen K_n *zwischen* K_ν und $K_{\nu+1}$, sodaß also:

$$|K_n - K_\nu| < |K_{\nu+1} - K_\nu|$$

und daher, wenn man in Gl. (22) ν durch $\nu + 1$ ersetzt:

$$(23\text{b}) \qquad |K_n - K_\nu| < \frac{1}{B_\nu B_{\nu+1}} < \frac{1}{B_\nu^2} \quad (\nu = 0, 1, \cdots, n-2).$$

Durch Zusammenfassung dieser Beziehung mit der zuvor unter (23a) angegebenen, der Annahme $\nu = n - 1$ entsprechenden, ergibt sich:

Ist: $K_n = \beta_0 + \left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_1^n$, *wo* $\beta_\nu \geqq 1$ $(\nu = 1, 2, \cdots, n)$, *so hat man:*

$$(23) \qquad |K_n - K_\nu| \leqq \frac{1}{B_\nu B_{\nu+1}} < \frac{1}{B_\nu^2} \ \textit{für: } \nu = 0, 1, \cdots, (n-1).$$

Dabei gilt das Gleichheitszeichen nur für den Fall: $\nu = n - 1$

4. Wir wollen noch untersuchen, inwieweit die in Nr. 1 festgestellten Eigenschaften der A_ν, B_ν, K_ν bestehen bleiben, bzw. Abänderungen erleiden, wenn für die Teilnenner β_ν auch der Wert *Null* zugelassen wird (während nach wie vor durchweg: $\alpha_\nu > 0$ vorausgesetzt wird). Aus der Rekursionsformel:

$$B_\nu = \beta_\nu B_{\nu-1} + \alpha_\nu B_{\nu-2}$$

folgt, daß in *jedem* Falle:

$$(24) \qquad B_\nu \geqq \alpha_\nu B_{\nu-2},$$

also bei fortgesetzter Anwendung dieser Beziehung, wenn man noch die Fälle $\nu = 2\mu$ und $\nu = 2\mu + 1$ trennt und berücksichtigt, daß: $B_0 = 1$, $B_1 = \beta_1$:

$$(25) \quad B_{2\mu} \geqq \alpha_{2\mu}\alpha_{2\mu-2}\cdots\alpha_2, \quad B_{2\mu+1} \geqq \alpha_{2\mu+1}\alpha_{2\mu-1}\cdots\alpha_3\beta_1 \quad (\mu \geqq 1).$$

Die $B_{2\mu}$ sind also *unter allen Umstanden von Null verschieden*, und das *gleiche* gilt von den $B_{2\mu+1}$, *sofern nur feststeht*, daß $\beta_1 > 0$. Ist also diese letztere Bedingung erfüllt, so ist das Vorkommen *sinnloser Näherungsbrüche* definitiv ausgeschlossen, auch wenn für $\nu > 1$ beliebig oft oder sogar beständig $\beta_\nu = 0$ ist.

Für die A_ν findet man, falls $\beta_0 \geqq 0$, analog:

$$(26) \qquad \begin{aligned} A_{2\mu} &\geqq \alpha_{2\mu} A_{2\mu-2} \geqq \alpha_{2\mu}\alpha_{2\mu-2}\cdots\alpha_2\beta_0, \\ A_{2\mu+1} &\geqq \alpha_{2\mu+1} A_{2\mu-1} \geqq \alpha_{2\mu+1}\alpha_{2\mu-1}\cdots\alpha_1, \end{aligned}$$

sodaß also *alle* $A_{2\mu+1}$ wesentlich *positiv* ausfallen, und das gleiche gilt für die $A_{2\mu}$, wenn $\beta_0 > 0$ (anderenfalls, wegen: $A_{2\mu} \geqq \beta_{2\mu} \cdot A_{2\mu-1}$, für $\mu \geqq m$, wenn $\beta_{2m} > 0$). Im Falle $\beta_0 < 0$ ergeben sich entsprechende Modifikationen wie in Nr. 1.

Läßt man die Bedingung $\beta_1 > 0$ fallen und ist etwa m der kleinste Index, für welchen $\beta_{2m+1} > 0$, so nimmt die Rekursionsformel für $\mu = 1, 2, \cdots (m-1)$ die Form an:

$$B_{2\mu+1} = \alpha_{2\mu+1} B_{2\mu-1} = \alpha_{2\mu+1}\alpha_{2\mu-1}\cdots\alpha_3\beta_1 = 0,$$

während:

$$B_{2m+1} = \beta_{2m+1} B_{2m} > 0$$

und daher nach (24) auch für $\mu > m$:

$$B_{2\mu+1} > 0.$$

In diesem Falle, d. h. wenn: $\beta_1 = \beta_3 = \cdots = \beta_{2m-1} = 0$, werden also die *ersten* $m-1$ Näherungsbrüche mit *ungeradem* Index *sinnlos*, jedoch *kein* weiterer, falls $\beta_{2m+1} > 0$ (übrigens auch, wie aus dem oben Gesagten hervorgeht, *kein einziger* mit *geradem* Index). Sind also *nicht alle* $\beta_{2\mu+1} = 0$, so gibt es von einer bestimmten Stelle an *keine sinnlosen* Näherungsbrüche.

Aus der *ersten* der für die Näherungsbrüche geltenden Differenzenformeln:

$$K_{\nu+1}-K_\nu=(-1)^\nu\cdot\frac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\nu+1}}{B_\nu B_{\nu+1}},\quad K_{\nu+2}-K_\nu=(-1)^\nu\cdot\frac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\nu+1}}{B_\nu B_{\nu+2}}\cdot\beta_{\nu+2}$$

folgt, daß geradeso wie früher: $K_{2\mu}<K_{2\mu+1}$ (mit Ausschluß der Gleichheit und unter der Voraussetzung, daß $K_{2\mu+1}$ nicht *sinnlos* ausfällt), während die *zweite* Formel, mit Berücksichtigung der nunmehr zulässigen Möglichkeit: $\beta_{\nu+2}=0$, ergibt: $K_{2\mu}\leqq K_{2\mu+2}$ bzw. $K_{2\mu-1}\geqq K_{2\mu+1}$ (wobei das *Gleichheits*zeichen gilt, falls: $\beta_{2\mu+2}=0$ bzw. $\beta_{2\mu+1}=0$ und *nicht* zugleich: $\beta_{2\mu-1}=\cdots=\beta_3=\beta_1=0$). Hiernach ergibt sich insbesondere im Falle $\beta_1>0$ (in welchem ja das Vorkommen *sinnloser* Näherungsbrüche ausgeschlossen ist):

$$(27)\qquad K_0\leqq K_2\leqq\cdots\leqq K_n\leqq\cdots\leqq K_3\leqq K_1$$

(wobei von den zu *beiden* Seiten von K_n auftretenden Gleichheitszeichen selbstverständlich nur das *eine* Geltung haben kann, nämlich das *erste*, wenn n *gerade*, das *zweite*, wenn n *ungerade* und zugleich $\beta_n=0$). Ist dagegen: $\beta_1=\cdots=\beta_{2m-1}=0$, so bricht die Folge der *nicht-sinnlosen* Näherungsbrüche mit K_{2m+1} ab, bzw. K_n wird selbst *sinnlos*, wenn: $n=2m-1$.

§ 101. Endliche regelmäßige Kettenbrüche. — Identitätssatz. — Besondere Eigenschaften der Näherungsbrüche. — Lineare Diophantische Gleichungen.

1. Spezialisiert man die zuvor betrachteten Kettenbrüche von der Form $\beta_0+\left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_1^n$ noch in der Weise, daß man unter den Teilnennern β_ν für $\nu\geqq1$ durchweg *natürliche* Zahlen versteht, während β_0 eine *beliebige ganze* Zahl (einschließlich der *Null*) sein kann, so kommt diejenige einfachste Gattung von Kettenbrüchen zum Vorschein, welche den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen über Kettenbrüche bildeten und in § 88, Nr. 2, S. 671, als *regelmäßige* Kettenbrüche bezeichnet wurden.[1]) Ihre Näherungsbrüche besitzen dann außer den bereits im vorigen Paragraphen entwickelten Eigenschaften (s. insbesondere die Beziehungen (10a, b), (11), (13), (19), (20), (22), (23)) noch gewisse andere wesentlich *zahlentheoretischer* Natur, die von der *Ganzzahligkeit* der β_ν herrühren.

Aus den Grundformeln:

$$(1)\qquad B_0=1,\ B_1=\beta_1,\ B_\nu=\beta_\nu B_{\nu-1}+B_{\nu-2}\quad(\text{wo: }\beta_\nu\geqq1)$$

---

1) Man findet in der Literatur gelegentlich auch die Bezeichnungen *einfache* oder *gewöhnliche* Kettenbrüche.

folgt zunächst, daß die B_ν durchweg *natürliche* Zahlen sind, die im übrigen (zum mindesten mit $\nu \geqq 2$ anfangend[1])) gleichzeitig mit ν *monoton zunehmen* (wie schon bei den Kettenbrüchen von Nr. 2 und 3 des vorigen Paragraphen — s. Ungl. (13), S. 749).

Das gleiche gilt auf Grund der Formeln.

$$(2) \qquad A_0 = \beta_0, \; A_1 = \beta_1\beta_0 + 1, \; A_\nu = \beta_\nu A_{\nu-1} + A_{\nu-2}$$

für die A_ν, falls $\beta_0 \geqq 0$.[2]) Ist dagegen: $\beta_0 < 0$, d. h. $\beta_0 \leqq -1$, so folgt offenbar: $A_1 \leqq 0$, mithin werden alle weiteren A_ν *negativ* und mit ν *numerisch zunehmend.*

Da ferner aus Gl. (VI), § 92, S. 696, folgt:

$$(3) \qquad A_\nu B_{\nu-1} - A_{\nu-1} B_\nu = (-1)^{\nu-1},$$

so können A_ν, B_ν keinen gemeinsamen Teiler haben, mithin erscheinen alle Näherungsbrüche $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ von vornherein in der Form *reduzierter* Brüche.

Den letzten Teilnenner eines regelmäßigen Kettenbruches können wir, wie schon in § 88, Nr. 2, S. 671, hervorgehoben wurde, nach Belieben als > 1 oder als $= 1$ voraussetzen oder auch, was auf dasselbe hinausläuft, den Kettenbruch so anschreiben, daß seine Gliederzahl nach Belieben eine *gerade* oder *ungerade* ist. Dies vorausgeschickt, gilt der folgende wichtige Satz:

Zwei gleichwertige regelmäßige Kettenbrüche, deren letzter Teilnenner größer als 1 ist, sind identisch.

Beweis. Da:

$$(4) \qquad \beta_m + \left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_{m+1}^{n} > \beta_m > 1 \quad (\text{für } m = 1, 2, \cdots (n-1))$$

und der Kettenbruch $\left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_m^n$ den reziproken Wert des Kettenbruches (4) darstellt, so folgt, daß durchweg:

$$(5) \qquad 0 < \left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_m^n < 1$$

(und zwar unter der über β_n gemachten Voraussetzung auch noch für $m = n$). Angenommen nun, man habe:

$$(6_0) \qquad \beta_0' + \left[\frac{1}{\beta_\nu'}\right]_1^{n'} = \beta_0 + \left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_1^{n}, \text{ wo: } n' \geqq n,$$

also:

$$(7_0) \qquad \beta_0' - \beta_0 = \left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_1^{n} - \left[\frac{1}{\beta_\nu'}\right]_1^{n'},$$

1) Im Falle $\beta_1 = 1$ wäre noch $B_1 = B_0$, sodann aber: $B_2 = \beta_2 + 1 > B_1$ usf.

2) Ist: $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1$, so wird: $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, also: $A_2 = A_1$ und erst: $A_3 = A_2 + 1 > A_2$ usf.

so folgt, da die *linke* Seite dieser Gleichung eine ganze Zahl (einschließlich der Null), der absolute Betrag der *rechten* kleiner als 1 ist, daß beide Seiten den Wert 0 haben müssen, und man findet somit:

$$(8_0) \qquad \beta_0' = \beta_0, \quad \left[\frac{1}{\beta_\nu'}\right]_1^{n'} = \left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_1^n$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen ergibt sich als Gleichung für die reziproken Werte:

$$(6_1) \qquad \beta_1' + \left[\frac{1}{\beta_\nu'}\right]_2^{n'} = \beta_1 + \left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_2^n$$

und hieraus durch die zuvor benützte Schlußweise:

$$(8_1) \qquad \beta_1' = \beta_1, \quad \left[\frac{1}{\beta_\nu'}\right]_2^{n'} = \left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_2^n.$$

In dieser Weise weiter fort schließend gelangt man zu der Beziehung:

$$(6_n) \qquad \beta_n' + \left[\frac{1}{\beta_\nu'}\right]_{n+1}^{n'} = \beta_n,$$

aus der mit Notwendigkeit folgt, daß:

$$(8_n) \qquad \beta_n' = \beta_n, \quad \left[\frac{1}{\beta_\nu'}\right]_{n+1}^{n'} = 0, \text{ d. h. } n' = n.$$

Damit ist der ausgesprochene Satz bewiesen

2. In § 88, Nr. 2, S. 669 ff., wurde bereits gezeigt, daß jede positive gebrochene Rationalzahl $\frac{\xi_0}{\xi_1}$ bzw. $\frac{\xi_1}{\xi_0}$ (ξ_0 relativ prim zu ξ_1 und $\xi_0 > \xi_1$) durch einen regelmäßigen Kettenbruch dargestellt werden kann.[1]) Dieses

1) Treten an die Stelle von ξ_0, ξ_1 zwei Zahlen, ξ_0', ξ_1', die einen von 1 verschiedenen größten Gemeinteiler ϑ haben, also $\xi_0' = \vartheta\xi_0$, $\xi_1' = \vartheta\xi_1$, wo ξ_0, ξ_1 wieder relativ prim zueinander sind, so liefert der Euklidische Algorithmus an Stelle des Gleichungssystems (1), S. 670, das durch Multiplikation jeder einzelnen Gleichung mit ϑ daraus hervorgehende, also:

$$\begin{aligned} \vartheta\xi_0 &= \beta_0\vartheta\xi_1 + \vartheta\xi_2 \\ \vartheta\xi_1 &= \beta_1\vartheta\xi_2 + \vartheta\xi_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \vartheta\xi_{n-1} &= \beta_{n-1}\vartheta\xi_n + \vartheta \\ \vartheta\xi_n &= \beta_n\vartheta \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem liefert aber für $\frac{\vartheta\xi_0}{\vartheta\xi_1} \equiv \frac{\xi_0'}{\xi_1'}$ genau *dieselbe* Kettenbruchdarstellung wie diejenige, welche für $\frac{\xi_0}{\xi_1}$ sich ergeben hat. Der letzte Näherungsbruch dieses Kettenbruches ist also nicht identisch mit $\frac{\xi_0'}{\xi_1'}$, sondern mit der reduzierten Form $\frac{\xi_0}{\xi_1}$ dieses Bruches

Resultat läßt sich jetzt dahin vervollständigen, daß eine solche Darstellung nur auf eine einzige Weise möglich ist, sobald bezüglich des letzten Teilnenners (oder auch der Gliederzahl) die oben angegebene Einschränkung gemacht wird.

Hierzu sei noch ergänzend bemerkt, daß sich auch jeder *negative* (echte oder unechte) Bruch in einen regelmäßigen Kettenbruch (mit negativem Anfangsgliede) entwickeln läßt. Man hat nämlich (immer unter der Voraussetzung $\xi_0 > \xi_1$):

$$(9) \qquad -\frac{\xi_1}{\xi_0} = -1 + \frac{\xi_0 - \xi_1}{\xi_0}$$

und (aus: $\frac{\xi_0}{\xi_1} = \beta_0 + \frac{\xi_2}{\xi_1}$, wo: $\xi_2 < \xi_1$):

$$(10) \qquad -\frac{\xi_0}{\xi_1} = -\beta_0 - \frac{\xi_2}{\xi_1} = -(\beta_0 + 1) + \frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1},$$

sodaß es schließlich nur darauf ankommt, die *positiven* (echten) Brüche $\frac{\xi_0 - \xi_1}{\xi_0}$, $\frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1}$ in regelmäßige Kettenbrüche zu verwandeln.

3. Bedeutet ϱ eine beliebige gebrochene Zahl, so existiert also eine eindeutig bestimmte Darstellung von der Form:

$$(11) \qquad \varrho = \beta_0 + \left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_1^n,$$

wo β_0 eine gewisse ganze Zahl (einschließlich der Null) bedeutet, während die β_ν für $\nu \geqq 1$ natürliche Zahlen mit dem ausdrücklichen Zusatz $\beta_n \geqq 2$ sind. Man hat sodann: $\varrho = \frac{A_n}{B_n}$ und im übrigen nach Ungl. (23) des vorigen Paragraphen, S. 750:

$$(12) \qquad \left|\varrho - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| \leqq \frac{1}{B_\nu B_{\nu+1}} < \frac{1}{B_\nu^2} \quad (\nu = 0, 1, \cdots (n-1))$$

(wobei das vorhandene *Gleichheits*zeichen nur im Falle $\nu = n - 1$ gilt). Zugleich liegt ϱ stets *zwischen* $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$ und $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \cdots n-1)$ und zwar *näher* an $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ (s. Nr. 1 und 2 des vorigen Paragraphen), sodaß also:

$$(13) \qquad \left|\varrho - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| < \left|\varrho - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right| \quad (\nu = 1, 2, \cdots n).$$

Übrigens besteht sogar die stärkere[1]) Ungleichung:

$$(14) \qquad |\varrho B_\nu - A_\nu| < |\varrho B_{\nu-1} - A_{\nu-1}|,$$

---

1) Aus Ungl. (13) würde durch Multiplikation mit B_ν nur folgen, daß $|\varrho B_\nu - A_\nu| < \frac{B_\nu}{B_{\nu-1}} \cdot |\varrho B_{\nu-1} - A_{\nu-1}|$, wo $\frac{B_\nu}{B_{\nu-1}} > 1$. Dagegen ergibt sich umgekehrt aus Ungl. (14).

$$\left|\varrho - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| < \frac{B_{\nu-1}}{B_\nu} \cdot \left|\varrho - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right| < \left|\varrho - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right|.$$

wie unmittelbar aus Ungl. (17) des vorigen Paragraphen, S. 749, hervorgeht, wenn man daselbst $\nu + \varrho = n$ setzt und beachtet, daß der a. a. O. angeführte Fall der Gleichheit infolge der Voraussetzung $\beta_n > 1$ (also: $\beta_n > \alpha_n$) hier definitiv ausgeschlossen ist.

Die Näherungsbrüche $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ oder, wie man auch zu sagen pflegt, die Näherungsbrüche von ϱ besitzen überdies noch insofern einen ganz spezifischen Charakter, als jeder derselben der Bruch mit *kleinstem* Nenner ist, durch welchen (in einem sogleich noch genauer anzugebenden Sinne) ein bestimmtes Maß von Annäherung an die Zahl ϱ erzielt wird Es gilt nämlich der folgende Satz:

Bedeutet $\frac{A'}{B'}$ (wo $B' > 0$) *irgendeinen Bruch, der zwischen zwei konsekutiven Näherungsbrüchen* $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$ *und* $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ *liegt oder der Zahl* $\varrho = \frac{A_n}{B_n}$ *näher kommt als irgendein bestimmter Näherungsbruch* $\frac{A_\nu}{B_\nu}$, *so ist stets:*

$$B' > B_\nu. \tag{15}$$

Beweis. Liegt $\frac{A'}{B'}$ zwischen $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$ und $\frac{A_\nu}{B_\nu}$, so hat man zunächst:

$$\left|\frac{A_\nu}{B_\nu} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right| > \left|\frac{A'}{B'} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right| > 0. \tag{16}$$

Nun ist (s. Gl. (22) des vorigen Paragraphen, S. 750):

$$\left|\frac{A_\nu}{B_\nu} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right| = \frac{1}{B_{\nu-1} B_\nu},$$

sodaß sich durch Einsetzen in die linke Seite von Ungl. (16) und Multiplikation mit $B_{\nu-1}B'$ ergibt:

$$\frac{B'}{B_\nu} > |A'B_{\nu-1} - B'A_{\nu-1}| > 0. \tag{17}$$

Da aber die *positive* Zahl $|A'B_{\nu-1} - B'A_{\nu-1}|$ eine *ganze* Zahl und somit mindestens $= 1$ sein muß, so folgt:

$$\frac{B'}{B_\nu} > 1, \text{ also, wie behauptet: } B' > B_\nu.$$

Es werde jetzt zweitens angenommen, daß $\frac{A'}{B'}$ näher an $\varrho = \frac{A_n}{B_n}$ liege als irgendein beliebig herausgegriffener der Brüche $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ $(\nu < n)$, sodaß also:

$$\left|\varrho - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| > \left|\varrho - \frac{A'}{B'}\right|. \tag{18}$$

Nun liegt ϱ *zwischen* $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$ und $\frac{A_\nu}{B_\nu}$, d. h. man hat

$$\text{entweder: } \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} < \varrho < \frac{A_\nu}{B_\nu} \quad \text{oder: } \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} > \varrho > \frac{A_\nu}{B_\nu}$$

und überdies mit Berücksichtigung von Ungl. (13) und (18):

$$\left|\varrho - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right| > \left|\varrho - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| > \left|\varrho - \frac{A'}{B'}\right|.$$

Daraus folgt aber, daß $\frac{A'}{B'}$ entweder zwischen $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$ und ϱ oder zwischen ϱ und $\frac{A_\nu}{B_\nu}$, also schließlich in jedem Falle zwischen $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$ und $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ liegen muß und daß daher auf Grund des zuvor gefundenen Ergebnisses wieder, wie behauptet:

$$B' > B_\nu.$$

4. Versteht man unter α, β zwei *relativ prime* natürliche Zahlen, also unter $\frac{\alpha}{\beta}$ einen *positiven* (echten oder unechten) *reduzierten* Bruch und unter $\frac{A_n}{B_n}$ den letzten Näherungsbruch des mit $\frac{\alpha}{\beta}$ gleichwertigen regelmäßigen Kettenbruches, so hat man: $A_n = \alpha$, $B_n = \beta$, und die Differenzenformel (3) liefert daher für $\nu = n$ die Beziehung:

$$\alpha B_{n-1} - \beta A_{n-1} = (-1)^{n-1}. \tag{19}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $(-1)^{n-1} \cdot \gamma$, wo γ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet, und schreibt $\varepsilon^2\beta$ statt β, wo $\varepsilon = \pm 1$, so nimmt sie die Form an:

$$\alpha \cdot \left((-1)^{n-1} \cdot \gamma B_{n-1}\right) - \varepsilon\beta \cdot \left((-1)^{n-1} \cdot \varepsilon\gamma A_{n-1}\right) = \gamma \tag{20}$$

und die Vergleichung mit der „*Diophantischen*“ oder „*unbestimmten*“ Gleichung:

$$\alpha\xi - \varepsilon\beta\eta = \gamma \quad (\text{wo: } \varepsilon = \pm 1) \tag{21}$$

zeigt, daß dieser Gleichung genügt wird, wenn man setzt:

$$\xi = (-1)^{n-1} \cdot \gamma B_{n-1}, \quad \eta = (-1)^{n-1} \cdot \varepsilon\gamma A_{n-1}. \tag{22}$$

Man findet also auf diese Weise zunächst *ein* ganzzahliges Lösungspaar der unbestimmten Gleichung (21). Daraus lassen sich dann aber leicht *alle möglichen* ganzzahligen Lösungspaare jener Gleichung ableiten. Bedeutet nämlich ξ_1, η_1 *irgendein* ganzzahliges Lösungspaar und setzt man hierauf:

$$\xi = \xi_1 + \xi', \quad \eta = \eta_1 + \eta', \tag{23}$$

so genügen ξ und η dann und nur dann der Gleichung (21), wenn:

$$\alpha(\xi_1 + \xi') - \varepsilon\beta(\eta_1 + \eta') = \gamma;$$

d. h., wegen: $\alpha\xi_1 - \varepsilon\beta\eta_1 = \gamma$, wenn:

$$\alpha\xi' - \varepsilon\beta\eta' = 0,$$

also (abgesehen von der keine neuen Lösungen liefernden Möglichkeit $\xi' = 0$, $\eta' = 0$), wenn:

$$\frac{\xi'}{\eta'} = \varepsilon \cdot \frac{\beta}{\alpha}. \tag{24}$$

Da aber α und β *relativ prim* sind und ξ', η' *ganze* Zahlen sein sollen, so wird dieser Bedingung nur genügt[1]), wenn gesetzt wird:

$$\xi' = \varepsilon\lambda\beta, \quad \eta' = \lambda\alpha, \quad \text{wo: } \lambda = \pm 1, \pm 2, \cdot \quad . \tag{25}$$

Somit liefert jedes Wertepaar von der Form:

$$\xi = \xi_1 + \varepsilon\lambda\beta, \quad \eta = \eta_1 + \lambda\alpha \quad (\lambda = \pm 1, \pm 2, \qquad) \tag{26}$$

ein neues ganzzahliges Lösungspaar von Gl. (21), und alle möglichen ganzzahligen Lösungspaare sind (mit Hinzunahme von $\lambda = 0$) in dieser Form enthalten.

Folglich ergibt sich:

Sind α, β natürliche, zueinander relativ prime[2]) *Zahlen, γ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl und $\varepsilon = \pm 1$, so besitzt die (lineare) Diophantische Gleichung:*

$$\alpha\xi - \varepsilon\beta\eta = \gamma$$

unendlich viele ganzzahlige Lösungspaare, nämlich:

$$\xi = (-1)^{n-1} \cdot \gamma B_{n-1} + \varepsilon\lambda\beta, \quad \eta = (-1)^{n-1} \cdot \varepsilon\gamma A_{n-1} + \lambda\alpha \tag{27}$$
$$(\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots),$$

wo A_{n-1}, B_{n-1} den vorletzten Näherungsbruch-Zähler und -Nenner des regelmäßigen Kettenbruches für $\frac{\alpha}{\beta}$ bedeuten

---

1) Da $\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$, so kann man selbstverständlich auch setzen

$$\xi' = \lambda\beta, \quad \eta' = \varepsilon\lambda\alpha$$

was aber im Falle $\varepsilon = +1$ mit (25) vollständig zusammenfällt und im Falle $\varepsilon = -1$ infolge der Bedeutung von λ nur auf eine andere *Schreibweise* von (25) hinausläuft (indem nämlich $\varepsilon\lambda$ an die Stelle von λ tritt).

2) Wären α, β *nicht* relativ prim, sondern hätten einen (von 1 verschiedenen) größten Gemeinteiler ϑ, so muß offenbar, wenn die Gleichung:

$$\alpha\xi - \varepsilon\beta\eta = \gamma$$

überhaupt ganzzahlige Lösungen besitzen soll, auch γ durch ϑ teilbar sein. Wird dann gesetzt:

$$\alpha = \vartheta \cdot \alpha', \quad \beta = \vartheta \cdot \beta', \quad \gamma = \vartheta \cdot \gamma',$$

so läßt sich die obige Gleichung durch Division mit ϑ auf die Form bringen

$$\alpha'\xi - \varepsilon\beta'\eta = \gamma',$$

wo jetzt α', β' *relativ prim* sind, sodaß also die Aufgabe auf den im Text behandelten Fall zurückgeführt ist.

Beispiel. Es sei die Diophantische Gleichung vorgelegt:

$$153\,x - 127\,y = 10.$$

Der zur Verwandlung von $\frac{153}{127}$ in einen regelmäßigen Kettenbruch erforderliche Algorithmus lautet dann folgendermaßen:

$$\begin{aligned} 153 &= 127 \cdot 1 + 26 \\ 127 &= 26 \cdot 4 + 23 \\ 26 &= 23 \cdot 1 + 3 \\ 23 &= 3 \cdot 7 + 2 \\ 3 &= 2 \cdot 1 + 1 \\ 2 &= 1 \cdot 2. \end{aligned}$$

Die einzelnen Quotienten, also die Teilnenner des fraglichen Kettenbruches sind danach: 1, 4, 1, 7, 1, 2.[1] Zur Berechnung der Näherungsbrüche hat man sodann die Anfangswerte:

$$\begin{aligned} &A_0 = 1, && B_0 = 1 \\ &A_1 = 4 \cdot 1 + 1 = 5, && B_1 = 4 \end{aligned}$$

und für $\nu \geqq 2$ die Rekursionsformeln:

$$A_\nu = \beta_\nu A_{\nu-1} + A_{\nu-2}, \quad B_\nu = \beta_\nu B_{\nu-1} + B_{\nu-2}.$$

Die weitere Rechnung läßt sich dann übersichtlich mit Hilfe des folgenden Schemas ausführen (wobei man also zunächst in die beiden ersten, den Indizes $\nu = 0$ und $\nu = 1$ entsprechenden Kolonnen die oben angegebenen Werte für A_0, B_0, A_1, B_1 einzutragen und darauf für $\nu = 2, 3, \cdots$ nach den Rekursionsformeln weiter zu rechnen hat):

$\nu =$	0	1	2	3	4	5
$\beta_\nu =$	1	4	1	7	1	2
$A_\nu =$	1	5	$\underbrace{1 \cdot 5 + 1}_{6}$	$\underbrace{7 \cdot 6 + 5}_{47}$	$\underbrace{1 \cdot 47 + 6}_{53}$	$\underbrace{2 \cdot 53 + 47}_{153}$
$B_\nu =$	1	4	$\underbrace{1 \cdot 4 + 1}_{5}$	$\underbrace{7 \cdot 5 + 4}_{39}$	$\underbrace{1 \cdot 39 + 5}_{44}$	$\underbrace{2 \cdot 44 + 39}_{127}$

Den *letzten* Näherungsbruch, welcher ja mit dem ursprünglich gegebenen Bruche $\frac{153}{127}$ identisch ist, brauchte man eigentlich nicht zu berechnen, doch liefert das betreffende Resultat eine zweckmäßige

---

1) Man hat also:

$$\frac{153}{127} = 1 + \frac{1|}{|4} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|7} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2}.$$

Probe dafür, ob die Rechnung ohne Fehler durchgeführt ist.[1]) Als Zähler und Nenner des *vorletzten* Näherungsbruches findet man:

$$A_4 = 53, \quad B_4 = 44$$

und daher nach Formel (27) (da $\gamma = 10$, $\varepsilon = +1$, $n = 5$, also $(-1)^{n-1} = +1$):

$$\xi = 440 + 127\,\lambda, \quad \eta = 530 + 153\,\lambda \quad (\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Das *kleinste positive* Lösungspaar kommt für $\lambda = -3$ zum Vorschein, nämlich:

$$\xi = 59, \quad \eta = 71.$$

§ 102. Unendliche Kettenbrüche aus positiven Zahlen. — Notwendiges und hinreichendes Konvergenzkriterium für Kettenbrüche der ersten Hauptform. — Übertragung auf die allgemeine Form und Herleitung vereinfachter hinreichender Konvergenzkriterien. — Einfluß der Null als Teilnenner.

1. Wir verstehen jetzt unter α_ν, β_ν $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$ *beliebige positive* Zahlen, und zwar zwei unbegrenzte Folgen solcher Zahlen, während β_0 auch $\leqq 0$ sein kann, und gehen darauf aus, über die Konvergenz oder Divergenz des unendlichen Kettenbruches:

$$\beta_0 + \left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$$

irgendwelche bestimmte Aussagen zu machen.

Setzt man wiederum:

$$(1)\quad K_n \equiv \frac{A_n}{B_n} = \beta_0 + \left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^n \left(n = 1, 2, 3, \cdots; \text{ speziell: } K_0 \equiv \frac{A_0}{B_0} = \beta_0\right),$$

---

1) Die Berechnung von A_{n-1} und B_{n-1} wird übrigens merklich kürzer, wenn man den um das Endglied verkürzten Kettenbruch *„von rechts nach links"* (vgl. S. 682, Fußnote 1 und das Beispiel S. 683/4) reduziert. Man gebraucht in diesem Falle zur Berechnung von B_{n-1} nur gerade soviele Schritte wie bei dem Verfahren des Textes, während sodann A_{n-1} durch einen einzigen weiteren Schritt sich ergibt. Man hat nämlich, wenn man die Bezeichnungen des Rechnungsschemas auf S. 684 anwendet: $x_1 = B_{n-1}$, $x_0 = A_{n-1}$. Bei dem vorliegenden Beispiele gestaltet sich die Rechnung folgendermaßen:

$\nu =$	4	3	2	1	0
$\beta_\nu =$	1	7	1	4	1
$x_\nu =$	1	$\underbrace{7\cdot1+1}_{8}$	$\underbrace{1\cdot8+1}_{9}$	$\underbrace{4\cdot9+8}_{44}$	$\underbrace{1\cdot44+9}_{53}$,

also: $B_4 = x_1 = 44$, $A_4 = x_0 = 53$.

so bestehen nach § 100, Nr. 1, S. 748, die beiden unbegrenzt fortsetzbaren Folgen von Ungleichungen (a. a. O. Formel (6)):

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} K_0 < K_2 < \cdots < K_{2\mu} \quad < \cdots\cdots \\ K_1 > K_3 > \quad\;\; > K_{2\mu+1} > \cdots\cdots \end{cases}$$

und zugleich (a. a. O Ungl. (8)):

$$\text{(3)} \qquad K_{2\mu} < K_{2\mu+1} < K_1, \quad K_{2\mu+1} > K_{2\mu} > K_0.$$

Daraus folgt aber, daß jede der beiden monotonen Folgen $(K_{2\mu})$, $(K_{2\mu+1})$ einen bestimmten endlichen Grenzwert besitzt, etwa:

$$\text{(4)} \qquad \lim_{\mu\to\infty} K_{2\mu} = \underline{K}, \quad \lim_{\mu\to\infty} K_{2\mu+1} = \overline{K}.$$

Dabei hat man mit Rücksicht auf die Ungleichungen (2) und (3) allemal:

$$\text{(5a)} \qquad K_{2\mu} < \underline{K} \leqq \overline{K} < K_{2\mu+1}$$

und auch:

$$\text{(5b)} \qquad K_{2\mu-1} > \overline{K} \geqq \underline{K} > K_{2\mu},$$

sodaß also $\underline{K}$ und $\overline{K}$ stets zwischen zwei *ganz beliebigen konsekutiven* Näherungsbrüchen K_ν und $K_{\nu+1}$ liegen, was auch von jedem Näherungsbruche mit einem Index $\nu' > \nu + 1$ gilt.

Mit Rücksicht darauf, daß nur die beiden Möglichkeiten $\underline{K} = \overline{K}$ und $\underline{K} < \overline{K}$ bestehen, gewinnt man den folgenden allgemeinen Satz:

> (I) *Ein unendlicher Kettenbruch mit lauter positiven Teilzahlern und Teilnennern kann nur* ***konvergieren*** *oder* ***wesentlich divergieren****, und zwar im letzteren Falle* ***zwischen endlichen Grenzen oszillieren****. Sein Wert bzw. seine beiden Hauptlimites*[1]) *liegen stets zwischen zwei ganz beliebigen konsekutiven Näherungsbrüchen.*[2])

Daß *jeder* dieser beiden zunächst als *einzig möglich* erkannten Fälle auch *wirklich* eintreten kann, wird sich in der Folge noch ergeben. Da im übrigen bei jedem *wesentlich divergenten* Kettenbruche auch jeder mit einem späteren Gliede beginnende unendliche Kettenbruch *wesentlich divergiert* und umgekehrt (nach § 98, Nr. 5, S. 740), so folgt noch, daß im Falle der *Konvergenz* ein Kettenbruch der vorliegenden Art stets *unbedingt* konvergiert.

---

1) D. h. die Hauptlimites der Zahlenfolge $\left(\frac{A_\nu}{B_\nu}\right)$.

2) Ist $\beta_0 \geqq 0$, so ist also der *Wert* eines solchen Kettenbruches bzw. *jede* der beiden Oszillationsgrenzen *wesentlich positiv* (also von Null verschieden).

Da übrigens die Zahlenfolgen $\left(\frac{A_{2\mu}}{B_{2\mu}}\right)$, $\left(\frac{A_{2\mu+1}}{B_{2\mu+1}}\right)$ in jedem Falle *konvergieren*, so ergibt sich noch, daß die *beiden* aus dem gegebenen durch *Kontraktion* hervorgehenden Kettenbrüche, deren einer die $\frac{A_{2\mu}}{B_{2\mu}}$, deren anderer die $\frac{A_{2\mu+1}}{B_{2\mu+1}}$ zu Näherungsbrüchen hat (s. § 96, Nr. 2, Gl. (4) und (6), S. 719), stets *konvergieren*.

2. Um brauchbare Kriterien für das Eintreten der Konvergenz bzw. Divergenz zu gewinnen, betrachten wir zunächst den Fall, daß der zu untersuchende unendliche Kettenbruch der *ersten Hauptform* (s. § 97, Nr. 2, S. 728) angehört. Dabei steht es frei, da das additive Anfangsglied β_0 in bezug auf die Konvergenz oder Divergenz offenbar ohne Einfluß ist, ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\beta_0 = 0$ zu setzen, also einen Kettenbruch von der Form:

$$(6) \qquad (K_\infty) \equiv \left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_1^\infty \quad (\beta_\nu > 0)$$

den weiteren Betrachtungen zugrunde zu legen. Werden auch hier wieder die Näherungsbrüche mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ ($\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots$) bezeichnet, so folgt aus der Rekursionsformel:

$$(7) \qquad B_{\nu+1} = \beta_{\nu+1} B_\nu + B_{\nu-1} \quad (\nu \geqq 1),$$

daß stets:

$$B_{\nu+1} > B_{\nu-1} \quad (\nu \geqq 1),$$

und daher:

$$(8) \qquad \begin{cases} 1 = B_0 < B_2 < \cdots < B_{2\mu} \quad < \cdots\cdots \\ \beta_1 = B_1 < B_3 < \cdots < B_{2\mu+1} < \cdots\cdots. \end{cases}$$

Die B_ν bleiben also für $\nu > 1$ durchweg *oberhalb* der kleineren der beiden positiven Zahlen 1 und β_1.

Andererseits hat man:

$$(9_1) \qquad B_1 = \beta_1 < 1 + \beta_1$$

$$(9_2) \qquad B_2 = \beta_2\beta_1 + 1 < (1 + \beta_1)(1 + \beta_2).$$

Angenommen, man habe für $m = 1, 2, \cdots n$:

$$(9) \qquad B_m < \prod_1^m {}_\nu (1 + \beta_\nu),$$

so folgt aus der Rekursionsformel (7):

$$B_{n+1} < \beta_{n+1} \prod_1^n {}_\nu (1 + \beta_\nu) + \prod_1^{n-1} {}_\nu (1 + \beta_\nu) < \prod_1^{n+1} {}_\nu (1 + \beta_\nu).$$

Die Ungleichung (9) gilt also für jedes n, da ihre Richtigkeit für $n = 1$ und $n = 2$ bereits feststeht. Hieraus ergibt sich, daß die B_ν *unterhalb* einer gewissen positiven Zahl bleiben, falls das rechts stehende Produkt für $n \longrightarrow \infty$ in ein *konvergentes* übergeht, und hierzu ist (nach § 81, Nr. 1, S. 621) *notwendig* und *hinreichend*, daß die *Reihe* $\sum \beta_\nu$ *konvergiert.* Ist diese Bedingung erfüllt, so streben also die nach Ungl. (8) *monoton zunehmenden* Folgen $(\mathsf{B}_{2\mu})$, $(\mathsf{B}_{2\mu+1})$ bestimmten *endlichen* Grenzwerten zu.

Nun wurde in Nr. 1 gezeigt, daß in *jedem* Falle die beiden Folgen $(\mathsf{K}_{2\mu})$, $(\mathsf{K}_{2\mu+1})$ bestimmte endliche Grenzwerte besitzen. Sollen dieselben *zusammenfallen,* so ist wegen:

$$|\mathsf{K}_{\nu+1} - \mathsf{K}_\nu| = \frac{1}{\mathsf{B}_\nu \mathsf{B}_{\nu+1}} \quad \text{(s. § 100, Nr. 3, Gl. (22), S. 750)}$$

notwendig und *hinreichend*, daß:

$$(10)\quad \lim_{\nu \to \infty} |\mathsf{K}_{\nu+1} - \mathsf{K}_\nu| \equiv \lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{\mathsf{B}_\nu \mathsf{B}_{\nu+1}} = 0, \text{ also: } \lim_{\nu \to \infty} \mathsf{B}_\nu \mathsf{B}_{\nu+1} = +\infty.$$

Da diese Bedingung im Falle der *Konvergenz* von $\sum \beta_\nu$ nach dem zuvor Gesagten *nicht* erfüllt ist, so folgt, daß in diesem Falle der Kettenbruch $\left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ zwischen endlichen Grenzen *oszilliert.*

Daß dagegen im Falle der *Divergenz* von $\sum \beta_\nu$ der fragliche Kettenbruch stets *konvergieren* muß, erkennt man in folgender Weise. Multipliziert man die Rekursionsformel (7) mit B_ν, so ergibt sich:

$$(11)\quad \mathsf{B}_\nu \mathsf{B}_{\nu+1} - \mathsf{B}_{\nu-1} \mathsf{B}_\nu = \beta_{\nu+1} \mathsf{B}_\nu^2$$

und hieraus durch Substitution von $\nu = 1, 2, \cdots n$ und Addition der resultierenden Gleichungen:

$$\mathsf{B}_n \mathsf{B}_{n+1} - \mathsf{B}_0 \mathsf{B}_1 = \sum_1^n {}^\nu\, \beta_{\nu+1} \mathsf{B}_\nu^2$$

oder auch (wegen: $\mathsf{B}_0 = 1$, $\mathsf{B}_1 = \beta_1$) einfacher geschrieben:

$$(12)\quad \mathsf{B}_n \mathsf{B}_{n+1} = \sum_1^{n+1} {}^\nu\, \beta_\nu \mathsf{B}_{\nu-1}^2.$$

Als *notwendige* und *hinreichende* Bedingung für die Existenz der Beziehung: $\lim_{n \to \infty} \mathsf{B}_n \mathsf{B}_{n+1} = +\infty$ erscheint daher die *Divergenz* der Reihe $\sum_1^\infty {}^\nu\, \beta_\nu \mathsf{B}_{\nu-1}^2$, und da die $\mathsf{B}_{\nu-1}$ durchweg *oberhalb* einer gewissen positiven Zahl liegen, so ist diese Divergenz gesichert, falls $\sum^\infty {}^\nu\, \beta_\nu$ *diver-*

giert.[1]) In diesem Falle ist dann also die Bedingung (10) erfüllt und der fragliche Kettenbruch somit *konvergent.*

Die vorstehenden Ergebnisse lassen sich zu dem folgenden Satze zusammenfassen:

(II) *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Kettenbruches* $\left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ *(wo: $\beta_\nu > 0$) besteht in der Divergenz der Reihe* $\sum \beta_\nu$. *Der Kettenbruch konvergiert dann eo ipso unbedingt und sein Wert ist wesentlich positiv. Ist die Reihe* $\sum \beta_\nu$ *konvergent, so oszilliert der Kettenbruch zwischen zwei endlichen wesentlich positiven Zahlen.*

3. Um dieses Resultat auf einen Kettenbruch von der allgemeinen Form: $\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ (wo: $\alpha_\nu > 0$, $\beta_\nu > 0$) zu übertragen, hat man nur zu beachten, daß der Konvergenz- bzw. Divergenzcharakter durch Äquivalenz-Transformation keine Änderung erleidet (§ 97, Nr. 2, S. 728) und daß andererseits sich ergibt:

$$\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty \simeq \left[\frac{1}{\beta'_\nu}\right]_1^\infty, \tag{13}$$

wenn gesetzt wird (s § 94, Nr. 4, Formel (23), S. 710):

$$\begin{cases} \beta'_1 = \dfrac{1}{\alpha_1}\cdot\beta_1 \text{ und für } \mu \geqq 1: \ \beta'_{2\mu} = \dfrac{\alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_{2\mu-1}}{\alpha_2\alpha_4\cdots\alpha_{2\mu}}\cdot\beta_{2\mu} \\ \qquad\qquad \beta'_{2\mu+1} = \dfrac{\alpha_2\alpha_4\cdots\alpha_{2\mu}}{\alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_{2\mu-1}\alpha_{2\mu+1}}\cdot\beta_{2\mu+1}. \end{cases} \tag{14}$$

Da ferner die Reihe $\sum \beta'_\nu$ schon dann und nur dann *divergiert*, wenn mindestens *eine* der beiden Reihen $\sum \beta'_{2\mu}$, $\sum \beta'_{2\mu+1}$ *divergiert* (während offenbar diese letzteren Reihen *beide konvergieren* müssen, wenn $\sum \beta_\nu$ *konvergieren* soll), so findet man:

(III) *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die (eo ipso unbedingte) Konvergenz des Kettenbruches* $\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ *(wo: $\alpha_\nu > 0$, $\beta_\nu > 0$) besteht darin, daß mindestens eine der beiden Reihen:*

$$\sum_1^\infty{}^{\mu} \frac{\alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_{2\mu-1}}{\alpha_2\alpha_4\cdots\alpha_{2\mu}}\cdot\beta_{2\mu}, \qquad \sum_1^\infty{}^{\mu} \frac{\alpha_2\alpha_4\cdots\alpha_{2\mu}}{\alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_{2\mu-1}\alpha_{2\mu+1}}\cdot\beta_{2\mu+1} \tag{15}$$

divergiert. Sind beide Reihen konvergent, so oszilliert der Kettenbruch zwischen zwei endlichen wesentlich positiven Zahlen.

---

1) Daß übrigens die *Divergenz* von $\sum \beta_\nu$, welche nach dem Gesagten als *hinreichend* für die Divergenz von $\sum \beta_\nu B_{\nu-1}^2$ erscheint, auch dafür *notwendig* ist, ergibt sich aus der zuvor gewonnenen Erkenntnis, daß im Falle der *Konvergenz* von $\sum \beta_\nu$ die $B_{\nu-1}$ *unterhalb* einer gewissen positiven Zahl bleiben, also gleichzeitig mit der Reihe $\sum \beta_\nu$ auch $\sum \beta_\nu B_{\nu-1}^2$ *konvergieren* würde.

Um die Beschaffenheit dieser Reihen zu untersuchen, wird man auf Grund der besonderen Bildungsweise ihrer Glieder zweckmäßig eines der Kriterien *zweiter* Art anwenden. So würde z. B. die Anwendung des Cauchyschen Fundamentalkriteriums zweiter Art (s. § 54, Nr. 6, S. 385) ergeben, daß die *erste* bzw. *zweite* der Reihen (15) *divergiert*, wenn:

$$(16) \qquad \overline{\lim_{\mu\to\infty}} \frac{\alpha_{2\mu+2}\beta_{2\mu}}{\alpha_{2\mu+1}\beta_{2\mu+2}} < 1 \text{ bzw. } \overline{\lim_{\mu\to\infty}} \frac{\alpha_{2\mu+1}\beta_{2\mu-1}}{\alpha_{2\mu}\beta_{2\mu+1}} < 1$$

und daß also der *Kettenbruch* schon *konvergiert*, wenn *eine* dieser beiden Bedingungen erfüllt ist, während die *Divergenz* des *Kettenbruches* erst feststehen würde, wenn die entsprechenden für die *Konvergenz beider Reihen* maßgebenden Bedingungen *gleichzeitig* bestehen, sodaß sie sich in die folgende *eine* zusammenziehen lassen:

$$(17) \qquad \underline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{\alpha_{\nu+1}\beta_{\nu-1}}{\alpha_\nu\beta_{\nu+1}} > 1.$$

Macht man der größeren Einfachheit zuliebe bei den Bedingungen (16) die analoge Zusammenziehung (wodurch natürlich das betreffende Kriterium eine gewisse Einbuße an Tragweite erleidet, da ja nunmehr die *Divergenz* der *beiden* Reihen (15) gefordert wird), so erhält man den folgenden Satz:

(IV) *Für die Konvergenz bzw. Divergenz des Kettenbruches* $\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ *(wo:* $\alpha_\nu > 0$, $\beta_\nu > 0$*) ist hinreichend, daß:*

$$(18) \qquad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{\alpha_{\nu+1}\beta_{\nu-1}}{\alpha_\nu\beta_{\nu+1}} < 1 \text{ bzw. } > 1.$$

Selbstverständlich hat es keine Schwierigkeit, diese Bedingungen durch Einführung schärferer Reihenkriterien zweiter Art, wie des Raabeschen und der Bertrandschen (s. a. a. O. die Formeln (L')), entsprechend zu verschärfen.[1])

---

1) Dabei ist zu beachten, daß man nicht *ohne weiteres* die Zusammenziehung der Bedingungen (16) für die *Divergenz* und der entsprechenden für die *Konvergenz* der Reihen *geradeso* wie beim Cauchyschen Kriterium vornehmen darf. So würden z. B. bei Anwendung des Raabeschen Kriteriums auf die beiden Reihen (15) die betreffenden linken Seiten zunächst lauten:

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \mu\left(\frac{\alpha_{2\mu+2}\beta_{2\mu}}{\alpha_{2\mu+1}\beta_{2\mu+2}} - 1\right) \text{ und } \overline{\lim_{\mu\to\infty}} \mu\left(\frac{\alpha_{2\mu+1}\beta_{2\mu-1}}{\alpha_{2\mu}\beta_{2\mu+1}} - 1\right)$$

und diese lassen sich zusammenziehen in:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{\nu}{2}\left(\frac{\alpha_{\nu+1}\beta_{\nu-1}}{\alpha_\nu\beta_{\nu+1}} - 1\right) \textit{ nicht: } \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \nu\left(\frac{\alpha_{\nu+1}\beta_{\nu-1}}{\alpha_\nu\beta_{\nu+1}} - 1\right).$$

Beispiel. Für den Kettenbruch: $\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty \equiv \left[\frac{\alpha^\nu}{\nu}\right]_1^\infty$ (wo: $\alpha > 0$) hat man: $\frac{\alpha_{\nu+2}\beta_\nu}{\alpha_{\nu+1}\beta_{\nu+2}} = \frac{\alpha\nu}{\nu+2}$, also $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{\alpha_{\nu+2}\beta_\nu}{\alpha_{\nu+1}\beta_{\nu+2}} = \alpha$, der Kettenbruch *konvergiert* daher für $\alpha < 1$, er *divergiert* für $\alpha > 1$. Für $\alpha = 1$ liefert das obige Kriterium keine Entscheidung, man erkennt aber unmittelbar, daß der Kettenbruch, der jetzt die Form $\left[\frac{1}{\nu}\right]_1^\infty$ hat, infolge der Divergenz von $\sum \nu$ nach Satz (II) noch *konvergiert*

4. Statt durch direkte Anwendung vorhandener Konvergenz- und Divergenzkriterien auf die Reihen (15) *hinreichende* Bedingungen für Konvergenz und Divergenz des Kettenbruches herzustellen, lassen sich zweckmäßig vereinfachte *hinreichende* Konvergenzbedingungen mit Hilfe der folgenden Bemerkung gewinnen:

Wenn die Reihe $\sum \beta_\nu'$ *konvergiert*, so *konvergieren* stets auch die beiden folgenden:

$$\sum \beta_\nu' \beta_{\nu+1}' \qquad \sum \sqrt{\beta_\nu' \beta_{\nu+1}'}.$$

Wenn also eine dieser beiden Reihen *divergiert*, so *divergiert* auch $\sum \beta_\nu'$.[1])

---

1) Dagegen darf man nicht aus der *Konvergenz* von $\sum \beta_\nu' \beta_{\nu+1}'$ und nicht einmal aus derjenigen von $\sum \sqrt{\beta_\nu' \beta_{\nu+1}'}$ auf die *Konvergenz* von $\sum \beta_\nu'$ schließen. Setzt man z. B. $\beta_\nu' = \frac{1}{\nu}$, so *konvergiert* $\sum \beta_\nu' \beta_{\nu+1}' \equiv \sum \frac{1}{\nu(\nu+1)}$, während $\sum \beta_\nu' \equiv \sum \frac{1}{\nu}$ *divergiert*. — Setzt man ferner.

$$\beta_\nu' = \left(\frac{1}{\nu}\right)^{2+(-1)^\nu},$$

d h·

$$\beta_{2\mu-1}' = \frac{1}{2\mu-1}, \quad \beta_{2\mu}' = \left(\frac{1}{2\mu}\right)^3$$

und daher:

$$\beta_{2\mu-1}' \beta_{2\mu}' < \left(\frac{1}{2\mu-1}\right)^4$$

$$\beta_{2\mu}' \beta_{2\mu+1}' < \left(\frac{1}{2\mu}\right)^4,$$

so ist:

$$\sqrt{\beta_\nu' \beta_{\nu+1}'} < \left(\frac{1}{\nu}\right)^2,$$

also $\sum \sqrt{\beta_\nu' \beta_{\nu+1}'}$ *konvergent*, während $\sum \beta_\nu'$ offenbar *divergiert*. Immerhin kann man aus der *Konvergenz* von $\sqrt{\beta_\nu' \beta_{\nu+1}'}$ dann ohne weiteres auf diejenige von $\sum \beta_\nu'$ schließen, wenn die β_ν' *monoton* sind, da ja in diesem Falle $\beta_{\nu+1}' \leqq \sqrt{\beta_\nu' \beta_{\nu+1}'}$.

Die Richtigkeit der ersten Behauptung ist unmittelbar einleuchtend, da ja, wegen $\lim_{\nu\to\infty} \beta'_\nu = 0$, zum mindesten für hinlänglich große ν: $\beta'_\nu \beta'_{\nu+1} < \beta'_\nu$. Zum Beweise der zweiten Behauptung hat man:

$$\left(\sqrt{\beta'_\nu} - \sqrt{\beta'_{\nu-1}}\right)^2 \geqq 0,$$

also:

$$\sqrt{\beta'_\nu \beta'_{\nu+1}} \leqq \tfrac{1}{2}(\beta'_\nu + \beta'_{\nu+1})$$

und daher:

$$\sum_1^n \sqrt{\beta'_\nu \beta'_{\nu+1}} < \sum_1^{n+1} \beta'_\nu,$$

woraus dann die Richtigkeit der fraglichen Behauptung sofort hervorgeht.

Wendet man dieses Ergebnis auf die aus den beiden Reihen (15) zusammengesetzte Reihe an, sodaß also:

$$\beta'_{2\mu-1}\beta'_{2\mu} = \frac{\beta_{2\mu-1}\beta_{2\mu}}{\alpha_{2\mu}}, \quad \beta'_{2\mu}\beta'_{2\mu+1} = \frac{\beta_{2\mu}\beta_{2\mu+1}}{\alpha_{2\mu+1}},$$

$$\text{d. h. schließlich: } \beta'_\nu \beta'_{\nu+1} = \frac{\beta_\nu \beta_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1}}$$

zu setzen ist, so ergibt sich aus dem Satze (III), soweit er die *Konvergenz* des Kettenbruches betrifft, der folgende Satz:

(V) *Für die* ***Konvergenz*** *des Kettenbruches* $\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ *(wo* $\alpha_\nu > 0$, $\beta_\nu > 0$*) ist* ***hinreichend,*** *wenn die Reihe:*

(A) $$\sum \frac{\beta_\nu \beta_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1}}$$

oder auch nur[1]) *die folgende:*

(B) $$\sum \sqrt{\frac{\beta_\nu \beta_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1}}}$$

(bzw. ein Bestandteil dieser Reihen) ***divergiert.***[2])

---

1) Dieses „auch nur" bezieht sich lediglich auf den Fall $\frac{\beta_\nu \beta_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1}} < 1$, in welchem ja $\frac{\beta_\nu \beta_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1}} < \sqrt{\frac{\beta_\nu \beta_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1}}}$ und daher die Reihe (B) sehr wohl *divergieren* kann, während (A) *konvergiert.* Ist für unendlich viele ν: $\frac{\beta_\nu \beta_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1}} \geqq 1$, so divergieren ja *beide* Reihen *stets* gleichzeitig (was natürlich auch im Falle $\frac{\beta_\nu \beta_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1}} < 1$ eintreten *kann*).

2) Dagegen würde nach dem in Fußnote 1 der vorigen Seite Gesagten die *Konvergenz* der Reihen (A) und (B) nicht ausreichen, um daraus die *Divergenz* des Kettenbruches zu erschließen.

Bleiben die Quotienten $\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu}$ oberhalb einer positiven Zahl (was z B. stets der Fall ist, wenn zum mindesten für hinlänglich große ν: $\beta_\nu \geqq \alpha_\nu$), so ist die *Divergenz* der Reihe (A) bzw. (B) gesichert, wenn $\sum \beta_\nu$ bzw. $\sum \sqrt{\beta_\nu}$ *divergiert,* und man findet daher:

(Va) *Ist.* $\beta_\nu \geqq \gamma \cdot \alpha_\nu > 0$ *(wo: $\gamma > 0$, im übrigen beliebig), so konvergiert* $\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$, *wenn die Reihe* $\sum \beta_\nu$ *oder auch nur* $\sum \sqrt{\beta_\nu}$ *divergiert.*

Schließlich ergibt sich noch für den speziellen Fall $\beta_\nu = 1$, wenn also der Kettenbruch der *zweiten Hauptform* angehört:

(Vb) *Der Kettenbruch* $\left[\frac{\alpha_\nu}{1}\right]_1^\infty$ *(wo: $\alpha_\nu > 0$) ist konvergent, wenn die Reihe* $\sum \frac{1}{\alpha_\nu}$ *oder auch nur* $\sum \sqrt{\frac{1}{\alpha_\nu}}$ *divergiert.*

Beispiel. Für den Kettenbruch $\left[\frac{\nu^p}{1}\right]_1^\infty$ lautet die Reihe (A): $\sum \left(\frac{1}{\nu}\right)^p$, die Reihe (B): $\sum \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{p}{2}}$. Die erste nur für $p \leqq 1$ *divergente* Reihe würde nur erkennen lassen, daß der Kettenbruch für $p \leqq 1$ *konvergiert,* während die für $p \leqq 2$ bestehende *Divergenz* der Reihe (B) die *Konvergenz* des Kettenbruches für $p \leqq 2$ anzeigt. Dagegen gibt das Kriterium (V) keinerlei Anhaltspunkt zur Beurteilung des Kettenbruches im Falle $p > 2$, in welchem ja beide Reihen *konvergieren* Man muß daher auf den Satz (III) zurückgreifen. Das Raabesche Kriterium ergibt dann die *Konvergenz* der *beiden* Reihen (15), wenn (vgl. S 765, Fußnote 1):

$$\varliminf_{\nu \to \infty} \frac{\nu}{2}\left(\frac{\alpha_{\nu+1}\beta_{\nu-1}}{\alpha_\nu \beta_{\nu+1}} - 1\right) > 1,$$

d. h. also, wegen $\alpha_\nu = \nu^p$, $\beta_\nu = 1$, wenn:

$$\varliminf_{\nu \to \infty} \nu\left(\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^p - 1\right) > 2.$$

Mit Benützung der Formeln (Ib), (IIb) von § 30, Nr. 2, S. 182/3, wenn man daselbst $P = 1 + \frac{1}{\nu}$, $c = p$ setzt,[1]) findet man aber:

1) Die betreffenden Formeln beziehen sich a. a. O. zunächst nur auf *rationale* Exponenten c. Die *erste* der Formeln wurde dann späterhin auch ausdrücklich auf *irrationale* Exponenten C übertragen (§ 31, Nr. 5, S 192, Formel (Ib)). Diese Übertragung gilt aber auf Grund der a. a. O. (Anfang von Nr. 5) gemachten prinzipiellen Bemerkung auch für die *zweite* Formel.

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^p \begin{cases} > 1 + \frac{p}{\nu} \\ < 1 + \frac{p}{\nu+1-p}, \end{cases}$$

also:

$$\lim_{\nu \to \infty} \nu\left(\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^p - 1\right) = p,$$

sodaß also die fraglichen *Reihen* für $p > 2$ *konvergieren*, der Kettenbruch also *divergiert*.

5. Mit Rücksicht auf eine späterhin zu machende Anwendung wollen wir auch hier noch den Fall genauer ins Auge fassen, daß für die *Teilnenner* β_ν der Wert *Null* zulässig sein soll. Wird zunächst angenommen, daß $\beta_1 > 0$, so liefert der Kettenbruch $\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ nach § 100, Nr. 4 lauter wohldefinierte, durchweg positive Näherungsbrüche K_ν, und zwar ist (Formel (27), Seite 752, mit Berücksichtigung von $K_0 = 0$):

(19) $$0 \leqq K_2 \leqq \cdots \leqq K_{2\mu} \leqq \cdots \quad \cdots \leqq K_{2\mu+1} \leqq \cdots \leqq K_3 \leqq K_1.$$[1]

Daraus geht aber hervor, daß jeder Näherungsbruch $K_{\nu+\varrho}$ für $\varrho > 1$ in die Grenzen K_ν und $K_{\nu+1}$ eingeschlossen ist, daß ferner die $K_{2\mu}$ und die $K_{2\mu+1}$, geradeso wie im Falle durchweg wesentlich positiver β_ν bestimmte endliche, eventuell auch zusammenfallende Grenzwerte $\underline{K}$ und $\overline{K}$ besitzen müssen, sodaß also der Kettenbruch wiederum entweder *zwischen zwei endlichen Zahlen oszilliert* oder *konvergiert.* Dieses Resultat erleidet keine wesentliche Änderung, wenn $\beta_1 = 0$ oder gleich etwas allgemeiner: $\beta_1 = \beta_3 = \cdots = \beta_{2m-1} = 0$, dagegen $\beta_{2m+1} > 0$. Der einzige Unterschied besteht dann (nach dem in § 100, Nr. 4 Gesagten) darin, daß die m Näherungsbrüche $K_1, K_3, \cdots K_{2m-1}$ und *nur* diese *sinnlos* ausfallen.

Eine besondere Betrachtung erfordert dagegen die Annahme: $\beta_{2\nu+1} = 0$ für *jedes* $\nu = 0, 1, 2, \cdots$. In diesem Falle werden ja *alle* Näherungsbrüche mit *ungeradem* Index *sinnlos*, der Kettenbruch also in einer Weise *divergent*, die in den bisher betrachteten Fällen niemals vorkommen konnte. Dabei zeigt sich nun aber bezüglich des Verhaltens der Näherungsbrüche mit *geradem* Index eine zwiefache Möglichkeit, da sich das Ungleichungssystem (19) jetzt auf das folgende reduziert:

---

1) Dabei ist nach § 100, Nr. 4:

$$K_{2\mu} = K_{2\mu+2}, \text{ wenn. } \beta_{2\mu+2} = 0,$$

während im Falle $\beta_{2\mu+1} = 0$ die im Text angegebenen Modalitäten eintreten.

$$0 \leqq K_2 \leqq \cdots \leqq K_{2\mu} \leqq \cdots\cdots, \tag{20}$$

also *die Begrenzung nach oben wegfällt,* sodaß hier die *beiden* Möglichkeiten bestehen:

$$\lim_{\mu \to \infty} K_{2\mu} = K \text{ (d. h } \textit{endlich}\text{) und: } \lim_{\mu \to \infty} K_{2\mu} = +\infty.$$

Um die Bedingungen festzustellen, unter welchen der eine bzw. der andere dieser beiden Fälle eintritt, wollen wir $A_{2\mu}$, $B_{2\mu}$ mit Hilfe der üblichen Rekursionsformeln explizite darstellen Man hat zunächst, wegen $\beta_{2\mu-1} = 0$ und $B_{2\mu-1} = 0$:

$$B_{2\mu} = \alpha_{2\mu} B_{2\mu-2}, \quad A_{2\mu-1} = \alpha_{2\mu-1} A_{2\mu-3} \quad (\mu \geqq 1)$$

und daher durch fortgesetzte Anwendung dieser Beziehungen (mit Berücksichtigung von $B_0 = 1$ und $A_1 = \alpha_1$):

$$B_{2\mu} = \alpha_2 \alpha_4 \cdots \alpha_{2\mu}, \quad A_{2\mu-1} = \alpha_1 \alpha_3 \cdots \alpha_{2\mu-1} \quad (\mu \geqq 1).[1] \tag{21}$$

Zur Bestimmung des $A_{2\mu}$ hat man sodann:

$$\begin{aligned}
A_{2\mu} &= \beta_{2\mu} A_{2\mu-1} + \alpha_{2\mu} A_{2\mu-2} \\
A_{2\mu-2} &= \beta_{2\mu-2} A_{2\mu-3} + \alpha_{2\mu-2} A_{2\mu-4} \\
A_{2\mu-4} &= \beta_{2\mu-4} A_{2\mu-5} + \alpha_{2\mu-4} A_{2\mu-6} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_4 &= \beta_4 A_3 + \alpha_4 A_2 \\
A_2 &= \beta_2 A_1.
\end{aligned}$$

Multipliziert man die zweite dieser Gleichungen mit $\alpha_{2\mu}$, die dritte mit $\alpha_{2\mu}\alpha_{2\mu-2}$ usf., die vorletzte mit $\alpha_{2\mu}\alpha_{2\mu-2}\cdots\alpha_6$ und die letzte mit $\alpha_{2\mu}\alpha_{2\mu-2}\cdots\alpha_4$, so ergibt sich durch Addition und Weglassung der beiden Seiten gemeinsamen Glieder:

$$\begin{aligned}
A_{2\mu} = \beta_2 A_1 \alpha_4 \cdots \alpha_{2\mu} + \beta_4 A_3 \alpha_6 \cdots \alpha_{2\mu} + \cdots \\
+ \beta_{2\mu-2} A_{2\mu-3} \alpha_{2\mu} + \beta_{2\mu} A_{2\mu-1}
\end{aligned}$$

und somit durch Division mit $B_{2\mu}$ unter Berücksichtigung der Beziehungen (21):

$$\begin{aligned}
\frac{A_{2\mu}}{B_{2\mu}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\beta_2 + \frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2\alpha_4}\beta_4 + \cdots + \frac{\alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_{2\mu-3}}{\alpha_2\alpha_4\cdots\alpha_{2\mu-2}}\beta_{2\mu-2} \\
+ \frac{\alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_{2\mu-1}}{\alpha_2\alpha_4\cdots\alpha_{2\mu}}\beta_{2\mu}.
\end{aligned} \tag{22}$$

---

1) Da $A_{2\mu-1} > 0$, so sind also die Näherungsbrüche mit ungeradem Index durchweg in der Weise *sinnlos,* daß ihre reziproken Werte unzweideutig gleich *Null* sind.

Hiernach fällt also $\lim\limits_{\mu\to\infty} K_{2\mu} \equiv \lim\limits_{\mu\to\infty} \frac{A_{2\mu}}{B_{2\mu}}$ *endlich* oder *unendlich* aus, je nachdem die Reihe:

$$(23) \qquad \sum_1^\infty{}^\mu \frac{\alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_{2\mu-1}}{\alpha_2\alpha_4\cdots\alpha_{2\mu}}\beta_{2\mu}\,^{1)}$$

konvergiert (bzw. sich auf eine endliche Anzahl von Summanden reduziert) oder *divergiert* In letzterem Falle und *nur* in diesem ist dann offenbar der Kettenbruch $\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ im Gegensatz zu dem Verhalten in den Fällen $\beta_\nu > 0$ $(\nu \geqq 1)$ bzw. $\beta_1 > 0$, $\beta_\nu \geqq 0$ $(\nu \geqq 2)$ *außerwesentlich divergent* $\left(\text{da ja für } \mu \geqq 1 \text{ bereits: } \frac{B_{2\mu-1}}{A_{2\mu-1}} = 0 \text{ und daher: } \lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{B_\nu}{A_\nu} = 0\right)$. Es ergibt sich somit der folgende Satz:

(VI) *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die außerwesentliche Divergenz des Kettenbruches* $\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$, *wo* $\alpha_\nu > 0$, $\beta_\nu \geqq 0$, *besteht in der Beziehung:*

$$0 = \beta_1 = \beta_3 = \cdots = \beta_{2\mu+1} = \cdots\cdots$$

und der Divergenz der Reihe (23).

Wird jetzt wieder angenommen, daß $\beta_1 > 0$, also: $K_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$, so folgt aus (19) mit Berücksichtigung von Fußnote 1), daß:

$$(24\text{a}) \qquad \overline{K} < \frac{\alpha_1}{\beta_1} \text{ bzw. im Falle der } \textit{Konvergenz:}\ K < \frac{\alpha_1}{\beta_1}$$

mit Ausschluß der Gleichheit, sofern nicht ausnahmslos: $\beta_{2\mu+1} = 0$ (für $\mu \geqq 1$). Ist aber diese letztere Bedingung erfüllt, so werden alle mit ungeraden Nummern versehenen Näherungsbrüche des Kettenbruches $\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_3^\infty$ *sinnlos*, dieser selbst also nach Satz VI *außerwesentlich divergent*, wenn zu den obigen Bedingungen noch die *Divergenz* der Reihe: $\sum_2^\infty{}^\mu \frac{\alpha_3\alpha_5\cdots\alpha_{2\mu-1}}{\alpha_4\alpha_6\cdots\alpha_{2\mu}}\beta_{2\mu}$ oder, was offenbar auf dasselbe hinausläuft, die-

1) Setzt man durchweg: $\alpha_\nu = 1$ $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$ und schreibt β_ν' statt β_ν, so nimmt die Reihe die einfache Form an: $\sum_1^\infty{}^\mu \beta_{2\mu}'$. Man hätte dieses spezielle Resultat auch direkt durch Anwendung der im Texte befolgten Methode auf den Kettenbruch $\left[\frac{1}{\beta_\nu'}\right]_1^\infty$ herleiten und sodann mit Hilfe der Formel (14) zu der allgemeineren Reihe (23) gelangen können.

jenige der Reihe (28) hinzukommt. Daraus folgt weiter, daß im Falle $\beta_{2\mu+1} = 0$ $(\mu \geqq 1)$ der Kettenbruch $\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_2^\infty$ die *untere Oszillationsgrenze* 0 bzw. bei Hinzutreten der eben erwähnten Reihendivergenz den *Wert* 0 besitzt und daß daher schließlich an die Stelle der *Ungleichungen* (24a) die folgenden Gleichungen treten:

$$\bar{\mathsf{K}} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \text{ bzw. } \mathsf{K} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}. \tag{24b}$$

Überträgt man die soeben in bezug auf den Kettenbruch $\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_2^\infty$ gemachte Bemerkung auf den Kettenbruch $\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ (wobei man also nur alle in Betracht kommenden Indizes um 1 zu erniedrigen hat), so lassen sich die vorstehenden Ergebnisse in den folgenden Satz zusammenfassen:

(VII) *Ist* $\beta_1 > 0$, *so gelten für den Kettenbruch* $\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ *(wo durchweg:* $\alpha_\nu > 0$*) die Beziehungen:*

$$0 < \underline{\mathsf{K}} \leqq \mathsf{K} \leqq \bar{\mathsf{K}} < \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \tag{25}$$

wenn weder alle $\beta_{2\mu}$, *noch alle* $\beta_{2\mu+1}$ für $\mu \geqq 1$ *den Wert* 0 *haben. Dagegen wird dann und nur dann.*

$$\mathsf{K} = 0, \textit{ wenn: } \beta_{2\mu} = 0 \quad (\mu = 1, 2, 3, \cdots\cdots) \tag{26a}$$

$$\textit{und: } \sum_1^\infty{}^{\mu} \frac{\alpha_2 \alpha_4 \cdots \alpha_{2\mu}}{\alpha_3 \alpha_5 \cdots \alpha_{2\mu+1}} \cdot \beta_{2\mu+1} = +\infty,$$

$$\mathsf{K} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \textit{ wenn: } \beta_{2\mu+1} = 0 \quad (\mu = 1, 2, 3, \cdots\cdots) \tag{26b}$$

$$\textit{und: } \sum_1^\infty{}^{\mu} \frac{\alpha_1 \alpha_3 \cdots \alpha_{2\mu-1}}{\alpha_2 \alpha_4 \cdots \alpha_{2\mu}} \cdot \beta_{2\mu} = +\infty\,^{1)}$$

(während an die Stelle dieser beiden Gleichungen nur die folgenden treten:

$$\underline{\mathsf{K}} = 0 \text{ bzw. } \bar{\mathsf{K}} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \tag{27}$$

wenn die entsprechende Zusatzbedingung der Reihendivergenz nicht erfüllt ist).

---

1) Damit ist schon implizite gesagt, daß im Falle (26a) unendlich viele $\beta_{2\mu+1}$, im Falle (26b) unendlich viele $\beta_{2\mu}$ *von Null verschieden* sein müssen.

Man hat also bei $\beta_1 > 0$:

$$\frac{\alpha_1|}{|\beta_1} + \frac{\alpha_2|}{|0} + \frac{\alpha_3|}{|\beta_3} + \frac{\alpha_4|}{|0} + \frac{\alpha_5|}{|\beta_5} + \cdots\cdots = 0, \text{ wenn die Reihe (26a) divergiert,}$$

$$\frac{\alpha_1|}{|\beta_1} + \frac{\alpha_2|}{|\beta_2} + \frac{\alpha_3|}{|0} + \frac{\alpha_4|}{|\beta_4} + \frac{\alpha_5|}{|0} + \cdots\cdots = \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \text{ wenn die Reihe (26b) divergiert.}$$

Nach Ausschluß des durch Satz (VI) charakterisierten Falles außerwesentlicher *Divergenz* behalten im übrigen die in den Sätzen (II)—(Va) angegebenen Konvergenzbedingungen ihre Gültigkeit.[1]) Nur braucht im Falle der *Konvergenz* diese nicht eine *unbedingte* zu sein, nämlich, wie aus Satz (VI) bei passender Verschiebung des Anfangsgliedes hervorgeht, *dann nicht*, wenn von irgendeiner Stelle ab alle $\beta_{2\mu}$ oder alle $\beta_{2\mu+1}$ den Wert *Null* haben.

§ 103. Unendliche regelmäßige Kettenbrüche. — Identitätssatz. — Umkehrbar eindeutige Beziehungen zu den Irrationalzahlen. — Neuer Beweis des Äquivalenzsatzes von § 71.

1. Ein der ersten Hauptform angehöriger unendlicher Kettenbruch:

$$(1) \qquad (\mathsf{K}_\infty) \equiv \beta_0 + \left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$$

heißt (wie im analogen Falle ein endlicher Kettenbruch) *regelmäßig*, wenn die β_ν für $\nu \geqq 1$ *natürliche* Zahlen sind, während β_0 eine *beliebige ganze* Zahl (einschließlich der *Null*) sein kann. Ein solcher Kettenbruch ist, da hier die Reihe $\sum \beta_\nu$ stets *divergiert*, nach dem Satze II des vorigen Paragraphen (S. 764) stets *konvergent*, und zwar *unbedingt* konvergent, sodaß gesetzt werden kann:

$$(2) \qquad \beta_0 + \left[\frac{1}{\beta}\right]_1^\infty = \mathsf{K},$$

wo K eine bestimmte Zahl vorstellt, und zwar eine *positive*, wenn $\beta_0 \geqq 0$, eine *negative*, wenn $\beta_0 < 0$, wie ja unmittelbar daraus hervorgeht, daß der Wert des Kettenbruches $\left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ nach dem Satz I des vorigen Paragraphen (S. 761) stets zwischen $\frac{1|}{|\beta_1} + \frac{1|}{|\beta_2}$ und $\frac{1}{\beta_1}$, also schließlich zwischen 0 und 1 liegt. Aus der letzten Bemerkung ergibt sich auch sofort der folgende Satz:

1) Auch die in (26a), (26b) und (27) enthaltenen Aussagen sind ja schließlich nur besondere Fälle bzw. Grenzfälle des Satzes (III).

Zwei gleichwertige unendliche regelmäßige Kettenbrüche sind identisch.[1])

Denn, angenommen es sei:

$$\beta_0' + \left[\frac{1}{\beta_\nu'}\right]_1^\infty = \beta_0 + \left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_1^\infty,$$

so zerfällt diese Gleichung, da β_0', β_0 *ganze* Zahlen sind und die Werte von $\left[\frac{1}{\beta_\nu'}\right]_1^\infty$, $\left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ zwischen 0 und 1 liegen, in die folgenden zwei:

$$\beta_0' = \beta_0, \quad \left[\frac{1}{\beta_\nu'}\right]_1^\infty = \left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_1^\infty,$$

und aus der zweiten dieser Gleichungen folgt durch Übergang zu den reziproken Werten, also den im Nenner stehenden Kettenbrüchen:

$$\beta_1' + \left[\frac{1}{\beta_\nu'}\right]_2^\infty = \beta_1 + \left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_2^\infty, \text{ sodaß wiederum: } \beta_1' = \beta_1, \left[\frac{1}{\beta_\nu'}\right]_2^\infty = \left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_2^\infty$$

usf. (analog wie im Falle zweier *endlicher* regelmäßiger Kettenbrüche: § 101, Nr. 1, S. 753/4).

2. Werden die Näherungsbrüche wieder mit $K_\nu = \frac{A_\nu}{B_\nu}$ bezeichnet, so folgt aus dem in § 101, Nr. 1, S. 753, über endliche regelmäßige Kettenbrüche Gesagten, daß die B_ν und, im Falle $\beta_0 \geqq 0$, auch die A_ν *positiv ganzzahlig* und mit ν *monoton zunehmend ins Unendliche* wachsen, während im Falle $\beta_0 < 0$ das gleiche von $-A_\nu$ gilt. Ferner bilden (wie ja bei jedem Kettenbruche mit positiven Teilzählern und Teilnennern, eventuell abgesehen von β_0) die $K_{2\nu}$ eine monoton zunehmende,

---

1) Der Satz gestattet die folgende Verallgemeinerung, auf deren Beweis jedoch hier nicht eingegangen werden soll: „*Stehen die Werte* K *und* K' *zweier regelmäßiger Kettenbrüche in der Beziehung:*

$$K' = \frac{\alpha_1 K + \alpha_2}{\alpha_3 K + \alpha_4} \quad \left(also: K = \frac{-\alpha_4 K' + \alpha_2}{\alpha_3 K' - \alpha_1}\right),$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ *ganze Zahlen und* $\alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3 = \pm 1$, *so gibt es zwei (eventuell zusammenfallende) Indizes m, n, für welche* $(K_{m,\infty})$ *und* $(K'_{n,\infty})$ *identisch ausfallen.*" Daß andererseits umgekehrt aus der *Identität* von $(K_{m,\infty})$, $(K'_{n,\infty})$ die Existenz einer Beziehung zwischen K und K' von der oben angegebenen Form folgt, erkennt man unmittelbar mit Hilfe der Beziehungen:

$$K = \frac{A_{m-1} K^{(m)} + A_{m-2}}{B_{m-1} K^{(m)} + B_{m-2}}$$

$$K' = \frac{A'_{n-1} K^{(m)} + A'_{n-2}}{B'_{n-1} K^{(m)} + B'_{n-2}},$$

wo $K^{(m)}$ den gemeinsamen Wert von $(K_{m,\infty})$ und $(K'_{n,\infty})$ bedeutet.

die $K_{2\nu+1}$ eine monoton abnehmende Folge (s. § 100, Nr. 1, Ungl. (6), S. 748), und da der Wert K des unendlichen Kettenbruches der gemeinsame Grenzwert beider Folgen ist, so hat man:

(3) $$K_0 < K_2 < \cdots < K_{2\mu} < \cdots \quad < K < \cdots < K_{2\mu+1} < \cdots < K_3 < K_1,$$

und es liegt also wieder insbesondere K stets zwischen zwei beliebigen konsekutiven Näherungsbrüchen. Infolgedessen hat man:

(4) $$|K - K_\nu| < |K_{\nu+1} - K_\nu| = \frac{1}{B_\nu B_{\nu+1}} < \frac{1}{B_\nu^2}.\text{[1]}$$

Im übrigen liegt K (analog wie der Wert eines *endlichen* regelmäßigen Kettenbruches bzw. des in § 100, Nr. 2 betrachteten allgemeineren Typus) *näher* an $K_{\nu+1}$ als an K_ν, also um so näher an K_ν, je größer ν ist Man hat nämlich nach Ungl. (17), S. 749, für $\varrho > 1$:

(5) $$|K_{\nu+\varrho} B_\nu - A_\nu| < |K_{\nu+\varrho} B_{\nu-1} - A_{\nu-1}|.$$

Hieraus würde für $\varrho \longrightarrow \infty$ nur so viel folgen, daß:

(6) $$|KB_\nu - A_\nu| \leqq |KB_{\nu-1} - A_{\nu-1}|,$$

jedoch wird sich sehr bald zeigen, daß für die Geltung des *Gleichheits*zeichens keine Möglichkeit besteht.[2] Im übrigen ergibt sich aus (6) durch Multiplikation mit $\frac{1}{B_\nu}$ weiter:

(7) $$|K - K_\nu| \leqq \frac{B_{\nu-1}}{B_\nu} |K - K_{\nu-1}| < |K - K_{\nu-1}| \quad \left(\text{wegen: } \frac{B_{\nu-1}}{B_\nu} < 1\right)$$

und durch wiederholte Anwendung dieser Ungleichung:

(8) $$|K - K_\nu| < |K - K_\mu| \quad \text{für: } \mu < \nu.$$

3. Bedeutet $\frac{A'}{B'}$ (wo $B' > 0$) einen Bruch, der zwischen irgend zwei konsekutiven Näherungsbrüchen $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$ und $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ des regelmäßigen Kettenbruches liegt (wobei es ja offenbar ganz gleichgültig ist, ob dieser ein endlicher oder unendlicher ist), so hat man, wie in § 101, Nr. 3 gezeigt wurde (S. 756, Ungl. (15)):

(9) $$B' > B_\nu.$$

---

1) Man hat sogar:

$$|K - K_\nu| < \frac{1}{\beta_{\nu+1} B_\nu^2},$$

wegen:

$$B_{\nu+1} = \beta_{\nu+1} B_\nu + B_{\nu-1} > \beta_{\nu+1} B_\nu$$

(wo $\beta_{\nu+1} \geqq 1$).

2) S. Nr. 3 am Ende.

Hieraus folgt aber mit Notwendigkeit, daß der *Wert* K eines unendlichen regelmäßigen Kettenbruches niemals rational sein kann Denn, wäre $K = \frac{A'}{B'}$, so müßte die Ungleichung (9) für *jedes noch so große* ν bestehen, was unmöglich ist, da $\lim_{\nu \to \infty} B_\nu = +\infty$. Somit gilt der Satz:

Der Wert eines unendlichen regelmäßigen Kettenbruches ist stets irrational.

Ferner ergibt sich, daß (wiederum analog wie bei endlichen regelmäßigen Kettenbrüchen: s § 101, Nr. 3, S. 756) jeder Näherungsbruch $K_\nu = \frac{A_\nu}{B_\nu}$ dem Werte K des unendlichen Kettenbruches *näher* kommt als jeder andere Bruch $\frac{A'}{B'}$, dessen Nenner nicht größer ist als derjenige von K_ν. Denn angenommen, man habe:

$$|K - \frac{A'}{B'}| < |K - K_\nu|, \tag{10}$$

so folgt aus Ungl. (7), daß um so mehr:

$$|K - \frac{A'}{B'}| < |K - K_{\nu-1}|, \tag{11}$$

und da andererseits K *zwischen* $K_{\nu-1}$ und K_ν liegt, so ergibt sich aus diesen beiden Ungleichungen, daß auch $\frac{A'}{B'}$ zwischen $K_{\nu-1}$ und K_ν liegen muß und daß daher wieder die Ungleichung (9) besteht.

Auch zeigt die Irrationalität von K, daß, wie bereits angekündigt, das Auftreten des *Gleichheits*zeichens in der Beziehung (6) in Wirklichkeit ausgeschlossen ist. Denn, wäre etwa:

$$|KB_\nu - A_\nu| = |KB_{\nu-1} - A_{\nu-1}|,$$

so hätte man, da ja die betreffenden Differenzen entgegengesetztes Vorzeichen besitzen:

$$KB_\nu - A_\nu = -KB_{\nu-1} + A_{\nu-1},$$

also:

$$K = \frac{A_{\nu-1} + A_\nu}{B_{\nu-1} + B_\nu}, \text{ d. h. } \textit{rational},$$

was unmöglich ist.

4. Der Satz, daß jeder unendliche regelmäßige Kettenbruch einen *irrationalen* Wert besitzt, ist (immer wieder, wie der entsprechende Satz für endliche regelmäßige Kettenbrüche) umkehrbar, d. h. jede *Irrationalzahl* läßt sich auch durch einen unendlichen regelmäßigen Kettenbruch darstellen

Ist ξ eine positive oder negative *Irrationalzahl*, so läßt sich ξ stets, und zwar nur auf eine Weise in die Form setzen:

$$\xi = \beta_0 + \frac{1}{\xi'}, \tag{12}$$

wo β_0 eine *positive* oder *negative ganze Zahl* oder auch die *Null* vorstellt, $\frac{1}{\xi_1}$ eine dem Intervall: $0 < \frac{1}{\xi_1} < 1$ angehörige *Irrationalzahl* bedeutet. Da hiernach $\xi_1 > 1$ und gleichfalls *irrational*, so ergibt sich analog:

$$(12_1) \qquad \xi_1 = \beta_1 + \frac{1}{\xi_2}, \quad \text{wo: } \beta_1 \geqq 1 \text{ eine natürliche Zahl,}$$
$$\text{„} \quad 0 < \frac{1}{\xi_2} < 1, \ \xi_2 \textit{ irrational.}$$

Ebenso:

$$(12_2) \qquad \xi_2 = \beta_2 + \frac{1}{\xi_3}, \quad \text{wo: } \beta_2 \geqq 1, \ 0 < \frac{1}{\xi_3} < 1, \ \xi_3 \textit{ irrational,}$$

und in dieser Weise fortfahrend, allgemein:

$$(12_\nu) \qquad \xi_\nu = \beta_\nu + \frac{1}{\xi_{\nu+1}}, \quad \text{wo: } \beta_\nu \geqq 1, \ 0 < \frac{1}{\xi_{\nu+1}} < 1, \ \xi_{\nu+1} \textit{ irrational.}$$[1]

Durch Einsetzen der Beziehungen (12_1), (12_2), $\cdots$ (12_ν) in Gl. (12) ergibt sich zunächst für ξ eine Kettenbruchentwicklung von der Form:

$$(13) \qquad \xi = \beta_0 + \frac{1|}{|\beta_1} + \frac{1|}{|\beta_2} + \cdots + \frac{1|}{|\beta_\nu} + \frac{1|}{|\xi_{\nu+1}}.$$

Dabei bricht der obige Prozeß wegen der *Irrationalität* eines jeden $\xi_{\nu+1}$ niemals ab, sodaß es freisteht, die Gliederzahl $\nu + 1$ des Kettenbruches (13) unbegrenzt zu vergrößern. Werden nun dessen Näherungsbrüche wieder mit $\frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1}{B_1}, \cdots$ bezeichnet, so ergibt sich auf Grund unserer üblichen Rekursionsformel:

$$(14) \qquad \xi = \frac{\xi_{\nu+1} A_\nu + A_{\nu-1}}{\xi_{\nu+1} B_\nu + B_{\nu-1}}$$

und daher:

$$(15) \qquad \xi - \frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{A_{\nu-1} B_\nu - A_\nu B_{\nu-1}}{B_\nu(\xi_{\nu+1} B_\nu + B_{\nu-1})} = \frac{(-1)^\nu}{B_\nu(\xi_{\nu+1} B_\nu + B_{\nu-1})},$$

also, wegen $\xi_{\nu+1} > 1$:

$$(16) \qquad \left|\xi - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| < \frac{1}{B_\nu^2}$$

und, wegen $\lim\limits_{\nu \to \infty} B_\nu = +\infty$:

$$(17) \qquad \xi = \lim_{\nu \to \infty} \frac{A_\nu}{B_\nu},$$

d. h. schließlich:

$$(18) \qquad \xi = \beta_0 + \left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_1^\infty.$$

---

1) Die bei diesem Verfahren sich ergebenden Zahlen $\beta_0, \beta_1, \cdots \beta_\nu, \cdots$ werden auch als *unvollständige*, $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_\nu \cdots$ als *vollständige Quotienten* bezeichnet.

Durch Zusammenfassung dieses Resultats mit dem Identitätssatze von Nr. 1 und dem Satze von Nr. 3 betreffend die Irrationalität des Wertes jedes unendlichen regelmäßigen Kettenbruches ergibt sich also der folgende Satz:

Jede (reelle) Irrationalzahl läßt sich in einen und nur einen unendlichen regelmäßigen Kettenbruch entwickeln. Umgekehrt stellt jeder solche Kettenbruch eine gewisse Irrationalzahl dar.

5. Hiernach findet zwischen *der Menge der reellen Irrationalzahlen* und derjenigen *der unendlichen regelmäßigen* Kettenbrüche eine *umkehrbar eindeutige Beziehung* statt, gerade so wie zwischen *Irrationalzahlen* und *nicht-periodischen unendlichen Systembrüchen* (vgl § 24, Nr. 4, S. 148). Diese Beziehung kann zunächst dazu dienen, um die *reellen Irrationalzahlen* x' des Intervalls $0 < x' < 1$ den *paarweise irrationalen komplexen Zahlen*, d. h. den Zahlen $\xi' + \eta' i$ mit *zwei irrationalen* Bestandteilen ξ', η', des Bereiches $0 < \xi' < 1$, $0 < \eta' < 1$ umkehrbar eindeutig zuzuordnen. Setzt man nämlich:

$$x' = \left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$$

und ordnet man diesem x' dasjenige $\xi' + \eta' i$ zu, dessen Bestandteile ξ', η' definiert sind durch die Gleichungen:

$$\xi' = \left[\frac{1}{\beta_{2\nu-1}}\right]_1^\infty, \quad \eta' = \left[\frac{1}{\beta_{2\nu}}\right]_1^\infty,$$

so entspricht jedem *irrationalen* x' des Intervalls $0 < x' < 1$ *ein* und *nur* ein aus *zwei irrationalen* Bestandteilen bestehendes $\xi' + \eta' i$ des Bereiches $0 < \xi' < 1$, $0 < \eta' < 1$. Umgekehrt: wird $\xi' + \eta' i$ mit *irrationalem* ξ' und η' in den angegebenen Grenzen beliebig angenommen, sodaß regelmäßige Kettenbruchentwicklungen von der Form bestehen:

$$\xi' = \left[\frac{1}{\gamma_\nu}\right]_1^\infty, \quad \eta' = \left[\frac{1}{\delta_\nu}\right]_1^\infty,$$

so braucht man nur zu setzen:

$$x' = \frac{1|}{|\gamma_1} + \frac{1|}{|\delta_1} + \cdots + \frac{1|}{|\gamma_\nu} + \frac{1|}{|\delta_\nu} + \quad \cdots,$$

um genau dieselbe Zuordnung zu erzielen, welche zustande gekommen wäre, wenn man von diesem x' ausgehend nach dem zuerst angegebenen Verfahren ξ' und η' daraus bestimmt hätte. Es wird also auf diese Weise eine umkehrbar eindeutige gegenseitige Zuordnung der beiden Zahlenmengen (x') und $(\xi' + \eta' i)$ erzielt.

Um dieses Ergebnis analog wie in § 71, Nr. 3, 4, S. 545 ff., zur Herstellung einer umkehrbar eindeutigen Beziehung zwischen der gesamten *reellen* Zahlenmenge (x) des Intervalls $0 \leqq x \leqq 1$ und der *kom-*

plexen Zahlenmenge $(X) \equiv (\xi + \eta i)$ des Bereiches $0 \leqq \xi \leqq 1$, $0 \leqq \eta \leqq 1$ zu verwerten, hat man nur zu zeigen, daß die Menge (x') der *reellen Irrationalzahlen:* $0 < x' < 1$ der Menge (x) *aller reellen* Zahlen $0 \leqq x \leqq 1$, ebenso die Menge $(X') \equiv (\xi' + \eta' i)$ der *paarweise irrationalen komplexen* Zahlen: $0 < \xi' < 1$, $0 < \eta' < 1$ der *Gesamt*menge $(X) \equiv (\xi + \eta i)$, wo: $0 \leqq \xi \leqq 1$, $0 \leqq \eta \leqq 1$ umkehrbar eindeutig zugeordnet werden kann.

Es werde mit (x'_ν) $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$ irgendeine aus der Menge der Irrationalzahlen (x') herausgehobene *abzählbare* Menge, mit (x'') die übrigbleibende Menge bezeichnet, sodaß also die Menge (x') in die beiden Teilmengen (x'_ν) und (x'') zerfällt, was wir durch die Schreibweise andeuten wollen:

$$(x') = (x'') + (x'_\nu). \tag{19}$$

Bezeichnet man ferner mit (r_ν) die abzählbare Menge der *rationalen* Zahlen von 0 bis 1 (inkl.), so besteht für die Gesamtmenge (x) dieses Intervalls die Zerlegung:

$$(x) = (x') + (r_\nu) \tag{20}$$

oder, wenn man auf die Menge (x') noch die Zerlegung (19) anwendet:

$$(x) = (x'') + (x'_\nu) + (r_\nu). \tag{21}$$

Wird jetzt noch bei der Zerlegung (19) die abzählbare Menge (x'_ν) in die beiden Teilmengen $(x'_{2\nu-1})$ und $(x'_{2\nu})$ gespalten, sodaß sich also ergibt:

$$(x') = (x'') + (x'_{2\nu-1}) + (x'_{2\nu}), \tag{22}$$

so zeigt die Vergleichung von (21) und (22), daß die fragliche gegenseitige Zuordnung der Mengen (x) und (x') erzielt wird, wenn man die Teilmenge (x'') sich selbst und die beiden abzählbaren Teilmengen (x'_ν) und (r_ν) den gleichfalls abzählbaren Teilmengen $(x'_{2\nu-1})$ und $(x'_{2\nu})$ zuordnet.

Da jede der Mengen (ξ') und (η') identisch mit (x'), jede der Mengen (ξ) und (η) identisch mit (x) ist, so läßt sich in ganz derselben Weise eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Mengen (ξ') und (ξ), (η') und (η), also schließlich auch zwischen der Menge $(X') \equiv (\xi' + \eta' i)$ und $X \equiv (\xi + \eta i)$ herstellen. Und da andererseits auf Grund der Kettenbruchdarstellung schon eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Mengen (x') und $(X') \equiv (\xi' + \eta' i)$ bestand, so folgt, daß von den Mengen:

$$(x),\ (x'),\ (X'),\ (X)$$

jede der drei ersten der nächstfolgenden, also auch die erste der letzten eindeutig umkehrbar zugeordnet werden kann, daß also die *reelle* Menge (x) und die *komplexe* Menge (X) *äquivalent* sind

§ 104. Umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen quadratischen Irrationalzahlen und periodischen regelmäßigen Kettenbrüchen, insbesondere zwischen „perfekten“ quadratischen Irrationalzahlen und rein periodischen regelmäßigen Kettenbrüchen. — Konjugierte Irrationalzahlen und inverse Perioden. — Kettenbrüche für Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen.

1. Die Anwendung des in Nr. 4 des vorigen Paragraphen besprochenen Entwicklungsprozesses auf die (in einem alsbald genau zu umschreibenden Sinne) *einfachste* Gattung von *Irrationalzahlen* führt auch auf die *einfachste* Gattung von *unendlichen regelmäßigen Kettenbrüchen*, nämlich die *periodischen*, analog wie bei der Darstellung der *rationalen* Zahlen durch *unendliche Systembrüche* die *periodischen Systembrüche* zum Vorschein kamen (s. § 17, Nr. 3, S. 101 und § 20, Nr. 1, S. 117). Dabei bezeichnen wir (wie ja schon aus dem Hinweis auf die Analogie mit den periodischen Systembrüchen hervorgeht) einen unendlichen regelmäßigen Kettenbruch: $\beta_0 + \left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ als *periodisch* mit der *p-gliedrigen Periode* $\beta_k, \beta_{k+1}, \cdots, \beta_{k+p-1}$ (wo $k \geqq 0$, $p \geqq 1$), wenn von einer bestimmten Stelle $\nu = k$ ab die Folge der Teilnenner $\beta_k, \beta_{k+1}, \cdots \beta_{k+p-1}$ (die sich im Falle $p = 1$ auf das *eine* Glied β_k reduziert) *beständig wiederkehrt*, sodaß also:

$$(1a) \qquad \beta_{\nu+p} = \beta_\nu \quad (\nu = k,\ k+1,\ k+2, \cdots\cdots),$$

anders geschrieben:

$$(1b) \qquad \beta_{\lambda+\mu p} = \beta_\lambda \quad \begin{pmatrix} \lambda = k,\ k+1, \cdots, k+p-1 \\ \mu = 1, 2, 3, \cdots\cdots \end{pmatrix}.$$

Ist $k = 0$, beginnt also die Periode schon mit dem Anfangsgliede β_0 (welches offenbar in diesem Falle stets $\geqq 1$ sein muß), so heißt der Kettenbruch *rein periodisch* und soll dann gelegentlich mit:

$$\left[\overline{\beta_0, \frac{1}{\beta_1}, \cdots, \frac{1}{\beta_{p-1}}}\right]$$

bezeichnet werden. In jedem anderen Falle heißt er *unrein periodisch*, und als entsprechende Bezeichnung dient alsdann die folgende:

$$\left[\beta_0, \frac{1}{\beta_1}, \cdots, \frac{1}{\beta_{k-1}}, \overline{\frac{1}{\beta_k}, \cdots, \frac{1}{\beta_{k+p-1}}}\right].$$

2. Unter den oben als *einfachste* Gattung bezeichneten *Irrationalzahlen* verstehen wir naturgemäß die nächst den rationalen Zahlen *niedrigste* Ordnung von *algebraischen* Zahlen, also die algebraischen Zahlen *zweiter* Ordnung, d. h. auf Grund der in § 25, Nr. 5, S. 156, gegebenen Definition die gewöhnlich als *quadratische Irrationalzahlen*

bezeichneten *reellen irrationalen* Wurzeln einer *quadratischen* Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten. Gibt man dieser letzteren die Form:

$$(2)\qquad \mathsf{N}x^2 - 2\mathsf{M}x + \Lambda = 0,$$

wo N, M, Λ ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler bedeuten (während N, $2\mathsf{M}$, Λ allenfalls den gemeinsamen Teiler 2 haben können) und N, Λ ausdrücklich als *von Null verschieden* anzunehmen sind, so besitzt sie nach § 70, Nr 5, Gl. (23), S. 542, die beiden Wurzeln:

$$(3)\qquad \xi = \frac{\mathsf{M}+\sqrt{\Delta}}{\mathsf{N}},\quad \xi' = \frac{\mathsf{M}-\sqrt{\Delta}}{\mathsf{N}},\quad \text{wo: } \Delta = \mathsf{M}^2 - \mathsf{N}\Lambda$$

und diese Wurzeln sind beide *reell* und *irrational*, wenn Δ *positiv* und *nicht* das *Quadrat* einer ganzen Zahl ist.[1]) Dabei mag unter $\sqrt{\Delta}$ hier und im folgenden stets der *positive* Wert dieser Quadratwurzel verstanden werden.

Sieht man in den Ausdrücken (3) für *die quadratischen Irrationalzahlen* ξ und ξ' außer M, N auch Δ (statt Λ) als *gegeben* an (und zwar wiederum als nicht quadratische ganze Zahl), so genügen ξ und ξ' wiederum der Gleichung (2), wenn gesetzt wird:

$$(4)\qquad -\Lambda = \frac{\Delta - \mathsf{M}^2}{\mathsf{N}}.$$

Dabei wird offenbar Λ im allgemeinen *keine ganze* Zahl sein, was aber auf den Charakter der Gleichung (2) und ihrer Wurzeln ξ und ξ' offenbar keinerlei Einfluß hat, da es ja ohne weiteres freisteht, den etwaigen Nenner von Λ durch Multiplikation fortzuschaffen. Statt dessen kann man aber auch von vornherein ξ und ξ' durch passende Abänderung von M, N, Δ so umformen, daß $\frac{\Delta - \mathsf{M}^2}{\mathsf{N}}$ *ganzzahlig* ausfällt.

Angenommen nämlich, man habe zunächst:

$$\xi = \frac{\mathsf{M}'+\sqrt{\Delta'}}{\mathsf{N}'},$$

so folgt:

$$\xi = \frac{\gamma\mathsf{M}'+\sqrt{\gamma^2\Delta'}}{\gamma\mathsf{N}'} = \frac{\mathsf{M}+\sqrt{\Delta}}{\mathsf{N}},$$

wenn gesetzt wird:

$$\mathsf{M} = \gamma\mathsf{M}',\quad \mathsf{N} = \gamma\mathsf{N}',\quad \Delta = \gamma^2\Delta',$$

also.

$$\frac{\Delta - \mathsf{M}^2}{\mathsf{N}} = \gamma\cdot\frac{\Delta' - \mathsf{M}'^2}{\mathsf{N}'},$$

---

1) Da aus (3) folgt:

$$\xi\xi' = \frac{\mathsf{M}^2 - \Delta}{\mathsf{N}^2} = \frac{\Lambda}{\mathsf{N}},$$

so haben ξ und ξ' *gleiches* Vorzeichen, wenn $\frac{\Lambda}{\mathsf{N}} > 0$, *entgegengesetztes* Vorzeichen, wenn $\frac{\Lambda}{\mathsf{N}} < 0$.

und es wird daher $\frac{\Delta - M^2}{N}$ *ganzzahlig*, wenn gesetzt wird: $\gamma = \frac{N'}{\delta}$, wo $\delta \geqq 1$ den größten Gemeinteiler von N' und $\Delta' - M'^2$ bedeutet.

Beachtet man noch, daß die in (3) mit ξ' bezeichnete Zahl auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\xi' = \frac{\sqrt{\Delta} + (-M)}{-N},$$

so folgt, daß *jede quadratische Irrationalzahl* (also laut Definition jede reelle irrationale Wurzel einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten) in die Form gesetzt werden kann:

$$\frac{\sqrt{\Delta} + M}{N}, \tag{5}$$

wo Δ eine *positive, nicht quadratische ganze Zahl;* M, N, $\frac{\Delta - M^2}{N}$ *ganze Zahlen beliebigen Vorzeichens* (und zwar M mit *Einschluß*, N mit *Ausschluß* der *Null*). Wir wollen einen solchen Ausdruck von der Form (5) als die *Normalform* einer quadratischen Irrationalzahl betrachten und als *normierte quadratische Irrationalität* bezeichnen. Zwei quadratische Irrationalzahlen ξ und ξ', deren Normalformen sich nur durch das Vorzeichen von $\sqrt{\Delta}$ unterscheiden:

$$\xi = \frac{\sqrt{\Delta} + M}{N}, \quad \xi' = \frac{-\sqrt{\Delta} + M}{N} = -\frac{\sqrt{\Delta} - M}{N} \tag{6}$$

(die somit nach Gl. (2) und (3) die Wurzeln *einer* quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten sind), also schließlich zwei Zahlen von der Form:

$$\alpha + \beta\sqrt{\Delta}, \quad \alpha - \beta\sqrt{\Delta}, \tag{7}$$

wo α und β beliebige *rationale* Zahlen sind, sollen *konjugiert* heißen. Die Veranlassung zur Einführung dieser sonst von uns nur für *komplexe* Zahlenpaare $\alpha' + \beta' i$, $\alpha' - \beta' i$ (wo also α', β' beliebig *reell*) gebrauchten Bezeichnungsweise entspringt aus der Tatsache, daß die *irrationale* Quadratwurzel $\sqrt{\Delta}$ und die Begriffe *„rational"* und *„irrational"* in dem vorliegenden Zusammenhange eine ganz analoge Rolle spielen, wie im anderen Falle die *imaginäre* Quadratwurzel $\sqrt{-1}$ und die Begriffe *„reell"* und *„imaginär"*. So sind *Summe* und *Produkt* zweier im Sinne der Ausdrücke (7) *konjugierter* quadratischer Irrationalzahlen offenbar stets *rational*, ihre *Differenz* stets *irrational* (sogar „rein" irrational, nämlich von der Form: $2\beta\sqrt{\Delta}$). Ferner kann eine Beziehung von der Form:

$$\alpha + \beta\sqrt{\Delta} = 0 \tag{8}$$

nur bestehen, wenn:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0,$$

da ja anderenfalls aus (8) die unmögliche Beziehung: $\sqrt{\Delta} = -\frac{\alpha}{\beta}$ hervorgehen würde, und es zieht daher die Beziehung (8) stets auch die folgende nach sich:

$$\alpha - \beta\sqrt{\Delta} = 0 \tag{9}$$

und umgekehrt

Bezeichnet man ferner mit $g(\alpha + \beta\sqrt{\Delta})$ eine ganze rationale Funktion von $\alpha + \beta\sqrt{\Delta}$ mit ganzzahligen Koeffizienten und beachtet, daß:

$$(\sqrt{\Delta})^{2\mu} = \Delta^{\mu}, \quad (\sqrt{\Delta})^{2\mu+1} = \Delta^{\mu}\cdot\sqrt{\Delta},$$

so folgt, daß $g(\alpha + \beta\sqrt{\Delta})$ stets in die Form gesetzt werden kann:

$$g(\alpha + \beta\sqrt{\Delta}) = \mathsf{A} + \mathsf{B}\sqrt{\Delta}, \tag{10}$$

wo A, B wiederum *rationale* Zahlen bedeuten. Und da andererseits:

$$(-\sqrt{\Delta})^{2\mu} = \Delta^{\mu}, \quad (-\sqrt{\Delta})^{2\mu+1} = -\Delta^{\mu}\cdot\sqrt{\Delta},$$

so folgt weiter, daß:

$$g(\alpha - \beta\sqrt{\Delta}) = \mathsf{A} - \mathsf{B}\sqrt{\Delta}, \tag{11}$$

wo A, B wieder *dieselben rationalen* Zahlen vorstellen wie in Gl. (10), und daß daher:

$$g(\alpha + \beta\sqrt{\Delta})\cdot g(\alpha - \beta\sqrt{\Delta}) = \mathsf{A}^2 - \mathsf{B}^2\Delta, \text{ also eine \textit{rationale} Zahl.} \tag{12}$$

Hiernach hat man, wenn die Symbole g_1, g_2 ebenfalls ganze rationale Funktionen mit rationalen Koeffizienten bedeuten:

$$\frac{g_1(\alpha+\beta\sqrt{\Delta})}{g_2(\alpha+\beta\sqrt{\Delta})} = \frac{g_1(\alpha+\beta\sqrt{\Delta})\cdot g_2(\alpha-\beta\sqrt{\Delta})}{g_2(\alpha+\beta\sqrt{\Delta})\cdot g_2(\alpha-\beta\sqrt{\Delta})} = \mathsf{A}' + \mathsf{B}'\sqrt{\Delta},$$

wo A', B' *rational*, und entsprechend:

$$\frac{g_1(\alpha-\beta\sqrt{\Delta})}{g_2(\alpha-\beta\sqrt{\Delta})} = \mathsf{A}' - \mathsf{B}'\sqrt{\Delta},$$

und daraus folgt schließlich, daß (bei analoger Bedeutung der Symbole G_1, G_2) eine Beziehung von der Form:

$$\frac{g_1(\alpha+\beta\sqrt{\Delta})}{g_2(\alpha+\beta\sqrt{\Delta})} = \frac{G_1(\alpha+\beta\sqrt{\Delta})}{G_2(\alpha+\beta\sqrt{\Delta})} \tag{13}$$

stets auch die folgende nach sich zieht:

$$\frac{g_1(\alpha-\beta\sqrt{\Delta})}{g_2(\alpha-\beta\sqrt{\Delta})} = \frac{G_1(\alpha-\beta\sqrt{\Delta})}{G_2(\alpha-\beta\sqrt{\Delta})}, \tag{14}$$

und umgekehrt, sodaß es also freisteht, in einer Beziehung von der Form (13) oder (14) $\sqrt{\Delta}$ durch $-\sqrt{\Delta}$ zu ersetzen.

3. Es erscheint für die weiteren Entwicklungen zweckmäßig, eine bestimmte Kategorie von quadratischen Irrationalitäten ausdrücklich hervorzuheben und mit einem besonderen Namen zu belegen. Wir wollen eine *normierte* quadratische Irrationalität ξ als *perfekt* bezeichnen, wenn sie größer als 1 ist, und ihre Konjugierte ξ' zwischen 0 und -1 liegt[1]), wenn also:

$$\xi \equiv \frac{\sqrt{\Delta}+\mathsf{M}}{\mathsf{N}} > 1, \quad -\xi' \equiv \frac{\sqrt{\Delta}-\mathsf{M}}{\mathsf{N}} \begin{cases} > 0 \\ < 1 \end{cases} \tag{15}$$

Da hieraus durch Addition und Subtraktion sich ergibt:

$$\frac{2\sqrt{\Delta}}{\mathsf{N}} > 1, \quad \frac{2\mathsf{M}}{\mathsf{N}} > 0, \tag{16}$$

so folgt aus der ersten dieser Ungleichungen, daß:

$$0 < \mathsf{N} < 2\sqrt{\Delta}, \tag{17}$$

sodann aus der zweiten mit Rücksicht auf die Beziehung $-\xi' > 0$:

$$0 < \mathsf{M} < \sqrt{\Delta}. \tag{18}$$

Hiernach lassen sich die Bedingungen (15) offenbar auch durch die folgenden ersetzen:

$$0 < \sqrt{\Delta} - \mathsf{M} < \mathsf{N} < \sqrt{\Delta} + \mathsf{M}, \tag{19}$$

mit dem Zusatze, daß N ein *Teiler* von $\Delta - \mathsf{M}^2$ sein muß, da ja die Irrationalität ξ ausdrücklich als eine *normierte* vorausgesetzt wurde.

Aus diesen Bedingungen ist aber unmittelbar ersichtlich, daß die Anzahl der zu jeder einzelnen nicht quadratischen natürlichen Zahl Δ gehörigen *perfekten* Irrationalitäten eine *begrenzte* ist. Um eine obere Schranke für diese Anzahl zu gewinnen, wollen wir zunächst die Anzahl S derjenigen Wertepaare M, N bestimmen, welche den Bedingungen (19) (ohne die Zusatzbedingung) genügen. Mit Rücksicht darauf, daß M, N *ganze* Zahlen vorstellen, hat man nach (19), wenn die größte in $\sqrt{\Delta}$ enthaltene ganze Zahl mit E bezeichnet wird:

$$1 \leqq \mathsf{M} \leqq \mathsf{E}, \quad \mathsf{E}+1-\mathsf{M} \leqq \mathsf{N} \leqq \mathsf{E}+\mathsf{M} \tag{20}$$

und daher

für: $\mathsf{M}=1$: $\quad \mathsf{E} \leqq \mathsf{N} \leqq \mathsf{E}+1$, also Anzahl: 2
„ $\mathsf{M}=2$: $\mathsf{E}-1 \leqq \mathsf{N} \leqq \mathsf{E}+2$, „ „ 4
. . . .
„ $\mathsf{M}=\mathsf{E}$: $\quad 1 \leqq \mathsf{N} \leqq 2\mathsf{E}$, „ „ $2\mathsf{E}$,

---

1) Gleichzeitig mit ξ ist also auch $-\frac{1}{\xi'}$ *perfekt*. Denn setzt man $-\frac{1}{\xi'}=\eta$ und bezeichnet die Konjugierte von η mit η', so hat man $\eta > 1$ und $\eta' = -\frac{1}{\xi} \begin{cases} < 0 \\ > -1 \end{cases}$

sodaß für die Gesamtzahl aller dieser Wertepaare M, N sich ergibt:

$$S = 2(1 + 2 + \cdots + E) = (1 + 2 + \cdots + E) + (E + (E-1) + \cdots + 1)$$
$$= E \cdot (E + 1).$$

Da aber von diesen Wertepaaren M, N nur diejenigen in Betracht kommen, bei denen N ein Teiler von $\Delta - M^2$ ist, so folgt, daß die Anzahl der betreffenden perfekten Irrationalitäten sicher *kleiner*[1]) und, wie sogleich an einem numerischen Beispiel verdeutlicht werden soll, sogar *erheblich kleiner* ist als $E \cdot (E + 1)$.

Beispiel Es sei $\Delta = 32$, also: $E = 5$ Man hat zunächst:

Für	$M = 1$: $N = 5, 6$	$\Delta - M^2 = 31$
„	$M = 2$: $N = 4, 5, 6, 7$	$\Delta - M^2 = 28$
„	$M = 3$: $N = 3, 4, 5, 6, 7, 8$	$\Delta - M^2 = 23$
„	$M = 4$: $N = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$	$\Delta - M^2 = 16$
„	$M = 5$: $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.$	$\Delta - M^2 = 7.$

Mit Rücksicht auf die in der letzten Kolonne angeführten Werte von $\Delta - M^2$ sind also von diesen $E \cdot (E + 1) = 30$ Wertepaaren M, N nur die folgenden 7 brauchbar:

$$(M = 2,\ N = 4,\ 7)\ (M = 4,\ N = 2,\ 4,\ 8)\ (M = 5,\ N = 1,\ 7).$$

Die mit $\sqrt{32}$ behafteten perfekten Irrationalitaten lauten also:

$$\frac{\sqrt{32}+2}{4},\ \frac{\sqrt{32}+2}{7},\ \frac{\sqrt{32}+4}{2},\ \frac{\sqrt{32}+4}{4},\ \frac{\sqrt{32}+4}{8},\ \frac{\sqrt{32}+5}{1},\ \frac{\sqrt{32}+5}{7}.$$

4. Wir beweisen jetzt zunächst den folgenden *Hilfssatz:*

Ist $\xi = \frac{\sqrt{\Delta} + M}{N}$ eine normierte quadratische Irrationalität, β die größte unterhalb ξ gelegene ganze Zahl[2]) *und setzt man:*

$$\xi = \beta + \frac{1}{\xi_1},$$

---

1) Faßt man z. B. den Wert $M = E$ ins Auge, so hat man:

$$\Delta - M^2 < (E + 1)^2 - E^2 = 2E + 1,$$

also:

$$\Delta - M^2 \leqq 2E.$$

Da andererseits $2E - 1$ und $2E$ relativ prim zueinander sind, so kann also $\Delta - E^2$ keinesfalls gleichzeitig die beiden Teiler $N = 2E - 1$ und $N = 2E$ haben.

Andererseits erkennt man unmittelbar, daß die Irrationalität $\frac{\sqrt{\Delta}+E}{1}$ stets eine *perfekte* ist. Denn man hat:

$$\frac{\sqrt{\Delta}+E}{1} > 2E > 1, \quad 0 < \frac{\sqrt{\Delta}-E}{1} < 1$$

Es gibt also zu jedem Δ mindestens *eine perfekte* Irrationalität.

2) Man hat also $\beta = [\xi]$, d. h. β gleich der größten in ξ enthaltenen ganzen Zahl (vgl. § 52, Nr. 3, S. 356; daselbst, Zeile 7 von unten, ist das Wort „wiederum" zu streichen), wenn $\xi \geqq 0$; dagegen $|\beta| = [|\xi| + 1]$ und $\beta < 0$, wenn $\xi < 0$

so ist ξ_1 eine normierte quadratische Irrationalität von der Form $\frac{\sqrt{\Delta}+M_1}{N_1}$ und > 1. Ist schon $\xi > 1$, also $\beta \geqq 1$, und überdies die zu ξ konjugierte Irrationalität $\xi' < 0$[1]*, also $\frac{\sqrt{\Delta}-M}{N} > 0$, so ist ξ_1 perfekt.*

Beweis. Aus:

$$\frac{\sqrt{\Delta}+M}{N} = \beta + \frac{1}{\xi_1} \quad \left(\text{wo: } 0 < \frac{1}{\xi_1} < 1\right) \tag{21}$$

folgt:

$$\frac{1}{\xi_1} = \frac{\sqrt{\Delta}-(\beta N - M)}{N} = \frac{\Delta-(\beta N-M)^2}{N(\sqrt{\Delta}+(\beta N-M))} \tag{22}$$

$$= \frac{N_1}{\sqrt{\Delta}+M_1} < 1,$$

wenn gesetzt wird:

$$M_1 = \beta N - M \tag{23}$$

$$N_1 = \frac{\Delta - M_1^2}{N} = \frac{\Delta - M^2}{N} - \beta^2 N + 2\beta M. \tag{24}$$

Da $\frac{\Delta-M^2}{N}$ auf Grund der Voraussetzung eine *ganze* Zahl, so gilt das gleiche von N_1, außerdem von M_1 und $\frac{\Delta - M_1^2}{N_1} = N$, und es ist daher $\xi_1 = \frac{\sqrt{\Delta}+M_1}{N_1}$ *normiert*, überdies nach (22) $\xi_1 > 1$.

Durch Einsetzen der Beziehung (21) in Gl. (22) ergibt sich sodann:

$$\frac{N_1}{\sqrt{\Delta}+M_1} = -\beta + \frac{\sqrt{\Delta}+M}{N},$$

also durch Vertauschung von $\sqrt{\Delta}$ mit $-\sqrt{\Delta}$ und Multiplikation mit dem Faktor -1:

$$\frac{N_1}{\sqrt{\Delta}-M_1} = \beta + \frac{\sqrt{\Delta}-M}{N}. \tag{25}$$

Wird jetzt angenommen, daß $\beta \geqq 1$, $\frac{\sqrt{\Delta}-M}{N} > 0$, so folgt weiter:

$$\frac{N_1}{\sqrt{\Delta}-M_1} > 1,$$

also:

$$\frac{\sqrt{\Delta}-M_1}{N_1} \begin{cases} > 0 \\ < 1, \end{cases} \tag{26}$$

und da bereits nach (22) feststeht, daß $\xi_1 \equiv \frac{\sqrt{\Delta}+M_1}{N_1} > 1$, so ist, wie behauptet, ξ_1 eine *perfekte* quadratische Irrationalität.

---

[1] Diese Bedingungen sind insbesondere erfüllt, wenn ξ selbst *perfekt* ist, da ja in diesem Falle: $\xi > 1$, $-1 < \xi' < 0$.

5. Hauptsatz.

Der regelmäßige Kettenbruch, welcher eine quadratische Irrationalzahl darstellt, ist stets periodisch. Umgekehrt stellt jeder periodische regelmäßige Kettenbruch eine quadratische Irrationalzahl dar.

Beweis. Es sei:

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{\Delta} + M_0}{N_0} \tag{27}$$

eine auf die *Normalform* gebrachte quadratische Irrationalzahl, $\beta_0 \gtreqless 0$ die größte unterhalb ξ_0 gelegene ganze Zahl, und es werde gesetzt:

$$\xi_0 = \beta_0 + \frac{1}{\xi_1}, \tag{28}$$

so ist nach dem Hilfssatze der vorigen Nummer ξ_1 eine *normierte* quadratische Irrationalität > 1, und zwar (s. Gl. (22)—(24)):

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{\Delta} + M_1}{N_1}, \quad \text{wo:} \begin{cases} M_1 = \beta_0 N_0 - M_0 \\ N_1 = \dfrac{\Delta - M_1^2}{N_0} \text{ eine ganze Zahl.} \end{cases} \tag{29}$$

Wendet man das gleiche Verfahren auf ξ_1 an, so wird:

$$\xi_1 = \beta_1 + \frac{1}{\xi_2}, \tag{30}$$

wobei jetzt $\beta_1 \geqq 1$, im übrigen ξ_2 wieder eine *normierte* quadratische Irrationalität > 1. Die Fortsetzung dieses Prozesses liefert also eine unbegrenzt fortsetzbare Folge *normierter* quadratischer Irrationalitäten, welche für $\nu \geqq 0$ den Rekursionsformeln genügen:

$$\begin{cases} \xi_\nu = \beta_\nu + \dfrac{1}{\xi_{\nu+1}} > 1 \\ \xi_{\nu+1} = \dfrac{\sqrt{\Delta} + M_{\nu+1}}{N_{\nu+1}}, \quad \text{wo:} \begin{cases} M_{\nu+1} = \beta_\nu N_\nu - M_\nu \\ N_{\nu+1} = \dfrac{\Delta - M_{\nu+1}^2}{N_\nu} \text{ (ganzzahlig)} \end{cases} \end{cases} \tag{31}$$

und auf Grund des Satzes über die Darstellbarkeit jeder Irrationalzahl durch einen unendlichen regelmäßigen Kettenbruch (§ 103, Nr. 4, S. 778) ergibt sich:

$$\xi_0 = \beta_0 + \left[\frac{1}{\xi_\nu}\right]_1^\infty . \text{[1]} \tag{32}$$

---

1) Allgemein hat man offenbar für $\lambda = 0, 1, 2, \cdots\cdots$:

$$\xi_\lambda = \beta_\lambda + \left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_{\lambda+1}^\infty .$$

Um die Periodizität dieses unendlichen Kettenbruches nachzuweisen, gehen wir von der Beziehung aus:

$$(33)\qquad \xi_0 = \beta_0 + \frac{1|}{|\beta_1} + \cdots + \frac{1|}{|\beta_\nu} + \frac{1|}{|\xi_{\nu+1}} = \frac{A_\nu \xi_{\nu+1} + A_{\nu-1}}{B_\nu \xi_{\nu+1} + B_{\nu-1}},$$

wo also wieder mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}(\nu = 0, 1, 2, \cdot \cdots)$ die Näherungsbrüche jenes unendlichen Kettenbruches bezeichnet werden. Löst man Gl. (33) nach $\xi_{\nu+1}$ auf, so ergibt sich:

$$(34)\qquad \xi_{\nu+1} = -\frac{B_{\nu-1}\xi_0 - A_{\nu-1}}{B_\nu \quad \xi_0 - A_\nu} = -\frac{B_{\nu-1}}{B_\nu} \cdot \frac{\xi_0 - K_{\nu-1}}{\xi_0 - K_\nu} \quad \left(\text{wo } K_\nu = \frac{A_\nu}{B_\nu}\right)$$

und, wenn man jetzt die in ξ_0 und $\xi_{\nu+1}$ enthaltene $\sqrt{\Delta}$ durch $-\sqrt{\Delta}$ ersetzt, sodaß also ξ_0, $\xi_{\nu+1}$ in die *konjugierten* Irrationalitäten ξ_0', $\xi_{\nu+1}'$ übergehen:

$$(35)\qquad \xi_{\nu+1}' = -\frac{B_{\nu-1}}{B_\nu} \cdot \frac{\xi_0' - K_{\nu-1}}{\xi_0' - K_\nu}$$

Da (wegen $\lim\limits_{\nu\to\infty} K_{\nu-1} = \lim\limits_{\nu\to\infty} K_\nu = \xi_0$ und $\xi_0' \neq \xi_0$).

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\xi_0' - K_{\nu-1}}{\xi_0' - K_\nu} = 1,$$

also von einem *bestimmten* Index ν ab: $\frac{\xi_0' - K_{\nu-1}}{\xi_0' - K_\nu} > 0$, mithin (wegen $B_\nu > B_{\nu-1} > 0$) $\xi_{\nu+1}' < 0$ ausfällt, so folgt, nachdem bereits feststeht, daß durchweg $\xi_{\nu+1} > 1$, aus dem Hilfssatze der vorigen Nummer, daß dann *alle* $\xi_{\nu+\lambda}$ zum mindesten für $\lambda \geqq 2$ *perfekt* ausfallen. Da es aber nach Nr 3 dieses Paragraphen überhaupt nur eine *begrenzte* Anzahl *verschiedener perfekter* ξ_ν gibt, so muß irgendeins dieser ξ_ν an späterer Stelle wiederkehren. Ist dann etwa ξ_m das *erste* derjenigen ξ_ν, welches später einmal wiederkehrt[1]), und $m + p$ der *erste* Index, für den eine solche Wiederkehr stattfindet, so sind, falls $p > 1$,

$$\xi_{m+1}, \ \xi_{m+2}, \ \cdots \ \xi_{m+p-1} \ ^{2)}$$

sämtlich von ξ_m *verschieden*, dagegen ist.

$$\xi_{m+p} = \xi_m,$$

---

1) Es wird sich später noch zeigen, daß der betreffende Index $\nu = m$ kein anderer ist als derjenige des *ersten* ξ_ν, welches *perfekt* ausfällt, mit anderen Worten, daß die Periode *sofort* beginnt, wenn ξ_ν *perfekt* geworden ist.

2) Im Falle $p = 1$ hat man:

$$\xi_m = \xi_{m+1} = \xi_{m+2} = \cdots\cdots,$$

also schließlich einen Kettenbruch mit der *eingliedrigen* Periode β_m.

also auch:

$$\xi_{m+p+1} = \xi_{m+1}, \cdots \xi_{m+2p-1} = \xi_{m+p-1}, \; \xi_{m+2p} = \xi_{m+p} = \xi_m \text{ usf}$$

und schließlich:

$$\beta_{m+p} = \beta_m, \; \beta_{m+p+1} = \beta_{m+1}, \cdots \beta_{m+2p-1} = \beta_{m+p-1},$$
$$\beta_{m+2p} = \beta_{m+p} = \beta_m \text{ usf},$$

d. h. der betreffende unendliche Kettenbruch besitzt, vom Index $\nu = m$ anfangend, die Periode $\beta_m, \beta_{m+1}, \cdots, \beta_{m+p-1}$, womit der erste Teil des oben ausgesprochenen Satzes bewiesen ist. Der Vollständigkeit halber sei noch bemerkt, daß die p-gliedrige Periode nicht in Teilperioden mit einer kleineren Gliederzahl, etwa $p' < p$ (wo p' ein Teiler von p), zerfallen kann. Denn aus der Annahme:

$$\begin{array}{llll} \beta_m & = \beta_{m+p'} & = \beta_{m+2p'} & = \cdots \\ \beta_{m+1} & = \beta_{m+p'+1} & = \beta_{m+2p'+1} & = \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{m+p'-1} & = \beta_{m+2p'-1} & = \beta_{m+3p'-1} & = \cdot \end{array}$$

würde (vgl. S 787, Fußnote 1) folgen:

$$\xi_m = \xi_{m+p'} \quad (p' < p),$$

was der Voraussetzung widerspricht. Eine analoge Schlußweise zeigt übrigens, daß $\xi_{m+1}, \cdots \xi_{m+p-1}$ nicht nur, wie vorausgesetzt wurde, von ξ_m, sondern auch *untereinander* durchweg *verschieden* sind [1])

Gehen wir nun umgekehrt von der Betrachtung eines als *periodisch*, und zwar zunächst als *rein periodisch* vorausgesetzten Bruches mit der p-gliedrigen Periode $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{p-1}$ aus:

$$(36) \qquad \beta_0 + \left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_1^\infty = \xi_0,$$

so folgt zunächst, daß:

$$(37) \qquad \xi_0 = \beta_0 + \frac{1|}{|\beta_1} + \cdots + \frac{1|}{|\beta_{p-1}} + \frac{1|}{|\xi_0} = \frac{\xi_0 A_{p-1} + A_{p-2}}{\xi_0 B_{p-1} + B_{p-2}}$$

und daher:

$$(38) \qquad B_{p-1}\xi_0^2 - (A_{p-1} - B_{p-2})\,\xi_0 - A_{p-2} = 0,$$

---

1) Da es nach Nr. 3 dieses Paragraphen „erheblich" weniger als $E(E+1)$ (wo $E = [\sqrt{\Delta}]$) *verschiedene* ξ_ν gibt, so gilt das Entsprechende für die *Maximalzahl der Periodenglieder*.

Übrigens läßt sich leicht auch eine obere Schranke für die *Größe* der *periodischen* Teilnenner β_ν angeben. Aus (31) folgt nämlich:

$$N_\nu \beta_\nu = M_\nu + M_{\nu+1},$$

und da für *perfekte* ξ_ν und $\xi_{\nu+1}$:

$$M_\nu \leqq E, \quad M_{\nu+1} \leqq E, \quad N_\nu \geqq 1,$$

so findet man:

$$\beta_\nu \leqq 2E.$$

sodaß also, da ja auf Grund der Kettenbruchdarstellung (36) die *Irrationalität* von ξ_0 bereits feststeht, ξ_0 in der Tat als *quadratische* Irrationalzahl sich ergibt.

Handelt es sich sodann um einen *unrein periodischen* Kettenbruch mit den nicht-periodischen Bestandteilen $\beta_0, \beta_1, \cdots \beta_k$ $(k \geqq 0)$ und der p-gliedrigen Periode $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \cdots \beta_{k+p}$ $(p \geqq 1)$, sodaß also insbesondere:

$$\xi_{k+p+1} = \xi_{k+1} \text{ (wo wiederum: } \beta_\lambda + \left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_{\lambda+1}^{\infty} = \xi_\lambda \text{ für } \lambda = 0, 1, 2, \ldots),$$

so findet man:

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \beta_0 + \frac{1|}{|\beta_1} + \cdots + \frac{1|}{|\beta_k} + \frac{1|}{|\xi_{k+1}}\\ &= \beta_0 + \frac{1|}{|\beta_1} + \cdots + \frac{1|}{|\beta_k} + \frac{1|}{|\beta_{k+1}} + \cdots + \frac{1|}{|\beta_{k+p}} + \frac{1|}{|\xi_{k+1}}\end{aligned}$$

und daher:

$$\xi_0 = \frac{\xi_{k+1}A_k + A_{k-1}}{\xi_{k+1}B_k + B_{k-1}} = \frac{\xi_{k+1}A_{k+p} + A_{k+p-1}}{\xi_{k+1}B_{k+p} + B_{k+p-1}}. \tag{39}$$

Hieraus folgt durch Auflösung dieser Gleichungen nach ξ_{k+1}:

$$\xi_{k+1} = \frac{-B_{k-1}\xi_0 + A_{k-1}}{B_k\xi_0 - A_k} = \frac{-B_{k+p-1}\xi_0 + A_{k+p-1}}{B_{k+p}\xi_0 - A_{k+p}} \tag{40}$$

und somit schließlich:

$$N\xi_0^2 - 2M\xi_0 + \Lambda = 0, \tag{41}$$

wenn gesetzt wird:

$$\begin{cases} N = B_k B_{k+p-1} - B_{k-1} B_{k+p} \\ 2M = A_k B_{k+p-1} - A_{k-1} B_{k+p} - A_{k+p} B_{k-1} + A_{k+p-1} B_k \\ \Lambda = A_k A_{k+p-1} - A_{k-1} A_{k+p}, \end{cases} \tag{42}$$

wobei im Falle $k = 0$:

$$A_{-1} = 1, \quad B_{-1} = 0$$

zu setzen ist.

Es stellt also auch jeder *unrein periodische* regelmäßige Kettenbruch eine *quadratische* Irrationalzahl dar

6. Der zweite Teil des soeben bewiesenen Hauptsatzes enthält keine Aussage darüber, *welche* der beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung (38) bzw. (41) durch den betreffenden periodischen Kettenbruch dargestellt wird. Für den Fall eines *rein periodischen* regelmäßigen Kettenbruches erledigt sich diese Frage unmittelbar durch den Umstand, daß die quadratische Gleichung (38), da der erste und der letzte Koeffizient mit entgegengesetztem Vorzeichen behaftet sind, zwei Wurzeln verschiedenen Vorzeichens besitzt (s. Fußnote 1, S. 781). Und da der Wert ξ_0 des rein periodischen Kettenbruches größer als $\beta_0 \geqq 1$, also

positiv ist, so stellt er die in diesem Falle *einzige positive* Wurzel jener quadratischen Gleichung dar, nämlich:

$$(43)\quad \xi_0 = \frac{1}{2B_{p-1}}\left(A_{p-1} - B_{p-2} + \sqrt{(A_{p-1} - B_{p-2})^2 + 4A_{p-2}B_{p-1}}\right).^{1)}$$

Ist der fragliche Kettenbruch: $\beta_0 + \left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_1^\infty = \xi_0$ *unrein periodisch* mit den nicht-periodischen Bestandteilen β_0, β_1, $\cdots \beta_k$ $(k \geqq 0)$ und der p-gliedrigen Periode β_{k+1}, β_{k+2}, $\cdots$, β_{k+p}, so hat man (s. Gl. (39)):

$$(44)\qquad \xi_0 = \frac{\xi_{k+1}A_k + A_{k-1}}{\xi_{k+1}B_k + B_{k-1}},$$

wo ξ_{k+1} den Wert des *rein periodischen* Kettenbruches: $\beta_{k+1} + \left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_{k+2}^\infty$ bedeutet. Um diesen letzteren zu bestimmen, hat man lediglich in Gl. (43) die A_ν, B_ν (als abgekürzte Bezeichnungen für: $A_{0,\nu}$, $B_{0,\nu}$)[2]) durch $A_{k+1,\nu}$, $B_{k+1,\nu}$ zu ersetzen, und man findet somit:

$$(45)\quad \xi_{k+1} = \frac{1}{2B_{k+1,k+p}}\Big(A_{k+1,k+p} - B_{k+1,k+p-1} + \sqrt{(A_{k+1,k+p} - B_{k+1,k+p-1})^2 + 4A_{k+1,k+p-1}B_{k+1,k+p}}\Big),$$

sodaß schließlich ξ_0 durch die Beziehungen (44), (45) völlig eindeutig bestimmt ist.

Wir knüpfen hieran noch die für das Folgende wichtige Bemerkung, daß die quadratische Gleichung (41), welche den Wert eines *unrein periodischen* regelmäßigen Kettenbruches bestimmt, im Falle $k \geq 1$, $\beta_0 > 0$, d. h. wenn der Kettenbruch mindestens *zwei* nicht-periodische Glieder enthält, deren *erstes* (wie *eo ipso* alle übrigen) wesentlich *positiv* ist, stets zwei Wurzeln *gleichen Vorzeichens* besitzt, mit anderen Worten, daß ein solcher Kettenbruch eine quadratische Irrationalzahl darstellt, die mit ihrer *Konjugierten gleich bezeichnet* ist.

Sei zunächst $k = 1$, also nach (42):

$$\begin{aligned} \Lambda &= A_1A_p - A_0A_{p+1} \\ &= (\beta_0\beta_1 + 1)A_p - \beta_0(\beta_{p+1}A_p + A_{p-1}) \\ &= \beta_0A_p\left\{(\beta_1 - \beta_{p+1}) + \frac{1}{\beta_0} - \frac{A_{p-1}}{A_p}\right\} \quad (\text{wo: } \beta_1 \neq \beta_{p+1}), \end{aligned}$$

so erkennt man, wegen: $\beta_0A_\nu > 0$, $0 < \frac{1}{\beta_0} \leqq 1$, $0 < \frac{A_{p-1}}{A_p} < 1$, daß Λ das Vorzeichen der *ganzen Zahl* $\beta_1 - \beta_{p+1}$ hat.

---

1) Die Quadratwurzel (wie bisher durchweg) in *positivem* Sinne zu verstehen

2) Vgl. § 91, Nr. 1, hinter Gl. (2), S. 691.

Andererseits ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathsf{N} &= \mathsf{B}_1 \mathsf{B}_p - \mathsf{B}_0 \mathsf{B}_{p+1} \\ &= \beta_1 \mathsf{B}_p - (\beta_{p+1} \mathsf{B}_p + \mathsf{B}_{p-1}) \\ &= \mathsf{B}_p \left\{ (\beta_1 - \beta_{p+1}) - \frac{\mathsf{B}_{p-1}}{\mathsf{B}_p} \right\}, \end{aligned}$$

sodaß also, wegen: $\mathsf{B}_p > 0$, $0 < \frac{\mathsf{B}_{p-1}}{\mathsf{B}_p} < 1$, auch N das Vorzeichen von $\beta_1 - \beta_{p+1}$ hat, mithin $\frac{\Lambda}{\mathsf{N}} > 0$ ist und die quadratische Gleichung (41) zwei Wurzeln *gleichen Vorzeichens* besitzt.

Ist $k \geqq 2$, so folgt aus (42), wenn man in dem Ausdrucke Λ für A_k und A_{k+p} die üblichen Rekursionsformeln einführt:

$$\begin{aligned} \Lambda &= (\beta_k \mathsf{A}_{k-1} + \mathsf{A}_{k-2}) \mathsf{A}_{k+p-1} - \mathsf{A}_{k-1} (\beta_{k+p} \mathsf{A}_{k+p-1} + \mathsf{A}_{k+p-2}) \\ &= (\beta_k - \beta_{k+p}) \mathsf{A}_{k-1} \mathsf{A}_{k+p-1} + \mathsf{A}_{k-2} \mathsf{A}_{k+p-1} - \mathsf{A}_{k-1} \mathsf{A}_{k+p-2} \\ &= \mathsf{A}_{k-1} \mathsf{A}_{k+p-1} \left\{ (\beta_k - \beta_{k+p}) + \frac{\mathsf{A}_{k-2}}{\mathsf{A}_{k-1}} - \frac{\mathsf{A}_{k+p-2}}{\mathsf{A}_{k+p-1}} \right\} \end{aligned}$$

und analog

$$\mathsf{N} = \mathsf{B}_{k-1} \mathsf{B}_{k+p-1} \left\{ (\beta_k - \beta_{k+p}) + \frac{\mathsf{B}_{k-2}}{\mathsf{B}_{k-1}} - \frac{\mathsf{B}_{k+p-2}}{\mathsf{B}_{k+p-1}} \right\}.$$

Da die A_ν, B_ν durchweg positiv sind und gleichzeitig mit ν zunehmen, so ergibt sich wiederum, daß Λ und N beide das Vorzeichen von $\beta_k - \beta_{k+p}$ haben, also $\frac{\Lambda}{\mathsf{N}} > 0$ ist und die Wurzeln der quadratischen Gleichung (41) *gleich bezeichnet* sind.[1])

7. Mit Benützung der letzten Bemerkung beweisen wir den folgenden, eine wichtige Ergänzung zu dem Hauptsatze von Nr. 5 liefernden Satz.

Eine perfekte quadratische Irrationalität liefert stets einen rein periodischen regelmäßigen Kettenbruch und umgekehrt stellt ein rein periodischer regelmäßiger Kettenbruch stets den Wert einer perfekten quadratischen Irrationalität dar.

Beweis Bedeutet ξ_0 eine *perfekte* quadratische Irrationalität und setzt man:

$$\xi_0 = \beta_0 + \left[\frac{1}{\beta_\nu} \right]_1^\infty \quad (\text{wo: } \beta_0 \geqq 1 \text{ wegen: } \xi_0 > 1),$$

1) Diese Schlußweise gilt für $k \geqq 2$ auch noch dann, wenn $\beta_0 \leqq 0$, mit Ausnahme des einen Falles: $k = 2$, $\beta_0 = -1$, $\beta_1 = 1$, in welchem $\mathsf{A}_{k-1} \equiv \mathsf{A}_1 = 0$ wird. Dagegen versagt sie, falls $k = 1$; übrigens auch, falls $k = 0$ — im letzteren Falle sogar für $0 \leqq \beta_0 \leqq \beta_n$ (wegen: $\Lambda = \beta_0 \mathsf{A}_{n-1} - \mathsf{A}_n = (\beta_0 - \beta_n) \mathsf{A}_{n-1} - \mathsf{A}_{n-2}$, $\mathsf{N} = \mathsf{B}_{n-1}$).

so könnte dieser Kettenbruch auf Grund des Schlußergebnisses der vorigen Nummer höchstens *ein* nicht-periodisches Glied β_0 enthalten, da ja die *Konjugierte* von ξ_0 *negativ* ist. Es beginnt also die Periode mindestens mit β_1 und man hat daher, wenn dieselbe p-gliedrig ist:

$$\beta_{\nu+p} = \beta_\nu, \text{ also auch: } \xi_{\nu+p} = \xi_\nu \text{ für } \nu \geqq 1, \tag{46}$$

auch ist *jedes* ξ_ν nach dem Hilfssatz von Nr. 4 *perfekt*.

Um nachzuweisen, daß die Periode schon mit β_0 beginnt, daß also $\beta_p = \beta_0$, bemerke man, daß aus:

$$\xi_0 = \beta_0 + \frac{1}{\xi_1}, \quad \text{wo: } \beta_0 = [\xi_0] \geqq 1,$$

durch Vertauschung der in ξ_0 und ξ_1 enthaltenen $\sqrt{\Delta}$ mit $-\sqrt{\Delta}$ resultiert:

$$\xi_0' = \beta_0 + \frac{1}{\xi_1'}, \tag{47}$$

wo wiederum unter ξ_0', ξ_1' die zu ξ_0, ξ_1 konjugierten Irrationalitäten zu verstehen sind. Analog findet man:

$$\xi_p' = \beta_p + \frac{1}{\xi_{p+1}'}. \tag{48}$$

Da aber nach Gl. (46): $\xi_{p+1} = \xi_1$ und daher auch: $\xi_{p+1}' = \xi_1'$, so folgt aus Gl. (47), (48):

$$\beta_p - \beta_0 = \xi_p' - \xi_0',$$

und da ξ_0 und ξ_p *perfekt*, also ξ_0' und ξ_p' *beide negativ* und numerisch *kleiner als* 1 sind, so folgt schließlich:

$$\beta_p = \beta_0, \tag{49}$$

d. h. der fragliche Kettenbruch ist in der Tat *rein* periodisch.

Geht man umgekehrt von dem p-gliedrigen *rein* periodischen Kettenbruche $\beta_0 + \left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ aus und bezeichnet seinen Wert mit ξ_0, so hat man für $\mu = 1, 2, 3, \cdots$:

$$\xi_0 = \xi_{\mu p}. \tag{50}$$

Da aber andererseits die Entwicklung von ξ_0 in einen regelmäßigen Kettenbruch nur auf eine einzige Weise möglich ist, so zeigt der Beweis des Hauptsatzes von Nr. 5, daß $\xi_{\mu p}$ für hinlänglich große μ *perfekt* ausfallen muß. Mithin ist auch ξ_0 der Wert einer *perfekten* Irrationalität.

8. Zwischen den Perioden der regelmäßigen Kettenbrüche für eine *perfekte* quadratische Irrationalität ξ_0 und ihrer negativ und reziprok genommenen *Konjugierten* $-\frac{1}{\xi_0'}$ (welche ja gleichfalls *perfekt* ist[1])) findet

---

1) S. Fußnote 1, S. 584.

eine merkwürdige Beziehung statt, welche den Inhalt des folgenden („**Galoisschen**") Satzes bildet:

Die regelmäßigen Kettenbrüche für die beiden perfekten quadratischen Irrationalitäten ξ_0 *und* $-\frac{1}{\xi'_0}$ *(deren jede die negativ und reziprok genommene Konjugierte der anderen ist) besitzen* ***inverse*** *Perioden, d. h. hat man:*

$$\xi_0 = \left[\overline{\beta_0, \frac{1}{\beta_1}, \ldots, \frac{1}{\beta_{p-1}}}\right], \tag{51a}$$

so ist:

$$-\frac{1}{\xi'_0} = \left[\overline{\beta_{p-1}, \frac{1}{\beta_{p-2}}, \ldots, \frac{1}{\beta_0}}\right]. \tag{51b}$$

Umgekehrt stellen zwei rein periodische Kettenbrüche mit inverser Periode zwei perfekte quadratische Irrationalitäten dar, deren jede die negativ und reziprok genommene Konjugierte der anderen ist.[1])

Beweis. Da nach Gl. (51a) die Periode des Kettenbruches für ξ als p-gliedrig angenommen wurde, so hat man:

$$\beta_0 = \beta_p$$

und daher mit Beibehaltung der bisher benützten Bezeichnungen:

$$\xi_0 = \beta_0 + \frac{1}{\xi_1}, \quad \xi_1 = \beta_1 + \frac{1}{\xi_2}, \quad \ldots, \quad \xi_{p-2} = \beta_{p-2} + \frac{1}{\xi_{p-1}}, \tag{52}$$

$$\xi_{p-1} = \beta_{p-1} + \frac{1}{\xi_0},$$

also in etwas abgeänderter Form und umgekehrter Reihenfolge:

$$-\frac{1}{\xi_0} = \beta_{p-1} - \xi_{p-1}, \quad -\xi_{p-1} = \frac{1}{\beta_{p-2} - \xi_{p-2}}, \quad \ldots, \tag{53}$$

$$-\xi_2 = \frac{1}{\beta_1 - \xi_1}, \qquad -\xi_1 = \frac{1}{\beta_0 - \xi_0}$$

und durch Übergang zu den konjugierten Werten:

$$-\frac{1}{\xi'_0} = \beta_{p-1} - \xi'_{p-1}, \quad -\xi'_{p-1} = \frac{1}{\beta_{p-2} - \xi'_{p-2}}, \quad \ldots, \tag{54}$$

$$-\xi'_2 = \frac{1}{\beta_1 - \xi'_1}, \qquad -\xi'_1 = \frac{1}{\beta_0 - \xi'_0}.$$

---

1) Der Satz läßt sich auch auf *nicht-perfekte konjugierte* Irrationalitäten bzw. *unrein periodische* Kettenbrüche übertragen, was jedoch als minder wichtig erscheinend hier nicht durchgeführt werden soll. (Der Beweis beruht auf der in § 103, Nr. 1, Fußnote 1, S. 774, angeführten Verallgemeinerung des Identitätssatzes für regelmäßige Kettenbrüche.)

Durch sukzessives Einsetzen folgt hieraus:

$$-\frac{1}{\xi_0'} = \beta_{p-1} + \frac{1}{\beta_{p-2} - \xi_{p-2}'} = \beta_{p-1} + \frac{1\,|}{|\,\beta_{p-2}} + \frac{1\,|}{|\,\beta_{p-3} - \xi_{p-3}'} = \cdots$$

$$(55) \qquad = \beta_{p-1} + \frac{1\,|}{|\,\beta_{p-2}} + \cdots + \frac{1\,|}{|\,\beta_1} + \frac{1\,|}{|\,\beta_0 - \xi_0'}$$

und da:

$$\beta_0 - \xi_0' = \beta_0 + \frac{1}{\left(-\frac{1}{\xi_0'}\right)},$$

so ergibt sich, wie behauptet:

$$-\frac{1}{\xi_0'} = \left[\overline{\beta_{p-1}, \frac{1}{\beta_{p-2}}, \ldots, \frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_0}}\right].$$

Daß umgekehrt zwei Kettenbrüche von der Form (51a), (51b) überhaupt die Werte zweier *perfekter* quadratischer Irrationalitäten ξ_0, η_0 darstellen, folgt ja nach dem Satze von Nr. 7 aus ihrer *reinen* Periodizität, und daß diese letzteren dann in der Beziehung $\eta_0 = -\frac{1}{\xi_0'}$ (oder auch in der damit gleichzeitig bestehenden, nämlich durch Übergang zu den konjugierten Werten daraus hervorgehenden: $\xi_0 = -\frac{1}{\eta_0'}$) stehen müssen, ergibt sich als unmittelbare Folge des soeben gewonnenen Resultats

Zusatz. Bei einem Kettenbruche mit *ein*gliedriger oder mit *symmetrischer* Periode: $(\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_1, \beta_0)$[1]) fällt offenbar die *inverse* Periode mit der *ursprünglichen* zusammen. Er stellt daher, wenn er zugleich *rein* periodisch ist, nach dem eben bewiesenen Satze gleichzeitig den Wert einer gewissen perfekten quadratischen Irrationalität ξ_0 und den negativen reziproken Wert ihrer Konjugierten, also $-\frac{1}{\xi_0'}$ dar, und es besteht somit in diesem Falle die Beziehung:

$$(56) \qquad \xi_0 = -\frac{1}{\xi_0'}, \text{ anders geschrieben: } -\xi_0\xi_0' = 1$$

Im Falle der *ein*gliedrigen Periode β hat man insbesondere:

$$\xi_0 = \beta + \frac{1}{\xi_0},$$

d. h.:

$$\xi_0^2 - \beta\xi_0 - 1 = 0,$$

---

1) Dabei lauten die mittelsten Glieder:

$$\beta_m, \beta_m$$

oder aber:

$$\beta_m, \beta_{m+1}, \beta_m,$$

je nachdem die Anzahl der Periodenglieder *gerade* $(= 2m)$ oder *ungerade* $(= 2m + 1)$ ist.

und da ξ_0 die (einzige) *positive* Wurzel dieser Gleichung sein muß, so ergibt sich:

$$\xi_0 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\beta^2+4}+\beta\right), \tag{57}$$

also:

$$-\xi_0' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\beta^2+4}-\beta\right) \text{ und: } -\xi_0\xi_0' = 1.$$

Der für $\beta = 1$ resultierende *einfachste* aller periodischen Kettenbrüche: $1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \cdots\cdots$ hat also den Wert: $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$.

9. Die Ergebnisse der beiden letzten Nummern ermöglichen es, genauere Aussagen über das Bildungsgesetz desjenigen regelmäßigen Kettenbruches zu machen, welcher die Quadratwurzel aus einer nicht quadratischen rationalen Zahl $\varrho > 1$ darstellt. Bedeutet β_0 die größte in $\sqrt{\varrho}$ enthaltene ganze Zahl, so ist offenbar $\sqrt{\varrho} + \beta_0$ eine *perfekte* quadratische Irrationalität, wenn ϱ eine *ganze* Zahl.[1]) Aber auch, wenn ϱ *gebrochen*, etwa $\varrho = \frac{\alpha}{\gamma}$, besitzt $\sqrt{\varrho} + \beta_0$ denselben Wert wie eine bestimmte *perfekte* Irrationalität, nämlich: $\frac{\sqrt{\alpha\gamma}+\beta_0\gamma}{\gamma}$. Infolgedessen ist also $\sqrt{\varrho} + \beta_0$ durch einen *rein* periodischen Kettenbruch darstellbar, und zwar einen solchen mit dem Anfangsgliede $2\beta_0$ (da ja $2\beta_0$ die größte in $\sqrt{\varrho} + \beta_0$ enthaltene ganze Zahl), etwa:

$$\sqrt{\varrho} + \beta_0 = \left[\overline{2\beta_0, \frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}, \ldots, \frac{1}{\beta_{p-1}}}\right] \quad (p \geqq 1).^{2)} \tag{58}$$

Für die negativ und reziprok gewonnene Konjugierte von $\sqrt{\varrho} + \beta_0$, also für $\frac{1}{\sqrt{\varrho}-\beta_0}$ ergibt sich alsdann nach dem Satze der vorigen Nummer die Kettenbruchdarstellung:

$$\frac{1}{\sqrt{\varrho}-\beta_0} = \left[\overline{\beta_{p-1}, \frac{1}{\beta_{p-2}}, \ldots, \frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{2\beta_0}}\right]$$

und hieraus durch Übergang zum reziproken Werte:

$$\sqrt{\varrho} - \beta_0 = \left[0, \overline{\frac{1}{\beta_{p-1}}, \frac{1}{\beta_{p-2}}, \ldots, \frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{2\beta_0}}\right]. \tag{59}$$

Die Gleichungen (58) und (59) liefern also für $\sqrt{\varrho}$ zunächst die folgenden *zwei* Kettenbrüche:

---

1) Vgl. den Schluß der Fußnote 1, S. 785.

2) Im Falle $p = 2$ reduziert sich also die Periode auf die beiden Glieder $2\beta_0$, β_1; im Falle $p = 1$ auf das *eine* Glied $2\beta_0$.

$$\sqrt{\varrho} = \begin{cases} \left[\beta_0, \overline{\frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}, \ldots, \frac{1}{\beta_{p-1}}, \frac{1}{2\beta_0}}\right] \\ \left[\beta_0, \overline{\frac{1}{\beta_{p-1}}, \frac{1}{\beta_{p-2}}, \ldots, \frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{2\beta_0}}\right]. \end{cases}$$

Da aber diese beiden Kettenbrüche *identisch* sein müssen, so folgt, daß:

$$\beta_{p-1} = \beta_1, \quad \beta_{p-2} = \beta_2, \quad \cdot \cdot [1]),$$

sodaß sich für $\sqrt{\varrho}$ schließlich der folgende Kettenbruch ergibt:

$$\sqrt{\varrho} = \left[\beta_0, \overline{\frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}, \ldots, \frac{1}{\beta_2}, \frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{2\beta_0}}\right]. \tag{60}$$

Die (unmittelbar hinter dem Anfangsgliede beginnende) Periode besteht also aus einem *symmetrischen* Teil (welcher eventuell sich auf ein einzelnes Glied reduzieren oder auch ganz fehlen kann[2])) und dem Teilnenner $2\beta_0$.

Umgekehrt stellt ein Kettenbruch von der Form (60) stets die Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl größer als 1 dar. Denn, bezeichnet man seinen Wert mit ξ, so folgt zunächst durch Subtraktion von β_0:

$$\xi - \beta_0 = \left[0, \overline{\frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}, \ldots, \frac{1}{\beta_2}, \frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{2\beta_0}}\right]$$

und durch Übergang zum reziproken Werte:

$$\frac{1}{\xi - \beta_0} = \left[\overline{\beta_1, \frac{1}{\beta_2}, \ldots, \frac{1}{\beta_2}, \frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{2\beta_0}}\right]. \tag{61}$$

Bezeichnet man wieder mit ξ' die Konjugierte von ξ, so ist $\frac{1}{\xi' - \beta_0}$ die Konjugierte von $\frac{1}{\xi - \beta_0}$, also $\beta_0 - \xi'$ deren negativer reziproker Wert, und für diesen ergibt sich nach dem Satze der vorigen Nummer der aus dem Kettenbruche (61) durch Inversion der Periode hervorgehende, also:

$$\beta_0 - \xi' = \left[\overline{2\beta_0, \frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}, \ldots, \frac{1}{\beta_2}, \frac{1}{\beta_1}}\right],$$

---

1) Ist p *ungerade*, so schließt diese Folge mit der Beziehung:

$$\beta_{\frac{p+1}{2}} = \beta_{\frac{p-1}{2}},$$

während im Falle eines *geraden* p die letzte der betreffenden Gleichungen lautet

$$\beta_{\frac{p}{2}-1} = \beta_{\frac{p}{2}+1}$$

und sodann noch $\beta_{\frac{p}{2}}$ als vereinzeltes Mittelglied des symmetrischen Teils der Periode auftritt.

2) Vgl. die Fußnote 2 auf der vorigen Seite.

und wenn man jetzt noch β_0 auf beiden Seiten subtrahiert und beachtet, daß alsdann der Kettenbruch unrein periodisch wird und infolgedessen das frühere Anfangsglied $2\beta_0$ der *zweiten* Periode nunmehr als Schlußglied der *ersten* Periode erscheint, so folgt:

$$-\xi' = \left[\beta_0, \overline{\frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}, \ldots, \frac{1}{\beta_2}, \frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{2\beta_0}}\right]. \tag{62}$$

Dieser Kettenbruch ist aber genau derselbe wie derjenige auf der rechten Seite von Gl. (60), dessen Wert mit ξ bezeichnet wurde, und man findet somit:

$$\xi = -\xi', \quad \text{also: } \xi + \xi' = 0,$$

was nur möglich ist, wenn die beiden konjugierten quadratischen Irrationalitäten ξ und ξ' *keinen rationalen* Bestandteil besitzen, also von der Form sind[1]): $\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{N} \equiv \pm\sqrt{\frac{\Delta}{N^2}}$. Da hierbei insbesondere $\xi > 1$ war, so hat man also schließlich: $\xi = \sqrt{\varrho}$, wo ϱ eine rationale nicht-quadratische Zahl größer als 1 bedeutet.

Somit ergibt sich der folgende Satz:

Der regelmäßige Kettenbruch für die Quadratwurzel aus einer nicht-quadratischen rationalen Zahl, die größer als 1, hat die Form.

$$\left[\beta_0, \overline{\frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}, \ldots, \frac{1}{\beta_2}, \frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{2\beta_0}}\right]$$

(wobei der symmetrische Teil der Periode sich eventuell auf ein einziges Glied reduzieren oder auch ganz fehlen kann). Umgekehrt ist der Wert eines solchen Kettenbruches stets gleich der Quadratwurzel aus einer oberhalb 1 *gelegenen, nicht-quadratischen rationalen Zahl*

Wenn der symmetrische Teil des fraglichen Kettenbruches gänzlich fehlt, wenn also:

$$\xi = \beta_0 + \frac{1|}{|2\beta_0} + \frac{1|}{|2\beta_0} + \cdots,$$

so hat man:

$$\xi + \beta_0 = 2\beta_0 + \frac{1|}{|2\beta_0} + \frac{1|}{|2\beta_0} + \cdots,$$

und daher:

$$\xi = \beta_0 + \frac{1}{\xi + \beta_0},$$

d. h.:

$$\xi = \sqrt{\beta_0^2 + 1} = \left[\beta_0, \overline{\frac{1}{2\beta_0}}\right], \tag{63}$$

z. B.:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2} + \cdots, \quad \sqrt{5} = 2 + \frac{1|}{|4} + \frac{1|}{|4} + \cdots.$$

1) Vgl. Nr. 1 dieses Paragraphen, Gl. (3), S 781.

Wir wollen auch noch den Fall näher betrachten, daß jener symmetrische Teil der Periode sich auf ein einzelnes Glied reduziert, daß also:

$$\xi = \left[\beta_0, \overline{\frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{2\beta_0}}\right].$$

Wegen: $\overline{\xi + \beta_0} = \left[\overline{2\beta_0, \frac{1}{\beta_1}}\right]$ hat man alsdann:

$$\xi = \beta_0 + \frac{1|}{|\beta_1} + \frac{1|}{|\xi + \beta_0} = \frac{(\beta_0\beta_1 + 1)\xi + \beta_0^2\beta_1 + 2\beta_0}{\beta_1\xi + \beta_0\beta_1 + 1}$$

und daher:

$$\xi = \sqrt{\beta_0^2 + \frac{2\beta_0}{\beta_1}} = \left[\beta_0, \overline{\frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{2\beta_0}}\right]. \tag{64}$$

Der Radikand wird dann und nur dann eine *ganze* Zahl, wenn β_1 ein Teiler von $2\beta_0$. Insbesondere findet man für $\beta_1 = \beta_0$ und $\beta_1 = 1$:

$$\sqrt{\beta_0^2 + 2} = \left[\beta_0, \overline{\frac{1}{\beta_0}, \frac{1}{2\beta_0}}\right], \quad \sqrt{\beta_0^2 + 2\beta_0} = \left[\beta_0, \overline{\frac{1}{1}, \frac{1}{2\beta_0}}\right].$$

§ 105. Eine notwendige Bedingung für den algebraischen Charakter einer Irrationalzahl. — Herstellung von regelmäßigen Kettenbrüchen und von Systembrüchen, welche transzendente Zahlen darstellen.

1. Bezeichnet man mit ξ eine beliebige positive Irrationalzahl, mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdot \cdots)$ die Näherungsbrüche des gleichwertigen regelmäßigen Kettenbruches, so besteht für jedes ν die Ungleichung (s. § 103 Nr. 1, Ungl. (4), S. 775):

$$\left|\xi - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| < \frac{1}{B_\nu B_{\nu+1}} < \frac{1}{B_\nu^2}. \tag{1}$$

Diese Formel gibt für die (absolut gemessene) *Abweichung gewisser* rationaler Brüche von der Irrationalzahl ξ eine nur vom Nenner des betreffenden Bruches abhängige *obere* Schranke, sie fixiert also ein gewisses *Mindestmaß der Annäherung*, welches durch jene Brüche noch überschritten wird. Während dieser Tatbestand sich auf *alle möglichen Irrationalzahlen* erstreckt, so existiert bei den *algebraischen Irrationalzahlen* auch eine ähnliche *untere* Schranke für die *Abweichung jedes beliebigen* rationalen Bruches, mit anderen Worten ein gewisses *Höchstmaß der Annaherung*, welches von *keinem* einzigen rationalen Bruche erreicht wird. Es gilt nämlich der folgende („Liouvillesche") Satz:

Ist ξ eine positive algebraische Irrationalzahl n^{ter} Ordnung, so läßt sich eine Zahl $\gamma > 1$ angeben dergestalt, daß stets:

$$\left|\xi - \frac{\alpha}{\beta}\right| > \frac{1}{\gamma\beta^n}, \tag{2}$$

wenn α, β ganz beliebige natürliche Zahlen bedeuten.

Beweis. Es mögen zunächst α, β natürliche Zahlen von der Beschaffenheit bedeuten, daß:

$$\left|\xi - \frac{\alpha}{\beta}\right| < 1, \tag{3}$$

also:

$$-1 < \frac{\alpha}{\beta} - \xi < 1 \text{ und somit: } \frac{\alpha}{\beta} < \xi + 1. \tag{4}$$

Auf Grund der in § 25, Nr. 5, S. 156, gegebenen Definition ist ξ Wurzel einer Gleichung n^{ten} Grades (wo $n \geqq 2$, da ξ irrational) mit ganzzahligen Koeffizienten, etwa:

$$g(x) = \lambda_n x^n + \lambda_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \lambda_1 x + \lambda_0 = 0, \tag{5}$$

aber keiner Gleichung niedrigeren Grades dieser Gattung. Aus dem letzteren Umstande folgt, daß diese Gleichung keine einzige *rationale* Lösung ϱ haben kann. Denn wäre $g(\varrho) \equiv 0$, so müßte ξ der Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades genügen:

$$\frac{g(x)}{x-\varrho} \equiv \frac{g(x) - g(\varrho)}{x-\varrho} = 0,$$

welche, wie die Ausführung der angedeuteten Division zeigt (vgl. § 25, Nr 4, S. 154), durchweg *rationale* Zahlen zu Koeffizienten hat und durch Fortschaffung der Nenner ohne weiteres auch in eine solche mit *ganzzahligen* Koeffizienten umgewandelt werden kann

Daraus folgt insbesondere, daß $g\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ *von Null verschieden* sein muß Da nun:

$$g\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta^n}\left(\lambda_n \alpha^n + \lambda_{n-1} \alpha^{n-1} \beta + \cdots + \lambda_1 \alpha \beta^{n-1} + \lambda \beta^n\right)$$

und der Klammerausdruck als von Null verschiedene *ganze* Zahl mindestens den absoluten Betrag 1 besitzen muß, so ergibt sich, daß:

$$\left|g\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right| \geqq \frac{1}{\beta^n}. \tag{6}$$

Andererseits hat man wegen $g(\xi) = 0$:

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) &= -\left(g(\xi) - g\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right) \\ &= -\left(\xi - \frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot \sum_1^n {}^{\nu} \lambda_\nu \cdot \frac{\xi^\nu - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu}{\xi - \frac{\alpha}{\beta}} \\ &= -\left(\xi - \frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot \sum_1^n {}^{\nu} \lambda_\nu \left(\xi^{\nu-1} + \xi^{\nu-2} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \cdots + \xi \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu-2} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu-1}\right), \end{aligned}$$

also mit Berücksichtigung von (4):

$$\left|g\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right| < \left|\xi - \frac{\alpha}{\beta}\right| \cdot \sum_1^n {}^{\nu} \nu \left|\lambda_\nu\right| \cdot (\xi + 1)^{\nu-1} \tag{7}$$

Setzt man sodann:

(8) $$\sum_1^n \nu\,|\lambda_\nu|\cdot(\xi+1)^{\nu-1}=\gamma \quad (\text{wo } \gamma>1 \text{ wegen } |\lambda_1|\geqq 1),$$

so folgt aus (7), daß:

(9) $$\left|\xi-\frac{\alpha}{\beta}\right| > \frac{1}{\gamma}\cdot\left|g\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right|,$$

sodaß sich schließlich mit Benützung von Ungl. (6), wie behauptet, ergibt:

(2) $$\left|\xi-\frac{\alpha}{\beta}\right| > \frac{1}{\gamma\,\beta^n}.$$

Hierbei war freilich zunächst vorausgesetzt, daß $\left|\xi-\frac{\alpha}{\beta}\right|<1$ (s. Ungl. (3)). Sind nun aber α und β so beschaffen, daß $\left|\xi-\frac{\alpha}{\beta}\right|\geqq 1$, so ist ja wegen: $\gamma>1$ und $\beta\geqq 1$ die Ungleichung (2) schon ohne weiteres erfüllt[1])

2. Die Ungleichung (2) liefert, wie ihre Herleitung zeigt, lediglich eine *notwendige* Bedingung für den *algebraischen* Charakter der mit ξ bezeichneten Irrationalzahl. Ihre wesentliche Bedeutung tritt schärfer hervor, wenn man sie zu einer *hinreichenden* Bedingung für den *transzendenten*[2]) Charakter der Zahl ξ umgestaltet, nämlich:

Ist die positive Zahl ξ so beschaffen, daß, wie groß auch eine natürliche Zahl n und eine positive Zahl Γ angenommen werden möge, stets natürliche Zahlen α, β vorhanden sind derart, daß:

(10) $$\left|\xi-\frac{\alpha}{\beta}\right| < \frac{1}{\Gamma\,\beta^n},$$

so kann ξ keine algebraische Zahl noch so hoher Ordnung sein, ist also eine transzendente Zahl

3. Das vorstehende Ergebnis kann dazu dienen, um Beispiele für *transzendente* Zahlen in Form regelmäßiger Kettenbrüche zu gewinnen. Versteht man unter β_ν $(\nu=1,2,3,\cdots)$ eine unbegrenzte Folge noch näher zu bestimmender natürlicher Zahlen, unter β_0 gleichfalls eine natürliche Zahl oder auch die Null und setzt:

(11) $$\xi=\beta_0+\left[\frac{1}{\beta_\nu}\right]_1^\infty,$$

1) Die Annahme: $\left|\xi-\frac{\alpha}{\beta}\right|=1$ würde ja ohne weiteres die gleiche Schlußfolgerung gestatten. Sie kommt aber überhaupt nicht in Betracht, da ja ξ *irrational* sein sollte.

2) S § 25, Nr. 3, S 160

so folgt aus dem ersten Teile von Ungl. (1), wenn wieder die Näherungsbrüche des obigen Kettenbruches mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ bezeichnet werden, für jedes ν:

$$(12) \qquad \left|\xi - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| < \frac{1}{\beta_{\nu+1} B_\nu^2} \quad (\text{wegen: } B_{\nu+1} = \beta_{\nu+1} B_\nu + B_{\nu-1} > \beta_{\nu+1} B_\nu).$$

Es bedeute ferner p_ν $(\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ eine unbegrenzte Folge *niemals abnehmender* natürlicher Zahlen mit dem Grenzwerte ∞, also:

$$(13) \qquad p_1 \leqq p_2 \leqq \cdots \leqq p_\nu \leqq \cdots\cdot, \quad \lim_{\nu \to \infty} p_\nu = +\infty$$

(z. B. $p_\nu = \nu$; $p_\nu = [\sqrt{\nu}]$; $p_\nu = [lg\,\nu]$) und es mögen zunächst β_0, β_1 willkürlich angenommen, dagegen die β_ν für $\nu \geqq 2$ in folgender Weise bestimmt werden. Man setze:

$$(14) \qquad \begin{cases} \beta_2 \geqq B_1^{p_1}, \text{ wo: } B_1 = \beta_1 \\ \beta_3 \geqq B_2^{p_2}, \text{ wo: } B_2 = \beta_2 B_1 + B_0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_{\nu+1} \geqq B_\nu^{p_\nu}, \text{ wo: } B_\nu = \beta_\nu B_{\nu-1} + B_{\nu-2} \text{ usf.} \end{cases}$$

Aus der Ungleichung (12) folgt alsdann:

$$(15) \qquad \left|\xi - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| < \frac{1}{B_\nu^{p_\nu+2}} = \frac{1}{B_\nu^{p_\nu+2-n} B_\nu^n},$$

wo n eine beliebige natürliche Zahl bedeutet. Wird dieses n *noch so groß* vorgeschrieben, so wird, wegen: $\lim_{\nu \to \infty} p_\nu = +\infty$, für ein bestimmtes ν und erst recht für jedes größere ν der Exponent $p_\nu + 2 - n \geqq 1$ ausfallen, und da andererseits auch $\lim_{\nu \to \infty} B_\nu = +\infty$, so folgt, daß $B_\nu^{p_\nu+2-n}$ für hinlänglich große ν jede noch so große positive Zahl Γ übersteigt. Der unendliche regelmäßige Kettenbruch, dessen Teilnenner den Beziehungen (14) genügen, hat also die Eigenschaft, daß bei *beliebig großem* n und Γ für hinlänglich große ν stets

$$\left|\xi - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| < \frac{1}{\Gamma B_\nu^n}$$

ausfällt, und sein Wert ξ ist somit eine *transzendente* Zahl.

4. Man erkennt leicht, daß man bezüglich der Verwertung der Bedingung (10) zur Herstellung transzendenter Zahlen keineswegs ausschließlich auf die Benützung unendlicher *Kettenbrüche* angewiesen ist. Man kann das gleiche Ziel z. B. auch mit Hilfe von unendlichen

Systembrüchen erreichen, und zwar in folgender Weise. Es sei (m_ν) eine unbegrenzte Folge natürlicher Zahlen von der Beschaffenheit, daß:

$$(16)\quad m_1 < m_2 < \cdot\cdot < m_\nu < \cdots, \quad \lim_{\nu\to\infty} \frac{m_\nu}{m_{\nu+1}} = 0 \text{ (also: } \lim_{\nu\to\infty} m_\nu = \infty)$$

(z. B. $m_\nu = \nu!$; $m_\nu = \nu^\nu$; $m_\nu = [lg\, \nu]^\nu + 1$), β eine natürliche Zahl größer als 1 und $\left(\alpha_{m_\nu}\right)$ eine unbegrenzte Folge natürlicher Zahlen kleiner als β. Dann läßt sich zeigen, daß der unendliche Systembruch:

$$(17)\qquad \xi = \frac{\alpha_{m_1}}{\beta^{m_1}} + \frac{\alpha_{m_2}}{\beta^{m_2}} + \cdots + \frac{\alpha_{m_\nu}}{\beta^{m_\nu}} + \cdots\cdots$$ [1]

eine *transzendente* Zahl darstellt. Setzt man:

$$(18)\qquad \frac{\alpha_{m_1}}{\beta^{m_1}} + \frac{\alpha_{m_2}}{\beta^{m_2}} + \cdot\cdot + \frac{\alpha_{m_\nu}}{\beta^{m_\nu}} = \frac{A_\nu}{\beta^{m_\nu}},$$

so folgt:

$$0 < \xi - \frac{A_\nu}{\beta^{m_\nu}} = \frac{\alpha_{m_{\nu+1}}}{\beta^{m_{\nu+1}}} + \frac{\alpha_{m_{\nu+2}}}{\beta^{m_{\nu+2}}} + \cdots\cdots$$

$$(19)\qquad < \frac{\beta - 1}{\beta^{m_{\nu+1}}}\left(1 + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \cdot\cdot\right) = \frac{1}{\beta^{m_{\nu+1}-1}}.$$

Wird jetzt wieder eine natürliche Zahl n *beliebig groß* vorgeschrieben, so hat man:

$$m_{\nu+1} - 1 = (m_{\nu+1} - n\, m_\nu - 1) + n\, m_\nu$$

$$= m_{\nu+1}\left(1 - \frac{n\, m_\nu + 1}{m_{\nu+1}}\right) + n\, m_\nu.$$

Wegen $\lim\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{m_\nu}{m_{\nu+1}} = 0$ läßt sich eine untere Schranke für ν so fixieren, daß $\dfrac{n\, m_\nu + 1}{m_{\nu+1}} \leqq \vartheta$, wo ϑ einen beliebig anzunehmenden positiven echten Bruch bedeutet, und es geht alsdann die Ungleichung (19) in die folgende über:

$$(20)\qquad \left|\xi - \frac{A_\nu}{\beta^{m_\nu}}\right| < \frac{1}{\beta^{(1-\vartheta)\, m_{\nu+1}} (\beta^{m_\nu})^n}.$$

Da bei hinlänglicher Vergrößerung von ν der Faktor $\beta^{(1-\vartheta)\, m_{\nu+1}}$, wegen $\lim\limits_{\nu\to\infty} m_{\nu+1} = +\infty$, jede noch so große positive Zahl Γ über-

---

1) In dezimaler Schreibweise:

$$\xi = 0,\ \alpha_1 \alpha_2 \cdot\cdot \alpha_\mu \cdots\cdots$$

$$\text{wo: } \alpha_{m_\nu} \neq 0,$$

dagegen:

$$\alpha_\mu = 0 \text{ für } \mu \neq m_\nu.$$

steigt, so erfüllt die Zahl ξ wieder die Bedingung des Satzes von Nr. 2, ist also *transzendent.*[1])

Übrigens lassen sich auch leicht andere unendliche Reihen bilden, deren Summen gleichfalls transzendente Zahlen sind, z. B. $\sum_1^\infty \nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{m_\nu}$ wo m_ν wiederum die frühere Bedeutung hat

§ 106. Kettenbrüche mit negativen Teilzählern $(-\alpha_\nu)$ und positiven Teilnennern β_ν. — Näherungsbruch-Eigenschaften und Konvergenz im Falle: $\beta_\nu \geqq 1 + \alpha_\nu$.

1. Ein Kettenbruch mit *positiven* und *negativen* Gliedern läßt sich stets auf die Form bringen[2]):

$$\beta_0 + \left[\frac{\varepsilon_\nu\, \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^n \text{ bzw. } \beta_0 + \left[\frac{\varepsilon_\nu\, \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty,$$

wo β_0 eine *beliebige reelle* Zahl, dagegen α_ν, β_ν für $\nu \geqq 1$ wesentlich *positive* Zahlen bedeuten und je nach Bedarf $\varepsilon_\nu = \pm 1$ zu setzen ist. Da das additive Anfangsglied β_0 die Natur des endlichen bzw. unendlichen Kettenbruches nicht wesentlich beeinflußt und außerdem:

$$\left[\frac{\varepsilon_\nu\, \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^n = \varepsilon_1 \cdot \left[\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\varepsilon_\nu\, \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_2^\infty,$$

so können wir ohne merkliche Beschränkung der Allgemeinheit $\beta_0 = 0$ und $\varepsilon_1 = +1$ annehmen, also unseren weiteren Betrachtungen einen Kettenbruch von der Form.

$$\left[\frac{\varepsilon_\nu\, \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^n \text{ bzw } \left[\frac{\varepsilon_\nu\, \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty, \text{ wo: } \varepsilon_1 = +1,$$

zugrunde legen. Des weiteren soll angenommen werden, daß die α_ν, β_ν den Bedingungen genügen:

$$\beta_1 > 1, \quad \beta_\nu \geqq 1 + \alpha_\nu > 1 \quad (\nu \geqq 2). \tag{1}$$

1) Da beim Beweise des Satzes von Nr. 1 und der daraus gezogenen Folgerung von Nr. 2 die Lehre von den Kettenbrüchen in keiner Weise benützt wird, so hätten wir den Inhalt von Nr. 1 und 2 nebst der in Nr. 4 gemachten Anwendung auf die Herstellung transzendenter Zahlen mit Hilfe von unendlichen Systembrüchen schon unmittelbar an § 25 anschließen können. Immerhin gehört der Satz von Nr. 1 seinem Charakter nach doch so wesentlich dem mit der Lehre von den Kettenbrüchen zusammenhängenden Gedankenkreise an, daß es zweckmäßig erschien, ihn erst an der vorliegenden Stelle einzufügen.

2) S. § 94, Nr. 4, S. 711, letzte Zeile.

Werden die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche wieder mit A_ν, B_ν bezeichnet, so hat man:

(2) $\quad B_0 = 1,\ B_1 = \beta_1$ und für $\nu \geqq 2$: $B_\nu = \beta_\nu B_{\nu-1} + \varepsilon_\nu \alpha_\nu B_{\nu-2}$

Aus der Rekursionsformel folgt sodann für $\nu \geqq 2$ und $B_{\nu-2} \geqq 0$:

$$(3)\quad \begin{cases} B_\nu - B_{\nu-1} \geqq (\beta_\nu - 1) B_{\nu-1} - \alpha_\nu B_{\nu-2} & (\textit{gleich} \text{ nur für } \varepsilon_\nu = -1) \\ \qquad\qquad \geqq (\beta_\nu - 1)(B_{\nu-1} - B_{\nu-2}) & \\ \qquad\qquad > 0, & \text{wenn zugleich: } B_{\nu-1} > B_{\nu-2}. \end{cases}$$

Da aber $B_1 > B_0 > 0$, so ergibt sich durch vollständige Induktion die Gültigkeit dieser Beziehungen für jedes $\nu \geqq 2$. Die B_ν sind also für jedes ν *positiv* und mit ν *monoton zunehmend.*

Die gleichen Eigenschaften gelten übrigens auch für die A_ν, da diese ja für $\nu \geqq 2$ derselben Rekursionsformel genügen, und wegen $A_0 = 0$, $A_1 = \alpha_1$ auch die erforderlichen Anfangsbedingungen: $A_1 > A_0 \geqq 0$ erfüllt sind.

Hiernach sind also auch alle Näherungsbrüche $K_\nu \equiv \frac{A_\nu}{B_\nu}$ für $\nu \geqq 1$ wohldefinierte *positive* Zahlen

Setzt man in der zweiten und dritten der Ungleichungen (3), nämlich:

$B_\nu - B_{\nu-1} \geqq (\beta_\nu - 1) \cdot (B_{\nu-1} - B_{\nu-2}) > 0$ (wobei das *Gleichheits*zeichen nur im Falle $\varepsilon_\nu = -1$, $\beta_\nu = 1 + \alpha_\nu$ gilt) der Reihe nach $\nu = n$, $n-1, \cdots 3, 2$, so folgt:

$$(4)\quad \begin{cases} B_n - B_{n-1} \geqq (\beta_n - 1) \cdot (B_{n-1} - B_{n-2}) > 0 \\ B_{n-1} - B_{n-2} \geqq (\beta_{n-1} - 1) \cdot (B_{n-2} - B_{n-3}) > 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_3 - B_2 \geqq (\beta_3 - 1) \cdot (B_2 - B_1) > 0 \\ B_2 - B_1 \geqq (\beta_2 - 1) \cdot (B_1 - B_0) > 0, \end{cases}$$

und wenn man diese Ungleichungen miteinander, sowie mit der Gleichung:

$$B_1 - B_0 = \beta_1 - 1$$

multipliziert, so ergibt sich nach Weglassung der beiden Seiten gemeinsamen (durchweg von Null verschiedenen) Faktoren:

$$(5)\quad B_n - B_{n-1} \geqq (\beta_1 - 1)\ (\beta_2 - 1) \cdots (\beta_n - 1) \text{ für } n \geqq 2,$$

übrigens mit dem *Gleichheits*zeichen auch gültig für $n = 1$, während für $n > 1$ das *Gleichheits*zeichen nur dann gilt, wenn dasselbe in den zur Herleitung benützten Beziehungen (4) *ausnahmslos* Geltung hat, wenn also:

$$(6)\quad \varepsilon_\nu = -1,\ \beta_\nu = 1 + \alpha_\nu \text{ für } \nu = 2, 3, \cdots n.$$

Ersetzt man in der Beziehung (5) n sukzessive durch $(n-1)$, $(n-2), \cdots 2, 1$ und addiert zu ihr die so resultierenden Beziehungen mit Hinzufügung der Gleichung:

$$B_0 = 1,$$

so findet man:

(7) $B_n \geqq 1 + (\beta_1 - 1) + (\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1) + \cdots + (\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1) \cdots (\beta_n - 1)$,

und zwar in dem Sinne, daß stets:

$$\text{(8a)} \qquad B_n > 1 + \sum_1^n {}^{\nu} (\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1) \cdots (\beta_\nu - 1)$$

mit *einziger Ausnahme* des durch die Bedingungen (6) charakterisierten Falles, in welchem also der betreffende Kettenbruch lautet:

$$\left[\frac{\alpha_1}{\beta_1}, -\frac{\alpha_\nu}{1+\alpha_\nu}\right]_2^n$$

und die Beziehung (7) die Form annimmt:

$$\text{(8b)} \begin{cases} B_n = 1 + (\beta_1 - 1) + (\beta_1 - 1)\cdot\alpha_2 + \cdots + (\beta_1 - 1)\cdot\alpha_2\,\alpha_3 \cdots \alpha_n \\ \quad = 1 + \dfrac{\beta_1 - 1}{\alpha_1}\cdot\sigma_n, \quad \text{wo: } \sigma_n = \sum_1^n {}^{\nu}\,\alpha_1\,\alpha_2 \cdots \alpha_\nu. \end{cases}$$

2. Wir fassen jetzt zunächst den Fall ins Auge, daß für $\nu \geqq 2$ durchweg $\varepsilon_\nu = -1$, also:

$$\text{(9)} \quad (K_n) \equiv \frac{\alpha_1|}{|\beta_1} - \frac{\alpha_2|}{|\beta_2} - \cdots - \frac{\alpha_n|}{|\beta_n} \quad (\text{wo: } \beta_1 > 1 \text{ und } \beta_\nu \geqq 1 + \alpha_\nu > 1 \text{ für } \nu \geqq 2).$$

Aus der Differenzenformel (VII) von § 92, Nr. 2, S 697, ergibt sich alsdann (wenn daselbst gesetzt wird: $a_1 = \alpha_1$, dagegen für $\nu \geqq 2$: $a_\nu = -\alpha_\nu$):

$$\text{(10)} \qquad K_\nu - K_{\nu-1} = \frac{\alpha_1\,\alpha_2 \cdots \alpha_\nu}{B_{\nu-1}\,B_\nu} > 0, \quad \text{also: } K_\nu > K_{\nu-1}.$$

Da die (nach dem Ergebnis von Nr. 1 durchweg *positiven*) Näherungsbrüche K_ν im vorliegenden Falle beständig zunehmen, nicht, wie bei Kettenbrüchen mit positiven Gliedern, teils wachsend und teils fallend, also von *beiden* Seiten dem Werte K_n bzw. $\lim_{n\to\infty} K_n$ sich nähern, so liefern sie kein ausreichendes Mittel, um den Grad der Annäherung, welche durch irgendein bestimmtes K_ν erzielt wird, abschätzen zu können. Zur Erreichung dieses Zweckes führen wir noch eine zweite Folge von Brüchen K'_ν, sogenannten *Nebennäherungsbrüchen* ein, welche im Gegensatz zu den K_ν dem Werte des Kettenbruches sich *fallend* nähern. Wir definieren als den ν^{ten} *Nebennäherungsbruch* des vorgelegten (bzw. unbegrenzt fortgesetzten) Kettenbruches (9) die reduzierte Form des Kettenbruches:

$$\text{(11)} \qquad (K'_\nu) \equiv \frac{\alpha_1|}{|\beta_1} - \frac{\alpha_2|}{|\beta_2} - \cdots - \frac{\alpha_{\nu-1}|}{|\beta_{\nu-1}} - \frac{\alpha_\nu\;|}{|\beta_\nu - 1} \quad (\nu \geqq 1).$$

Für $\nu \geqq 2$ hat man alsdann:

$$(12) \qquad K'_\nu = \frac{(\beta_\nu - 1) A_{\nu-1} - \alpha_\nu A_{\nu-2}}{(\beta_\nu - 1) B_{\nu-1} - \alpha_\nu B_{\nu-2}} = \frac{A_\nu - A_{\nu-1}}{B_\nu - B_{\nu-1}} > 0,$$

und diese Formel gilt schließlich auch für $\nu = 1$ wegen:

$$K'_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1 - 1} = \frac{A_1 - A_0}{B_1 - B_0}.$$

Um zu zeigen, daß die K'_ν mit wachsendem ν *niemals zunehmen*, bilden wir für $\nu \geqq 1$:

$$K'_\nu - K'_{\nu+1} = \frac{A_\nu - A_{\nu-1}}{B_\nu - B_{\nu-1}} - \frac{A_{\nu+1} - A_\nu}{B_{\nu+1} - B_\nu} = \frac{\Gamma_\nu}{(B_\nu - B_{\nu-1})(B_{\nu+1} - B_\nu)},$$

wo:

$$\Gamma_\nu = (A_\nu - A_{\nu-1})(B_{\nu+1} - B_\nu) - (B_\nu - B_{\nu-1})(A_{\nu+1} - A_\nu)$$

Führt man für $B_{\nu+1}$, $A_{\nu+1}$ die entsprechenden Rekursionsausdrücke ein, so wird:

$$\begin{aligned}\Gamma_\nu = (A_\nu - A_{\nu-1})&((\beta_{\nu+1} - 1) B_\nu - \alpha_{\nu+1} B_{\nu-1}) \\ - (B_\nu - B_{\nu-1})&((\beta_{\nu+1} - 1) A_\nu - \alpha_{\nu+1} A_{\nu-1}),\end{aligned}$$

und da die mit $A_\nu B_\nu$, $A_{\nu-1} B_{\nu-1}$ behafteten Glieder sich wegheben, so folgt weiter:

$$\begin{aligned}\Gamma_\nu = -\alpha_{\nu+1} A_\nu B_{\nu-1} - (\beta_{\nu+1} - 1) A_{\nu-1} B_\nu + (\beta_{\nu+1} - 1) A_\nu B_{\nu-1} \\ + \alpha_{\nu+1} A_{\nu-1} B_\nu = (\beta_{\nu+1} - \alpha_{\nu+1} - 1)(A_\nu B_{\nu-1} - A_{\nu-1} B_\nu),\end{aligned}$$

sodaß sich schließlich mit Hilfe der Differenzenformel (VI) von § 92, Nr. 2, S 696, ergibt:

$$(13) \qquad K'_\nu - K'_{\nu+1} = \frac{(\beta_{\nu+1} - \alpha_{\nu+1} - 1)\,\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu}{(B_\nu - B_{\nu-1})(B_{\nu+1} - B_\nu)} \geqq 0,$$

also:

$$(14) \qquad K'_{\nu+1} \leqq K'_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots),$$

wobei das *Gleichheits*zeichen dann und nur dann gilt, wenn $\beta_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1} + 1$ Die *Nebennäherungsbrüche* K'_ν sind also nach Gl (12) durchweg *positiv* und mit wachsendem ν *niemals zunehmend.*

Zur Vergleichung der K'_ν mit den K_ν hat man nach Gl. (12):

$$K'_\nu - K_\nu = \frac{A_\nu - A_{\nu-1}}{B_\nu - B_{\nu-1}} - \frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{A_\nu B_{\nu-1} - B_\nu A_{\nu-1}}{B_\nu (B_\nu - B_{\nu-1})}$$

$$(15) \qquad = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu}{B_\nu (B_\nu - B_{\nu-1})} > 0$$

und daher für jedes $\nu \geqq 1$:

(16) $\quad K'_\nu > K_\nu$ (mit definitivem *Ausschluß der Gleichheit*).

Da insbesondere:

$$K_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad K_1' = \frac{\alpha_1}{\beta_1 - 1},$$

so läßt sich der Inhalt der Ungleichungen (10), (14), (15) in folgender Weise übersichtlich zusammenfassen:

$$(17) \quad \frac{\alpha_1}{\beta_1} = K_1 < K_2 < \cdots < K_{n-1} < K_n < K_n' \leqq K_{n-1}' \leqq \cdots \leqq K_1' = \frac{\alpha_1}{\beta_1 - 1}.$$

Dabei gilt die *ganze Folge* der zulässigen Gleichheitszeichen, wenn die α_ν, β_ν für $\nu \geqq 2$ durchweg der Bedingung (6) genügen, wenn also:

$$(18) \qquad \beta_\nu = 1 + \alpha_\nu \text{ für } \nu = 2, 3, \cdots n$$

In diesem Falle hat man also:

$$(19) \qquad K_n' = \frac{\alpha_1}{\beta_1 - 1},$$

während in *jedem* Falle:

$$(20) \qquad \frac{\alpha_1}{\beta_1} < K_n < \frac{\alpha_1}{\beta_1 - 1}$$

3. Aus den Ungleichungen (17) geht unmittelbar hervor, daß ein unendlicher Kettenbruch von der Form: $\left[\frac{\alpha_1}{\beta_1}, -\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_2^\infty$, dessen Teilzähler und Teilnenner den Bedingungen (1) genügen, stets *konvergiert*, und zwar, da ja bei Weglassung von Anfangsgliedern seine charakteristischen Gliedereigenschaften (abgesehen von dem für die Konvergenz belanglosen Anfangsvorzeichen) erhalten bleiben, *unbedingt* konvergiert. Wird sein Wert $\lim\limits_{n \to \infty} K_n$ mit K bezeichnet, so würde aus (20) zunächst nur geschlossen werden können, daß:

$$(21) \qquad \frac{\alpha_1}{\beta_1} < K \leqq \frac{\alpha_1}{\beta_1 - 1}$$

Aus den Ungleichungen (17) folgt indessen, daß für das Auftreten des *ersten Gleichheits*zeichens jede Möglichkeit ausgeschlossen ist, daß dagegen das *zweite dann* und *nur* dann gilt, wenn gleichzeitig:

$$(22) \qquad \lim_{n \to \infty} K_n = \lim_{n \to \infty} K_n', \quad K_n' = \frac{\alpha_1}{\beta_1 - 1} \text{ für } \textit{jedes } n.^{1)}$$

Was die erste dieser beiden Beziehungen betrifft, so dürfte man beim bloßen Anblick der beiden Kettenbrüche:

---

1) Würde in der Folge:

$$K_1' \geqq K_2' \geqq \cdots \geqq K_n' \geqq \cdots$$

auch nur ein einziges *Ungleichheits*zeichen gelten, so könnte ja *niemals*: $\lim K_n' = K_1'$ werden.

$$(\mathsf{K}_n) \equiv \frac{\alpha_1|}{|\beta_1} - \frac{\alpha_2|}{|\beta_2} - \cdots - \frac{\alpha_{n-1}|}{|\beta_{n-1}} - \frac{\alpha_n|}{|\beta_n}$$

$$(\mathsf{K}'_n) \equiv \frac{\alpha_1|}{|\beta_1} - \frac{\alpha_2|}{|\beta_2} - \cdots - \frac{\alpha_{n-1}|}{|\beta_{n-1}} - \frac{\alpha_n|}{|\beta_n - 1}$$

leicht geneigt sein, die Übereinstimmung jener beiden Grenzwerte (deren Existenz ja bereits außer Frage steht) als etwas Selbstverständliches anzusehen, da ja für $n \longrightarrow \infty$ entsprechende Glieder *beliebig hohen Ranges* bei beiden Kettenbrüchen durchaus *identisch* sind. Daß aber diese Annahme nicht zutrifft, wird sofort deutlich, wenn man beachtet, daß die Beziehung: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{K}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{K}'_n$ mit Rücksicht auf Gl. (12) soviel besagt wie die folgende:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{A}_n}{\mathsf{B}_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{A}_n - \mathsf{A}_{n-1}}{\mathsf{B}_n - \mathsf{B}_{n-1}} \tag{23}$$

und daß, unter Voraussetzung der Existenz des *rechts* stehenden Grenzwertes, die Gültigkeit dieser Beziehung auf Grund des verallgemeinerten Cauchyschen Grenzwertsatzes (s. § 37, Nr. 3, Gl. (13), S. 230) nur gesichert ist, falls B_n mit n (monoton) ins *Unendliche* wächst[1]), daß dagegen die Gleichheit jener beiden Grenzwerte im allgemeinen aufhört, wenn B_n (also auch A_n) für $n \longrightarrow \infty$ einem *endlichen* Grenzwerte zustrebt[2]), und daß andererseits in dem vorliegenden Zusammenhange dieser Fall auch wirklich, und zwar sogar in erheblichem Umfange eintreten kann. Aus der Rekursionsformel:

$$\mathsf{B}_\nu = \beta_\nu \mathsf{B}_{\nu-1} - \alpha_\nu \mathsf{B}_{\nu-2}$$

folgt nämlich:

$$\mathsf{B}_\nu < \beta_\nu \mathsf{B}_{\nu-1}$$

---

1) Das nämliche Resultat würde sich auch aus Gl. (15) ergeben. Danach hat man mit Benützung von Ungl. (5):

$$\mathsf{K}'_n - \mathsf{K}_n \leqq \frac{1}{\mathsf{B}_n} \cdot \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}{(\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1) \cdots (\beta_n - 1)} \leqq \frac{1}{\mathsf{B}_n},$$

also.

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{K}_n = \lim_{n\to\infty} \mathsf{K}'_n, \text{ wenn } \lim_{n\to\infty} \mathsf{B}_n = \infty.$$

2) In diesem Falle würde nämlich die Beziehung (23) die Form annehmen:

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{A}_n}{\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{B}_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{A}_n - \mathsf{A}_{n-1}}{\mathsf{B}_n - \mathsf{B}_{n-1}},$$

die offenbar etwas *generell Unmögliches* besagt. Denn bedeutet C eine ganz beliebige (auch komplexe) Zahl, so bleibt die *rechte* Seite der obigen Gleichung ungeändert, wenn man A_ν durch $\mathsf{A}_\nu + C$ ersetzt, während die *linke* je nach Wahl von C *jeden beliebigen* Wert annehmen und nur „*ausnahmsweise*", nämlich für eine ganz spezielle Wahl von C mit der *rechten* übereinstimmen würde. (Einfachstes Beispiel: $\mathsf{A}_\nu = \mathsf{B}_\nu + C$.) Ob diese „ausnahmsweise" Übereinstimmung in dem vorliegenden Falle jemals stattfindet, bleibt dahingestellt.

und durch wiederholte Anwendung dieser Ungleichung für $\nu = n, n-1, \cdots 2$ mit Berücksichtigung von $B_1 = \beta_1$:

$$(24)\quad B_n < \beta_n \beta_{n-1} \cdots \beta_2 \beta_1 = (1 + (\beta_1 - 1))(1 + (\beta_2 - 1)) \cdots (1 + (\beta_n - 1)).$$

Dieses Produkt besitzt aber für $n \longrightarrow \infty$ einen *endlichen* Grenzwert, wenn die Reihe $\sum_1^\infty {}^\nu (\beta_\nu - 1)$ *konvergiert* (nach § 81, Nr. 1, S. 621), sodaß also in diesem Falle auch $\lim_{n\to\infty} B_n$ *endlich* ausfällt. Da andererseits aus Ungl. (7) folgt, daß:

$$(25)\quad \lim_{n\to\infty} B_n \geqq 1 + \sum_1^\infty {}^\nu (\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1) \cdots (\beta_\nu - 1),$$

so ergibt sich:

Die Konvergenz der Reihe $\sum_1^\infty {}^\nu (\beta_\nu - 1)$ *bildet eine* ***hinreichende***, *diejenige der Reihe* $\sum_1^\infty {}^\nu (\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1) \cdots (\beta_\nu - 1)$ *eine* ***notwendige*** *Bedingung für die Endlichkeit von* $\lim_{n\to\infty} B_n$.

4 Kehren wir nach dieser allgemeinen Erörterung wieder zu dem besonderen Falle der Bedingungen (22) zurück, so steht zunächst fest, daß die zweite dieser Bedingungen nach Gl. (18) und (19) *dann* und *nur* dann erfüllt ist, wenn durchweg: $\beta_\nu = 1 + \alpha_\nu\ (\nu \geqq 2)$. Ist dies der Fall, so gilt Gl. (8b), und es wird daher:

$$(26)\quad B_n = 1 + \frac{\beta_1 - 1}{\alpha_1} \cdot \sum_1^n {}^\nu \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu,$$

also $\lim_{n\to\infty} B_n = \infty$ und somit nach dem Ergebnis der vorigen Nummer:

$$(27)\quad \lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty} K_n' \text{ d. h.} = \frac{\alpha_1}{\beta_1 - 1},$$

wenn die Reihe $\sum_1^\infty {}^\nu \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu$ *divergiert.*

Um auch den Wert des Kettenbruches unter Beibehaltung der Bedingung: $\beta_\nu = 1 + \alpha_\nu\ (\nu \geqq 2)$ für den Fall der *Konvergenz* dieser Reihe zu bestimmen, kann man der Rekursionsformel für die A_ν zunächst die Beziehung entnehmen:

$$A \;-\; A \quad = \alpha\ (A \quad - A\ )$$

und findet daraus durch wiederholte Anwendung für $\nu = n$, $(n-1)$, $\cdots 3, 2$ mit Berücksichtigung von: $A_1 = \alpha_1$, $A_0 = 0$ (im übrigen ganz analog wie bei der Herleitung von (5) aus (4)):

$$A_n - A_{n-1} = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n ,$$

also schließlich (wiederum analog wie beim Übergange (5) zu (7)):

$$A_n = \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 + \cdots + \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = \sigma_n. \tag{28}$$

Somit ergibt sich:

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{\sigma_n}{1 + \frac{\beta_1 - 1}{\alpha_1} \cdot \sigma_n} = \frac{\alpha_1}{\beta_1 - 1} \cdot \frac{\frac{\beta_1 - 1}{\alpha_1} \cdot \sigma_n}{1 + \frac{\beta_1 - 1}{\alpha_1} \cdot \sigma_n} \text{ [1]} \tag{29}$$

und, wenn die Reihe $\sum_1^\infty \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu$ gegen den Wert σ konvergiert, also: $\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \sigma$:

$$\lim_{n \to \infty} K_n = \frac{\sigma}{1 + \frac{\beta_1 - 1}{\alpha_1} \cdot \sigma} < \frac{\alpha_1}{\beta_1 - 1}. \tag{30}$$

Die vorstehenden Ergebnisse lassen sich schließlich zu dem folgenden Satze zusammenfassen:

---

1) Im Falle $\lim_{n \to \infty} \sigma_n = +\infty$ ergibt sich hieraus wieder, in Übereinstimmung mit Gl (27):

$$\lim_{n \to \infty} K_n = \frac{\alpha_1}{\beta_1 - 1}$$

Übrigens läßt sich dieses Resultat auch aus der Äquivalenzformel von § 95, Nr. 2, Gl. (8b), S. 714, herleiten. Danach hat man:

$$\left[\frac{1}{1}, \frac{-\alpha_\nu}{1 + \alpha_\nu}\right]_1^n = 1 + \sigma_n$$

und durch Übergang zum reziproken Werte.

$$1 + \left[\frac{-\alpha_\nu}{1 + \alpha_\nu}\right]_1^n = \frac{1}{1 + \sigma_n},$$

also, falls $\lim_{n \to \infty} \sigma_n = +\infty$:

$$\left[\frac{-\alpha_\nu}{1 + \alpha_\nu}\right]_1^\infty = -1$$

Da es freisteht, alle Indizes um 1 zu erhöhen, so folgt, daß auch:

$$\left[\frac{-\alpha_\nu}{1 + \alpha_\nu}\right]_2^\infty = -1$$

und somit schließlich:

$$\left[\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{-\alpha_\nu}{1 + \alpha_\nu}\right]_2^\infty = \frac{\alpha_1}{\beta_1 - 1}.$$

Ist:

$$\beta_1 > 1 \text{ und } \beta_\nu \geqq 1 + \alpha_\nu > 1 \text{ für } \nu \geqq 2\text{[1]},$$

so ist der unendliche Kettenbruch:

$$\frac{\alpha_1|}{|\beta_1} - \frac{\alpha_2|}{|\beta_2} - \cdots - \frac{\alpha_\nu|}{|\beta_\nu} - \cdots$$

unbedingt konvergent. Sein Wert liegt zwischen $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ *und* $\frac{\alpha_1}{\beta_1 - 1}$ *mit Ausnahme eines einzigen Falles, in welchem die zweite dieser beiden Grenzen erreicht wird, nämlich wenn:*

$$\beta_\nu = 1 + \alpha_\nu \ (\nu = 2, 3, \cdots) \text{ und: } \sum_1^\infty {}^\nu \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu = +\infty.$$

Man hat dann also:

$$\frac{\alpha_1|}{|\beta_1} - \frac{\alpha_2|}{|1 + \alpha_2} - \frac{\alpha_3|}{|1 + \alpha_3} - \cdots - \frac{\alpha_\nu|}{|1 + \alpha_\nu} - \cdots = \frac{\alpha_1}{\beta_1 - 1}.$$

§ 107. Negativ-regelmäßige Kettenbrüche. — Identitätssatz. — Darstellung rationaler und irrationaler Zahlen durch negativ-regelmäßige Kettenbrüche.

1. Unter einem *negativ-regelmäßigen* Kettenbruche verstehen wir einen solchen von der Form:

$$\beta_0 + \left[-\frac{1}{\beta_\nu}\right]_1^n \quad \text{bzw} \quad \beta_0 + \left[-\frac{1}{\beta_\nu}\right]_1^\infty,$$

wo β_0 eine *beliebige ganze* Zahl und die β_ν für $\nu \geqq 1$ *natürliche Zahlen* $\geqq 2$ bedeuten. Es ist dies also (abgesehen von dem prinzipiell nicht wesentlichen Anfangsgliede β_0) eine spezielle Gattung des im vorigen Paragraphen betrachteten, der Bedingung $\beta_\nu \geqq 1 + \alpha_\nu$ genügenden Kettenbruchtypus $\left[\frac{-\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^n$ bzw $\left[\frac{-\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$, welche im übrigen ähnliche Eigenschaften besitzt wie die von uns schlechthin als *regelmäßig* bezeichneten Kettenbrüche (§ 101, S. 752 und § 103, S. 773).

Werden die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche wieder mit A_ν, B_ν bezeichnet, so folgt zunächst mit Rücksicht darauf, daß das jetzt hinzugefügte Anfangsglied β_0 und der erste Teilzähler (der hier

---

1) Hierbei kann also das Vorzeichen von α_1, da über dasselbe keine ausdrückliche Verfügung getroffen ist, auch *negativ* gedacht werden. Ist das letztere der Fall, so wird offenbar auch der Wert des Kettenbruches: $K < 0$ und man hat:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1 - 1} \leqq K < \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

(-1) heißt, nicht wie zuvor α_1, wo $\alpha_1 > 0$) in den Ausdrücken für die B_ν überhaupt nicht vorkommt, daß auf diese letzteren ohne weiteres die Ergebnisse des vorigen Paragraphen angewendet werden können. Man hat also auf Grund der dort (S. 805) mit (3) bezeichneten Beziehungen für $\nu \geqq 1$ durchweg: $B_\nu > B_{\nu-1} > 0$, sodaß also das Vorkommen sinnloser Näherungsbrüche wieder ausgeschlossen ist. Da im übrigen die B_ν mit ν nur *um ganze Zahlen* wachsen, so hat man hier in jedem Falle:

$$(1) \qquad \lim_{\nu \to \infty} B_\nu = +\infty.$$

Bezüglich der A_ν tritt gegenüber dem vorigen Paragraphen insofern eine Änderung ein, als die Anfangsgleichungen (statt $A_0 = 0$, $A_1 = \alpha_1$) nunmehr lauten: $A_0 = \beta_0$, $A_1 = \beta_1\beta_0 - 1$.

Aus der Rekursionsformel:

$$(2) \quad A_\nu = \beta_\nu A_{\nu-1} - A_{\nu-2} = (\beta_\nu - 1) A_{\nu-1} + (A_{\nu-1} - A_{\nu-2}) \quad (\nu \geqq 2)$$

folgt alsdann im Falle $\beta_0 = 0$ (wo also: $A_0 = 0$, $A_1 = -1$) und im Falle $\beta_0 < 0$ (wo also: $A_0 = -|\beta_0| \leqq -1$, $A_1 = -\beta_1|\beta_0| - 1 < A_0$), daß die A_ν durchweg *negativ* ausfallen und mit ν *numerisch zunehmen*. Ist dagegen $\beta_0 > 0$, d. h. $\geqq 1$ (also: $A_0 = \beta_0 \geqq 1$, $A_1 = \beta_1\beta_0 - 1 \geqq 2\beta_0 - 1 \geqq \beta_0$ und daher: $A_1 \geqq A_0 > 0$, wobei das *Gleichheits*zeichen nur in dem einzigen Falle $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$ gilt), so fallen die A_ν wieder durchweg *positiv* aus und, abgesehen von einem einzigen sogleich anzugebenden Ausnahmefall, mit ν *monoton zunehmend*. Man hat nämlich zunächst nach Gl. (2) allemal: $A_\nu \geqq A_{\nu-1}$, sofern nur $A_{\nu-1} \geqq A_{\nu-2} > 0$, was auf Grund der soeben angegebenen Anfangsbedingungen tatsächlich der Fall ist. Dabei tritt aber die Gleichheit $A_\nu = A_{\nu-1}$ dann und nur dann ein, wenn *gleichzeitig* $\beta_\nu = 2$ und $A_{\nu-1} = A_{\nu-2}$, also, wie die Fortsetzung dieser Schlußweise ergibt, wenn durchweg: $\beta_\nu = \beta_{\nu-1} = \cdots = \beta_1 = 2$ und: $A_{\nu-1} = A_{\nu-2} = \cdots = A_1 = A_0$, d. h. schließlich: $A_0 = \beta_0 = 1$.

Im übrigen sind offenbar alle A_ν, B_ν *ganze* Zahlen und, da die Differenzenformel (VI) von § 92, S. 696, hier die Form annimmt:

$$(3) \quad A_\nu B_{\nu-1} - A_{\nu-1} B_\nu = -1 \quad (\text{wegen: } a_1 = a_2 = \cdots = a_\nu = -1),$$

relativ prim, die Näherungsbrüche $K_\nu = \frac{A_\nu}{B_\nu}$ also *reduzierte* Brüche (geradeso wie bei *regelmäßigen* Kettenbrüchen — s. § 101, Nr. 1, S. 753), welche wegen:

$$(4) \qquad K_\nu - K_{\nu-1} = -\frac{1}{B_{\nu-1}B_\nu} < 0 \quad (\text{also: } K_\nu < K_{\nu-1})$$

mit wachsendem ν beständig *abnehmen* (d. h. *algebraisch*, also im Falle $K_\nu < 0$ bei *wachsendem* Absolutwert). Man hätte dies auch unmittelbar

aus Nr. 2 des vorigen Paragraphen, Gl. (10) entnehmen können, wenn man in Rechnung zieht, daß bei Festhaltung der *dort* gebrauchten Bezeichnung den jetzigen Näherungsbrüchen der Wert $\beta_0 - K_\nu$ zukommen würde. Die analoge Schlußweise läßt erkennen, daß an die Stelle der Ungleichungen (14) und (16) jetzt die folgenden treten (für $\nu \geqq 1$):

$$K'_{\nu+1} \geqq K'_\nu, \quad K'_\nu < K_\nu \text{ (mit Ausschluß der Gleichheit),}$$

sodaß sich im vorliegenden Falle schließlich das folgende System von Ungleichungen ergibt:

$$(5) \quad \beta_0 - \frac{1}{\beta_1 - 1} = K'_1 \leqq K'_2 \leqq \cdots \leqq K'_{n-1} \leqq K'_n < K_n < K_{n-1} < \cdots < K_1 = \beta_0 - \frac{1}{\beta_1},$$

und zwar mit dem Zusatz, daß die *ganze Folge* von *Gleichheits*zeichen nur gilt, wenn für $\nu \geqq 2$ durchweg: $\beta_\nu = 2$.

Für den *unendlichen* negativ-regelmäßigen Kettenbruch: $\beta_0 + \left[\frac{-1}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$, dessen unbedingte Konvergenz nach dem Lehrsatze von Nr. 4 des vorigen Paragraphen ja bereits feststeht, ergibt sich aus den Ungleichungen (5), daß sein Wert in den Grenzen $\beta_0 - \frac{1}{\beta_1 - 1}$ und $\beta_0 - \frac{1}{\beta_1}$ liegt und daß nur deren *erste* möglicherweise *erreicht* werden kann, nämlich dann und *nur* dann, wenn in (5) die *sämtlichen Gleichheits*zeichen gelten, wenn also für $\nu \geqq 2$ durchweg: $\beta_\nu = 2$. Daß dies aber tatsächlich der Fall ist, daß also:

$$(6) \qquad \beta_0 - \frac{1|}{|\beta_1} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots = \beta_0 - \frac{1}{\beta_1 - 1},$$

folgt wieder aus dem genannten Lehrsatze, kann aber auch unmittelbar daraus erkannt werden, daß der Wert des periodischen Kettenbruches:

$$\frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots$$

sich aus der Gleichung:

$$x = \frac{1}{2 - x}, \quad \text{also:} \quad x^2 - 2x + 1 = 0$$

bestimmt und daß diese den Wert $x = 1$ liefert, also:

$$(7) \qquad \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots = 1.$$

Setzt man wieder speziell $\beta_0 = 0$ und gibt dem ersten Teilzähler das positive Vorzeichen, so folgt aus Ungl. (20) von Nr. 2 des vorigen Paragraphen, S. 808, für $n \geqq 2$:

$$(8) \qquad \frac{1}{\beta_1} < \left[\frac{1}{\beta_1}, \frac{-1}{\beta_\nu}\right]_0^n < \frac{1}{\beta_1 - 1} \quad (\text{wo } \beta_1 \geqq 2)$$

und daher um so mehr:

(9) $$0 < \left[\frac{1}{\beta_1}, \frac{-1}{\beta_\nu}\right]_2^n < 1$$ *(mit Ausschluß jeder Gleichheit).*

Nach dem Lehrsatze von Nr. 4 des vorigen Paragraphen und der zuletzt gemachten Bemerkung gilt diese *doppelte Ungleichung* auch für $n \longrightarrow \infty$ *mit einziger Ausnahme des Falles*: $\beta_\nu = 2$ für $\nu \geqq 1$, in welchem gemäß Gl (6) an die Stelle des *zweiten Ungleichheits*zeichens das *Gleichheits*zeichen tritt.

2. Mit Hilfe des letzten Ergebnisses läßt sich zeigen, daß für die *negativ-regelmäßigen* Kettenbrüche ein ähnlicher *Identitätssatz* besteht wie für die schlechthin *regelmäßigen*, nämlich:

Zwei endliche oder zwei unendliche negativ-regelmäßige Kettenbruche, welche denselben Wert besitzen, sind identisch.

Der Beweis stimmt, abgesehen von einem bei *unendlichen* Kettenbrüchen der vorliegenden Art zu berücksichtigenden Sonderfall, fast wörtlich mit dem entsprechenden für *regelmäßige* Kettenbrüche überein (s § 101, Nr. 1, S. 753; § 103, Nr. 1, S. 774).

Handelt es sich zunächst um zwei *endliche* Kettenbrüche, etwa:

$$(10_0) \qquad \beta_0' + \left[\frac{-1}{\beta_\nu'}\right]_1^{n'} = \beta_0 + \left[\frac{-1}{\beta_\nu}\right]_1^n, \text{ wo } n' \geqq n,$$

so folgt zunächst:

$$(11_0) \quad \beta_0' - \beta_0 = -\left[\frac{-1}{\beta_\nu'}\right]_1^{n'} + \left[\frac{-1}{\beta_\nu}\right]_1^n = \left[\frac{1}{\beta_1'}, \frac{-1}{\beta_\nu'}\right]_2^{n'} - \left[\frac{1}{\beta_1}, \frac{-1}{\beta_\nu}\right]_2^n,$$

und da β_0', β_0 *ganze* Zahlen, die beiden Bestandteile der rechten Seite dagegen nach Ungl (9) *positiv* und *kleiner als* 1 sind, so ist diese Gleichung nur möglich, wenn ihre beiden Seiten den Wert 0 haben, und man findet somit:

$$(12_0) \qquad \beta_0' = \beta_0, \quad \left[\frac{1}{\beta_1'}, \frac{-1}{\beta_\nu'}\right]_2^{n'} = \left[\frac{1}{\beta_1}, \frac{-1}{\beta_\nu}\right]_2^n,$$

also aus der zweiten dieser Gleichungen durch Übergang zu den reziproken Werten:

$$(10_1) \qquad \beta_1' + \left[\frac{-1}{\beta_\nu'}\right]_2^{n'} = \beta_1 + \left[\frac{-1}{\beta_\nu}\right]_2^n$$

und hieraus wiederum durch die zuvor benützte Schlußweise:

$$(12_1) \qquad \beta_1' = \beta_1, \quad \left[\frac{1}{\beta_2'}, \frac{-1}{\beta_\nu'}\right]_3^{n'} = \left[\frac{1}{\beta_2}, \frac{-1}{\beta_\nu}\right]_3^n.$$

In dieser Weise weiter fortfahrend gelangt man zu der Beziehung:

$$(10_n)\qquad \beta'_n + \left[\frac{-1}{\beta'_\nu}\right]_{n+1}^{n'} = \beta_n,$$

aus der mit Notwendigkeit folgt, daß:

$$(12_n)\qquad \beta'_n = \beta_n, \quad \left[\frac{1}{\beta'_\nu}\right]_{n+1}^{n'} = 0, \text{ d. h. } n' = n.$$

Damit ist für *endliche* Kettenbrüche der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

Geht man nun zweitens von der Voraussetzung aus.

$$(13)\qquad \beta'_0 + \left[\frac{-1}{\beta'_\nu}\right]_1^\infty = \beta_0 + \left[\frac{-1}{\beta_\nu}\right]_1^\infty,$$

so läßt sich ja die zuvor benützte, im wesentlichen nur auf der Anwendbarkeit der Ungleichung (9) beruhende Schlußweise *unbegrenzt* fortsetzen, falls keiner der beiden unendlichen Kettenbrüche die *Periode* $-\frac{1}{2}$ besitzt, sodaß sich also in diesem Falle wieder deren *Identität* ergibt. Steht dagegen fest, daß zunächst einer der beiden Kettenbrüche, z. B. der zweite, die Periode $-\frac{1}{2}$ hat und beginnt diese etwa mit dem Gliede $-\frac{1}{\beta_{m+1}}$, so findet man, wie zuvor:

$$(14)\quad \beta'_0 = \beta_0, \ \beta'_1 = \beta_1, \ \cdots \ \beta'_m = \beta_m, \ \left[\frac{1}{\beta'_{m+1}}, -\frac{1}{\beta'_\nu}\right]_{m+2}^\infty = \left[\frac{1}{2}, \overline{-\frac{1}{2}}\right],$$

und da der *zweite* dieser Kettenbrüche den Wert 1 hat, so gilt das gleiche von dem *ersten*, was wiederum nur möglich ist, wenn für $\nu \geqq m+1$ durchweg: $\beta'_\nu = 2$. Die beiden unendlichen Kettenbrüche sind also auch in diesem Falle *identisch*.

Zusatz. Man bemerke, daß es unrichtig wäre, den vorstehenden Satz *so* zu fassen: „Zwei gleichwertige negativ-regelmäßige Kettenbrüche sind identisch.“ Es muß vielmehr ausdrücklich gesagt werden, daß die Kettenbrüche *beide* als *endlich* oder *beide* als *unendlich* vorausgesetzt sind. Denn hier gibt es ja (im Gegensatz zu den schlechthin regelmäßigen Kettenbrüchen) *unendliche* Kettenbrüche, welche mit *endlichen* negativ-regelmäßigen *gleichwertig* (aber selbstverständlich nicht identisch) sind

Man hat nämlich:

$$\beta_0 + \left[\frac{-1}{\beta_\nu}\right]_1^\infty = \beta_0 - \frac{1|}{|\beta_1} - \cdots - \frac{1|}{|\beta_m} - \frac{1|}{|\beta_{m+1}-1},$$

wenn:

$$\left[\frac{-1}{\beta_\nu}\right]_{m+2}^\infty \equiv -\frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots\cdots.$$

Dabei ist auch der *endliche* Kettenbruch ein negativ-*regelmäßiger*, sofern nur: $\beta_{m+1} \geqq 3$ vorausgesetzt wird.

3. Daß jeder *endliche*, etwa n-gliedrige negativ-regelmäßige Kettenbruch eine *gebrochene* rationale Zahl darstellt, folgt ohne weiteres daraus, daß (nach dem oben im Anschluß an Gl. (3) Gesagten) A_n und B_n *ganzzahlig* und zueinander *relativ prim* sind. Es läßt sich aber auch *umgekehrt* zeigen, daß *jeder* (echte oder unechte, positive oder negative) *rationale Bruch* durch einen und nur einen *endlichen negativ-regelmäßigen* Kettenbruch dargestellt werden kann. Ist nämlich ϱ_0 eine ganze Zahl beliebigen Vorzeichens, ϱ_1 eine nicht in $|\varrho_0|$ enthaltene natürliche Zahl, so läßt sich zunächst ϱ_0 in die Form setzen[1]):

$$(15_0) \qquad \varrho_0 = \beta_0 \varrho_1 - \varrho_2 \quad \left(\text{also: } \frac{\varrho_0}{\varrho_1} = \beta_0 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right),$$

wo β_0 eine (positive oder negative) ganze Zahl einschließlich der Null, ϱ_2 eine dem Intervall $0 < \varrho_2 < \varrho_1$ angehörige natürliche Zahl bedeutet. Wendet man jetzt auf ϱ_1, ϱ_2 den *Euklidischen Algorithmus* mit der Abänderung an, daß man jedesmal den *Quotienten* um eine Einheit *zu groß* (also $\geqq 2$) und infolgedessen den *Rest negativ* und numerisch *kleiner* als den *Divisor* nimmt, so entsteht ein System von Gleichungen folgender Art:

$$(15) \qquad \begin{cases} \varrho_1 = \beta_1 \varrho_2 - \varrho_3, & \text{wo: } \beta_1 \geqq 2, \quad 0 < \varrho_3 < \varrho_2 \\ \varrho_2 = \beta_2 \varrho_3 - \varrho_4, & \beta_2 \geqq 2, \quad 0 < \varrho_4 < \varrho_3 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varrho_{n-1} = \beta_{n-1} \varrho_n - \varrho_{n+1} & \beta_{n-1} \geqq 2, \quad 0 < \varrho_{n+1} < \varrho_n \\ \varrho_n = \beta_n \varrho_{n+1} & \beta_n \geqq 2 \end{cases}$$

Bringt man diese Gleichungen auf die Form:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \beta_1 - \frac{\varrho_3}{\varrho_2}, \quad \frac{\varrho_2}{\varrho_3} = \beta_2 - \frac{\varrho_4}{\varrho_3}, \quad \ldots, \quad \frac{\varrho_{n-1}}{\varrho_n} = \beta_{n-1} - \frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n}, \quad \frac{\varrho_n}{\varrho_{n+1}} = \beta_n,$$

so ergibt sich durch Übergang zu den reziproken Werten und sukzessives Einsetzen in Gl. (15_0) für $\frac{\varrho_0}{\varrho_1}$ der folgende Kettenbruch:

$$(16) \qquad \frac{\varrho_0}{\varrho_1} = \beta_0 - \frac{1|}{|\beta_1} - \frac{1|}{|\beta_2} - \cdots - \frac{1|}{|\beta_n}.$$

---

1) Man hat im Falle $\varrho_0 > 0$:

$$\varrho_0 = \gamma \cdot \varrho_1 + \varrho'$$
$$= (\gamma + 1)\varrho_1 - (\varrho_1 - \varrho'),$$

wo $\gamma \geqq 0$ und $0 < \varrho' < \varrho_1$, also auch: $0 < \varrho_1 - \varrho' < \varrho_1$.

Ist $\varrho_0 < 0$, so folgt zunächst:

$$|\varrho_0| = \gamma \varrho_1 + \varrho',$$

also:

$$\varrho_0 = (-\gamma)\varrho_1 - \varrho',$$

wo wieder: $\gamma \geqq 0$ und $0 < \varrho' < \varrho_1$.

Daß andererseits kein zweiter mit $\frac{\varrho_0}{\varrho_1}$ gleichwertiger *endlicher* Kettenbruch dieser Gattung existiert, folgt unmittelbar aus dem Identitätssatze der vorigen Nummer. Dagegen lehrt der Schluß des „Zusatzes“, daß $\frac{\varrho_0}{\varrho_1}$ auch noch durch einen *unendlichen* negativ-regelmäßigen Kettenbruch mit der Periode $-\frac{1}{2}$ darstellbar ist, nämlich:

$$(17)\qquad \frac{\varrho_0}{\varrho_1} = \beta_0 - \frac{1|}{|\beta_1} - \cdots - \frac{1|}{|\beta_{n-1}} - \frac{1|}{|\beta_n + 1} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots$$

(ähnlich, wie ein *endlicher* Systembruch mit der Basis β auch durch einen *unendlichen* mit der Periode $\beta - 1$ ersetzt werden kann: vgl. § 18, Nr. 3, S. 110; § 20, Nr. 1, S. 117).

4. Der Wert eines *unendlichen* negativ-regelmäßigen Kettenbruches, der nicht die Periode $-\frac{1}{2}$ besitzt, ist stets *irrational.* Denn, wäre er *rational,* so müßte der *unendliche* Kettenbruch mit einem gewissen *endlichen* negativ-regelmäßigen *gleichwertig* sein, was nach dem Zusatz zu Nr. 2 nur möglich wäre, wenn er die Periode $-\frac{1}{2}$ hätte.

Umgekehrt läßt sich wiederum zeigen, daß jede Irrationalzahl ξ_0 durch einen und nur einen unendlichen negativ-regelmäßigen Kettenbruch darstellbar ist Bedeutet nämlich β_0 die *kleinste oberhalb* ξ_0 liegende ganze Zahl (sodaß also: $\beta_0 - 1 < \xi_0 < \beta_0$), so kann man zunächst setzen:

$$(18_0)\qquad \xi_0 = \beta_0 - \frac{1}{\xi_1}, \quad \text{wo: } 0 < \frac{1}{\xi_1} < 1, \text{ also: } \xi_1 > 1.$$

Ist sodann β_1 die kleinste oberhalb ξ_1 liegende Zahl (also: $\beta_1 \geqq 2$ wegen: $\xi_1 > 1$), so folgt weiter:

$$(18_1)\qquad \xi_1 = \beta_1 - \frac{1}{\xi_2}, \quad \text{wo: } 0 < \frac{1}{\xi_2} < 1, \text{ also: } \xi_2 > 1.$$

In dieser Weise weiter fortfahrend findet man allgemein (für $\nu = 1, 2, 3, \cdots$):

$$(18_\nu)\quad \xi_\nu = \beta_\nu - \frac{1}{\xi_{\nu+1}}, \quad \text{wo: } \beta_\nu \geqq 2,\ 0 < \frac{1}{\xi_{\nu+1}} < 1, \text{ also: } \xi_{\nu+1} > 1,$$

und durch sukzessives Einsetzen dieser Beziehungen in Gl. (18_0):

$$(19)\qquad \xi_0 = \beta_0 - \frac{1|}{|\beta_1} - \frac{1|}{|\beta_2} - \cdots - \frac{1|}{|\beta_\nu} - \frac{1|}{|\xi_{\nu+1}}.$$

Dieser Prozeß kann niemals abbrechen, d. h. es kann nicht für irgendein bestimmtes $\nu = n$ die Gleichung (18_ν) sich auf die folgende reduzieren:

$$\xi_n = \beta_n \quad (\text{also: } \frac{1}{\xi_{n+1}} = 0),$$

da in diesem Falle:

$$\xi_0 = \beta_0 - \frac{1|}{|\beta_1} - \frac{1|}{|\beta_2} - \cdot \cdot - \frac{1|}{|\beta_n}$$

d. h. ξ_0 *rational* wäre, was der Voraussetzung widerspricht. Man erhält also auf diese Weise einen *unendlichen* Kettenbruch von der Form:

$$(20) \qquad \beta_0 - \frac{1|}{|\beta_1} - \frac{1|}{|\beta_2} - \cdot \cdot - \frac{1|}{|\beta_\nu} - \cdot \cdot \cdot,$$

von dem sich schließlich zeigen läßt, daß er gegen den Wert ξ_0 konvergiert.[1]) Werden nämlich seine Näherungsbrüche wieder mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ bezeichnet, so folgt aus Gl. (19):

$$(21) \qquad \xi_0 = \frac{\xi_{\nu+1} A_\nu - A_{\nu-1}}{\xi_{\nu+1} B_\nu - B_{\nu-1}} \quad (\nu \geq 1)$$

und daher:

$$(22) \quad \xi_0 - \frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{-A_{\nu-1} B_\nu + A_\nu B_{\nu-1}}{B_\nu(\xi_{\nu+1} B_\nu - B_{\nu-1})} = \frac{-1}{B_\nu(\xi_{\nu+1} B_\nu - B_{\nu-1})} \text{ (s. Gl. (3))}$$

Da aber $\xi_{\nu+1} > 1$, also $\xi_{\nu+1} B_\nu - B_{\nu-1} > B_\nu - B_{\nu-1} > 1$ und $\lim\limits_{\nu \to \infty} B_\nu = +\infty$ (nach Gl. (1)), so folgt:

$$(23) \qquad \lim_{\nu \to \infty} \left(\xi_0 - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right) = 0$$

und somit schließlich

$$(24) \qquad \xi_0 = \beta_0 + \left[\frac{-1}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$$

Aus dem Identitätssatze von Nr. 2 ergibt sich dann noch, daß die obige Darstellung von ξ_0 durch einen *negativ-regelmäßigen* Kettenbruch die einzig mögliche dieser Art ist.

Es findet also eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen der Menge der *reellen* Zahlen und derjenigen der *unendlichen* negativ-regelmäßigen Kettenbrüche statt. Dieselbe könnte offenbar dazu dienen, um den bereits mit Hilfe der *unendlichen Systembrüche* und *regelmäßigen Kettenbrüche* gelieferten Beweis für die Äquivalenz einer gewissen reellen und komplexen Zahlenmenge (§ 71, Nr. 3, 4, S. 545 ff.; § 103, Nr. 5, S. 778) in analoger, jedoch *wesentlich vereinfachter* Weise zu führen, da ja die störende Rolle, welche bei den *Systembrüchen* die *Null* als Periodenziffer spielt, hier gänzlich wegfällt, ebenso aber auch diejenige Weitläufigkeit, welche bei Anwendung der *regelmäßigen* Kettenbrüche dadurch hervorgerufen wird, daß diese nur *irrationale* Zahlen darstellen

1) Der betreffende Kettenbruch kann also keinesfalls die Periode $-\frac{1}{2}$ besitzen, da ja anderenfalls sein Wert wieder *rational* sein müßte. Mit anderen Worten: der negativ-regelmäßige Kettenbruch für eine Irrationalzahl ξ_0 muß stets unendlich viele Teilnenner $\beta_\nu > 3$ enthalten.

§ 108. Die Bedingung $\beta_\nu \geqq 1 + \alpha_\nu$ als hinreichende für die Konvergenz von Kettenbrüchen $\left[\pm\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ mit reellen Gliedern beliebigen Vorzeichens. — Anwendung der Extension zu teilweiser Erweiterung dieser Konvergenzbedingung.

1. Die in § 106, Nr 3, S. 808, für die *Konvergenz* der Kettenbrüche von der Form: $\left[\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{-\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_2^\infty$ (wo: $\alpha_\nu > 0, \beta_\nu > 0$) als *hinreichend* erkannte Bedingung (1), S 804, nämlich: $\beta_1 > 1$, $\beta_\nu \geqq 1 + \alpha_\nu$ (für $\nu \geqq 2$), erweist sich, wie jetzt gezeigt werden soll, auch als *hinreichend* für die *Konvergenz* von Kettenbrüchen mit reellen Gliedern *beliebigen* Vorzeichens, also solchen von der Form: $\left[\frac{\varepsilon_\nu\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$, wo ε_ν ganz nach Belieben eine der beiden Zahlen ± 1 vorstellt, übrigens aus Zweckmäßigkeitsgründen wieder $\varepsilon_1 = +1$ angenommen werden soll[1]) Ferner wollen wir der Symmetrie zuliebe an Stelle der Bedingung $\beta_1 > 1$ die bisher nur für $\nu \geqq 2$ festgesetzte Bedingung auch auf den Fall $\nu = 1$ ausdehnen, sodaß also von jetzt ab:

$$\beta_\nu \geqq 1 + \alpha_\nu > 1 \quad \text{für } \nu \geqq 1. \tag{1}$$

Hierin liegt in Wahrheit keine eigentliche Beschränkung der Allgemeinheit, da ja, falls β_1 nur der Bedingung: $\beta_1 > 1$, nicht aber der Bedingung (1) genügen sollte, vermittelst der Beziehung:

$$\left[\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\varepsilon_\nu\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_2^n = \frac{\alpha_1}{\beta_1 - 1} \cdot \left[\frac{\beta_1 - 1}{\beta_1}, \frac{\varepsilon_\nu\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_2^n \tag{2}$$

die Eigenschaften des *ersten* Kettenbruches (auch für $n \to \infty$) unmittelbar aus denjenigen des *zweiten* entnommen werden können und das Anfangsglied dieses letzteren der fraglichen Bedingung genügt.

In § 106, Nr. 1, S. 805, wurde bereits gezeigt, daß unter den gemachten Voraussetzungen die Näherungsbruch-Zähler und -Nenner A_ν, B_ν durchweg *positive*, mit ν *monoton zunehmende*, also die Näherungsbrüche K_ν durchweg wohldefinierte *positive* Zahlen sind. Ferner ergab sich (S. 805/6, Ungl. (5) und (7)):

$$B_n - B_{n-1} \geqq (\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1) \cdots (\beta_n - 1) \tag{3}$$

$$B_n \geqq 1 + \sum_1^n (\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1) \cdots (\beta_\nu - 1), \tag{4}$$

---

1) Der Fall $\varepsilon_1 = -1$ läßt sich ja auf Grund der Beziehung:

$$\left[\frac{\varepsilon_\nu\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^n = \varepsilon_1 \cdot \left[\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\varepsilon_\nu\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_2^n$$

auf denjenigen eines *positiven* Anfangszählers zurückführen.

wobei das *Gleichheits*zeichen dann und nur dann gilt, wenn durchweg:

(5) $$\varepsilon_\nu = -1, \quad \beta_\nu = 1+\alpha_\nu \quad \text{für } \nu \geqq 2.$$

Da die ursprünglich nur für $\nu \geqq 2$ eingeführte Bedingung $\beta_\nu \geqq 1+\alpha_\nu$ jetzt auch für $\nu = 1$ gelten soll, sodaß also: $\beta_\nu - 1 \geqq \alpha_\nu$ für $\nu \geqq 1$, so folgt zunächst aus Ungl. (4), daß:

(6a) $$\mathsf{B}_n > 1 + \sigma_n, \quad \text{wo: } \sigma_n = \sum_1^n {}^\nu \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu,$$

mit Ausschluß der Gleichheit, möglicherweise ausgenommen den durch die Gleichungen (5) charakterisierten Fall. Wird zu diesen wiederum noch die Beziehung $\beta_1 = 1 + \alpha_1$ hinzugefügt, so ergibt sich (übereinstimmend mit Gl. (8b), S. 806, für $\beta_1 = 1 + \alpha_1$):

(6b) $$\mathsf{B}_n = 1 + \sigma_n$$

in *dem einzigen Ausnahmefalle*, welcher nunmehr durch die Bedingungen bestimmt wird:

(7) $$\varepsilon_{\nu+1} = -1, \quad \beta_\nu = 1+\alpha_\nu \quad \text{für } \nu \geqq 1.$$

Wie aus den in § 106, Nr. 4 gefundenen Ergebnissen hervorgeht (s. Gl. (27) und (30), S. 810/11), hat man in diesem besonderen Falle:

(8) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{A}_n}{\mathsf{B}_n} \begin{cases} = \dfrac{\sigma}{1+\sigma}, & \text{wenn: } \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma, \\ = 1, & \text{wenn: } \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty, \end{cases}$$

mit anderen Worten, der Kettenbruch $\left[\dfrac{\alpha_1}{1+\alpha_1}, \dfrac{-\alpha_\nu}{1+\alpha_\nu}\right]_2^\infty$ konvergiert gegen den Wert $\dfrac{\sigma}{1+\sigma} < 1$ oder 1, je nachdem die Reihe $\sum_1^\infty {}^\nu \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu$ gegen den Wert σ *konvergiert* oder *divergiert*.

Zur Behandlung des allgemeinen Falles gehen wir von der (mit Rücksicht auf: $\mathsf{A}_0 = 0$) bestehenden Identität aus:

(9) $$\left[\frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^n = \frac{\mathsf{A}_n}{\mathsf{B}_n} = \sum_1^n {}^\nu \left(\frac{\mathsf{A}_\nu}{\mathsf{B}_\nu} - \frac{\mathsf{A}_{\nu-1}}{\mathsf{B}_{\nu-1}}\right),$$

welche mit Benützung der Differenzenformel (VII) von § 92, Nr. 2, S. 697, in die folgende Beziehung übergeht:

(10) $$\frac{\mathsf{A}_n}{\mathsf{B}_n} = \sum_1^n {}^\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\varepsilon_1 \alpha_1 \cdot \varepsilon_2 \alpha_2 \cdots \varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\mathsf{B}_{\nu-1} \mathsf{B}_\nu}.$$

Man findet daher:

(11) $$\left[\frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{A}_n}{\mathsf{B}_n} = \sum_1^\infty {}^\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\varepsilon_1 \alpha_1 \cdot \varepsilon_2 \alpha_2 \cdots \varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\mathsf{B}_{\nu-1} \mathsf{B}_\nu},$$

sofern die betreffende unendliche Reihe *konvergiert*. Nun folgt aus Ungl (3), daß:

$$(12) \qquad B_\nu - B_{\nu-1} \geq \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu,$$

wobei das *Gleichheits*zeichen *auszuschließen* ist, wenn die Bedingungen (7) für $\nu = 1, 2, \cdots n$ *nicht ausnahmslos* erfüllt sind. Da der *besondere* Fall ihrer für *jedes noch so große n ausnahmslosen* Geltung bereits erledigt ist, so ergibt sich in dem jetzt behandelten *allgemeinen* Falle:

$$(13) \quad \left|\sum_1^n {}_\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\varepsilon_1 \alpha_1 \cdot \varepsilon_2 \alpha_2 \cdots \varepsilon_\nu \alpha_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu}\right| \leq \sum_1^n {}_\nu \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu} < \sum_1^n {}_\nu \frac{B_\nu - B_{\nu-1}}{B_{\nu-1} B_\nu},$$

und zwar zum mindesten bei hinlänglicher Vergrößerung von n mit sicherem *Ausschluß der Gleichheit*. Und, was wesentlich ist, diese *Ungleichheit* kann bei weiterer Vergrößerung von n, insbesondere auch für $n \longrightarrow \infty$ niemals aufgehoben werden, da ja die betreffende Summe bzw. unendliche Reihe mindestens *ein* Glied enthält, für welches die *Ungleichung* besteht:

$$(14) \quad B_\nu - B_{\nu-1} > \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu, \text{ also: } \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu} < \frac{B_\nu - B_{\nu-1}}{B_{\nu-1} B_\nu} = \frac{1}{B_{\nu-1}} - \frac{1}{B_\nu}.$$

Somit ergibt sich aus Ungl. (13) für $n \to \infty$

$$(15) \quad \sum_1^\infty {}_\nu \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu} < \sum_1^\infty {}_\nu \left(\frac{1}{B_{\nu-1}} - \frac{1}{B_\nu}\right) = 1 - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{B_n}, \text{ d. h. } < 1$$

mit Ausschluß der Gleichheit, und zwar unabhängig davon, ob der Grenzwert $\lim_{n \to \infty} B_n$ *endlich* oder *unendlich groß* ausfällt, also auch unabhängig davon, ob die Reihe $\sum_1^\infty {}_\nu \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu$ *konvergiert* oder *divergiert*. Daraus folgt weiter, daß die in Gl. (11) auftretende Reihe *absolut konvergiert* und daß in jedem Falle ihr *Absolutwert kleiner* als 1 ist, daß also der betreffende unendliche Kettenbruch gleichfalls *konvergiert* und, da die Näherungsbrüche, wie bemerkt, durchweg *positiv* sind, sein Wert zwischen 0 und 1 liegt.

Zugleich erkennt man, daß die *Konvergenz* des Kettenbruches eine *unbedingte* ist, da ja die vorstehenden Schlüsse auch auf jeden durch Weglassung von Anfangsgliedern aus dem gegebenen hervorgehenden Kettenbruch sich ohne weiteres übertragen lassen.

Hiernach gewinnt man den folgenden Satz, welcher den wesentlichsten Teil des am Schlusse von § 106, S. 812, ausgesprochenen als speziellen Fall enthält:

Ist:

$$(16)\qquad \varepsilon_1 = +1,\ \alpha_1 > 0,\ \varepsilon_{\nu+1} = \pm 1,\quad \beta_\nu \geqq 1 + \alpha_\nu > 1 \quad (\text{für } \nu \geqq 1),$$

so ist der Kettenbruch $\left[\frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ *unbedingt konvergent und sein Wert liegt zwischen* 0 *und* 1, *außer wenn durchweg:*

$$\varepsilon_{\nu+1} = -1,\quad \beta_\nu = 1 + \alpha_\nu > 1 \quad (\text{für } \nu \geqq 1),$$

und überdies die Reihe $\sum_1^\infty {}^\nu\, \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu$ *divergiert, in welchem Falle der Kettenbruch den Wert* 1 *hat.*[1])

2. Es verdient hervorgehoben zu werden, daß Kettenbrüche der eben betrachteten Art durch *Extension* sich in solche mit lauter *positiven Teilzählern* und *nicht-negativen Teilnennern* überführen lassen. Ist etwa m der kleinste Index, für welchen $\varepsilon_{m+1} = -1$ $(m \geqq 1)$, sodaß also:

$$(17\text{a})\qquad \frac{\varepsilon_m \alpha_m |}{| \beta_m} + \frac{\varepsilon_{m+1} \alpha_{m+1} |}{| \beta_{m+1}} = \frac{\alpha_m |}{| \beta_m} - \frac{\alpha_{m+1} |}{| \beta_{m+1}},$$

so hat man bei Anwendung der Extensionsformel (19) von § 96, Nr. 3, S. 723, wenn man der daselbst mit a' bezeichneten Zahl den Wert 1 beilegt, diese zwei Glieder durch die folgenden drei zu ersetzen:

$$(17\text{b})\qquad \frac{\alpha_m |}{| \beta_m - 1} + \frac{1 |}{| 1} + \frac{\alpha_{m+1} |}{| \beta_{m+1} - \alpha_{m+1}},\quad \text{wo:}\ \begin{cases} \beta_m - 1 \geqq \alpha_m, \\ \beta_{m+1} - \alpha_{m+1} \geqq 1. \end{cases}$$

Dabei bestimmt sich der Wert Γ des auf diese Weise zwischen $\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}$ und $\frac{A_m}{B_m}$ eingeschalteten Näherungsbruches aus der Gleichung:

$$(18)\qquad \frac{B_m \Gamma - A_m}{B_{m-1} \Gamma - A_{m-1}} = 1,\ \text{d. h. es ist:}\ \Gamma = \frac{A_m - A_{m-1}}{B_m - B_{m-1}}.$$

Ist nun $\varepsilon_{m+2} = +1$, so wird bei weiterer Fortsetzung dieses lediglich zur Beseitigung *negativer* Glieder dienlichen Extensionsverfahrens das

1) Das obige Konvergenzkriterium ist lediglich ein spezieller Fall eines allgemeineren auf Kettenbrüche mit beliebigen komplexen Gliedern sich beziehenden (s. § 113, Nr. 4, Zusatz). Das gleiche gilt übrigens von dem Konvergenzkriterium für Kettenbrüche der ersten Hauptform mit *positiven* Gliedern (§ 102, Nr. 2, Satz II, S. 764; vgl § 111 Nr. 3, S. 858). Es erschien indessen zweckmäßig, diese spezielleren Sätze, mit eigenen entsprechend vereinfachten Beweisen versehen, voranzuschicken, statt sie erst späterhin aus den angezeigten allgemeineren abzuleiten, teils des leichteren Verständnisses halber, teils wegen der daran anzuknüpfenden, ausschließlich auf *reelle* Zahlen bezüglichen Betrachtungen.

Glied $\frac{\alpha_{m+1}}{|\beta_{m+1}-\alpha_{m+1}}\Big|$, da ihm bereits ein *positives* Glied folgt, nicht mehr in Anspruch genommen. Ist dagegen $\varepsilon_{m+2}=-1$, also:

$$(19\,\mathrm{a})\qquad \frac{\alpha_{m+1}\;|}{|\beta_{m+1}-\alpha_{m+1}}+\frac{\varepsilon_{m+2}\,\alpha_{m+2}|}{|\;\beta_{m+2}}=\frac{\alpha_{m+1}\;|}{|\beta_{m+1}-\alpha_{m+1}}-\frac{\alpha_{m+2}}{|\beta_{m+2}},$$

so liefert das gleiche Extensionsverfahren an Stelle dieser zwei Glieder die folgenden drei:

$$(19\,\mathrm{b})\qquad \frac{\alpha_{m+1}\;|}{|\beta_{m+1}-\alpha_{m+1}-1}+\frac{1|}{|1}+\frac{\alpha_{m+2}\;|}{|\beta_{m+2}-\alpha_{m+2}},\quad \text{wo:}\ \begin{cases}\beta_{m+1}-\alpha_{m+1}-1\geqq 0,\\ \beta_{m+2}-\alpha_{m+2}\geqq 1,\end{cases}$$

und der eingeschaltete Näherungsbruch hat wiederum den entsprechenden Wert $\frac{A_{m+1}-A_m}{B_{m+1}-B_m}$. Da jetzt auf das Glied $\frac{\alpha_{m+1}\;|}{|\beta_{m+1}-\alpha_{m+1}-1}$ ein *positives* folgt, so ist es bei Fortsetzung dieses Verfahrens gegen jede weitere Veränderung gesichert. Im übrigen ist ersichtlich, daß man dem Kettenbruche $\left[\frac{\varepsilon_\nu\,\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ vermittelst hinlänglicher bzw. unbegrenzter Fortsetzung des beschriebenen Prozesses einen *extendierten* zuordnen kann, der außer den sämtlichen Näherungsbrüchen $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ noch eine (eventuell unbegrenzte) Anzahl *eingeschalteter* Näherungsbrüche von der Form $\frac{A_\nu-A_{\nu-1}}{B_\nu-B_{\nu-1}}$ besitzt und dessen Teilbrüche folgende Formen aufweisen:

$$\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu},\quad \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu-1},\quad \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu-\alpha_\nu},\quad \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu-\alpha_\nu-1},\quad \frac{1}{1},$$

wo: $\beta_\nu-1>0$, $\beta_\nu-\alpha_\nu>0$, $\beta_\nu-\alpha_\nu-1\geqq 0$. Und zwar erscheint als Teilnenner:

$$(20)\qquad \begin{cases} (\mathrm{a})\ \ \beta_\nu, & \text{wenn: } \varepsilon_\nu=+1,\ \varepsilon_{\nu+1}=+1,\\ (\mathrm{b})\ \ \beta_\nu-1>0, & \quad\text{„}\quad \varepsilon_\nu=+1,\ \varepsilon_{\nu+1}=-1,\\ (\mathrm{c})\ \ \beta_\nu-\alpha_\nu>0, & \quad\text{„}\quad \varepsilon_\nu=-1,\ \varepsilon_{\nu+1}=+1,\\ (\mathrm{d})\ \ \beta_\nu-\alpha_\nu-1\geqq 0, & \quad\text{„}\quad \varepsilon_\nu=-1,\ \varepsilon_{\nu+1}=-1.\end{cases}$$

3. Der *extendierte* Kettenbruch enthält Glieder mit dem Teilnenner *Null* (und zwar eventuell in unbegrenzter Anzahl), wenn überhaupt der Fall (20 d) eintritt, d. h. wenn in dem ursprünglichen Kettenbruche Folgen von mindestens zwei *negativen* Gliedern $\frac{-\alpha_\nu}{\beta_\nu}$, $\frac{-\alpha_{\nu+1}}{\beta_{\nu+1}}$ vorkommen, und wenn überdies $\beta_\nu=1+\alpha_\nu$ ist. Der Charakter des *extendierten* Kettenbruches würde daher keine *prinzipielle* Änderung erleiden, wenn auch im Falle (20 c) die analoge Möglichkeit (nämlich: $\beta_\nu-\alpha_\nu=0$) vorläge, wenn man also β_ν, falls $\varepsilon_{\nu+1}=1$, lediglich der Bedingung: $\beta_\nu\geqq\alpha_\nu$ unterwürfe. Dies führt aber unmittelbar zu der folgenden Erweiterung des zuvor gewonnenen Ergebnisses:

Ist.

$$(21)\quad \varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_{\nu+1} = \pm 1, \quad \left.\begin{array}{l}\beta_\nu \geqq \alpha_\nu \\ \beta_\nu \geqq 1 + \alpha_\nu, \text{ wenn } \varepsilon_{\nu+1} = -1\end{array}\right\} (\nu \geqq 1),$$

so läßt sich der Kettenbruch $(\mathsf{K}_\infty) \equiv \left[\frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ *durch Extension in einen anderen* $(\mathsf{K}'_\infty) \equiv \left[\frac{\alpha'_\mu}{\beta'_\mu}\right]_1^\infty$ *mit lauter positiven Teilzählern (nämlich* α_ν *und* 1) *und positiven bzw. nicht negativen Teilnennern (nämlich* β_ν, $\beta_\nu - 1$, 1, *bzw.* $\beta_\nu - \alpha_\nu$, $\beta_\nu - \alpha_\nu - 1$) *überführen* (s. im übrigen die näheren Bestimmungen (20), mit der Modifikation, daß im Falle (c) jetzt $\beta_\nu - \alpha_\nu \geqq 0$ zu setzen ist).[1])

In bezug auf das Bildungsgesetz des *extendierten* Kettenbruches sei noch folgendes hervorgehoben. Die einem beliebigen Gliede von (K_∞) *vorangehenden* Glieder haben auf dessen Ersatzform in (K'_∞) keinerlei Einfluß. Ein *positives* Glied $\frac{\alpha_\nu|}{|\beta_\nu}$ erscheint im *extendierten* Kettenbruche entweder *unverändert* oder durch $\frac{\alpha_\nu|}{|\beta_\nu - 1} + \frac{1|}{|1}$ ersetzt. Der *erste* Fall tritt ein, wenn $\varepsilon_{\nu+1} = +1$, der *zweite*, wenn $\varepsilon_{\nu+1} = -1$, also: $\beta_\nu \geqq 1 + \alpha_\nu$ und daher: $\beta_\nu - 1 > 0$. In diesem *zweiten* Falle erzeugt also das Glied $\frac{\alpha_\nu|}{|\beta_\nu}$ in (K'_∞) *zwei* konsekutive Glieder mit wesentlich *positivem* Nenner. Die weitere Verfolgung des *ersten* Falles ergibt, daß das in (K_∞) auf $\frac{\alpha_\nu|}{|\beta_\nu}$ folgende (wegen $\varepsilon_{\nu+1} = +1$) *positive* Glied $\frac{\alpha_{\nu+1}|}{|\beta_{\nu+1}}$ in (K'_∞) wieder entweder *unverändert* erscheint oder durch $\frac{\alpha_{\nu+1}|}{|\beta_{\nu+1} - 1} + \frac{1|}{|1}$ ersetzt wird, wobei dann wieder $\beta_{\nu+1} - 1 > 0$. Also auch hier folgt in (K'_∞) auf das (mit $\frac{\alpha_\nu|}{|\beta_\nu}$ identische) Ersatzglied von $\frac{\alpha_\nu|}{|\beta_\nu}$ wiederum noch ein weiteres Glied mit wesentlich *positivem* Nenner. ***Es entspricht mithin in jedem Falle einem positiven Gliede von*** (K_∞) ***in dem extendierten Kettenbruche*** (K'_∞) ***ein Glied mit wesentlich positivem Nenner, dem noch ein weiteres Glied mit wesentlich positivem Nenner folgt.***

Da ja $\varepsilon_1 = +1$ vorausgesetzt wurde, also (K_∞) mit einem *positiven* Gliede beginnt, so ergibt sich insbesondere, daß die *beiden ersten* Teilnenner von (K'_∞) stets wesentlich *positiv* sind. Infolgedessen sind nach § 100, Nr. 4, S. 751, die Näherungsbruch-Zähler und -Nenner A'_μ, B'_μ

---

1) Als Ersatz für ein *negatives* Glied $\frac{-\alpha_\nu|}{|\beta_\nu}$ erscheint entweder: $\frac{\alpha_\nu|}{|\beta_\nu - \alpha_\nu}$ oder $\frac{\alpha_\nu|}{|\beta_\nu - \alpha_\nu - 1} + \frac{1|}{|1}$, nämlich je nachdem $\varepsilon_{\nu+1} = +1$ oder $\varepsilon_{\nu+1} = -1$.

von (K'_∞) durchweg *positive* (übrigens mit wachsendem Index *monoton zunehmende*) Zahlen, und *das gleiche gilt daher von den* A_ν, B_ν, welche ja sämtlich unter den A'_μ, B'_μ vorkommen.

4. Um aus der Beschaffenheit von (K'_∞) einen Schluß auf die etwaige Konvergenz von (K_∞) zu ziehen, beachte man, daß ganz allgemein die *Konvergenz* eines *beliebigen*, durch *Extension* aus *irgendeinem* anderen hervorgegangenen Kettenbruches stets die *Konvergenz* und *Gleichwertigkeit* des *erzeugenden* Kettenbruches nach sich ziehen muß, da ja die sämtlichen Näherungsbrüche des letzteren als *Teilfolge* in der Näherungsbruchfolge des extendierten Kettenbruches enthalten sind. Das analoge gilt offenbar, falls der *extendierte* Kettenbruch *außerwesentlich divergiert.* Dagegen kann jene *Teilfolge* sehr wohl einen *endlichen Grenzwert* (bzw. die Folge der reziproken Werte den Grenzwert *Null*) besitzen, ohne daß der (noch um die *eingeschalteten* Näherungsbrüche bereicherten) *Gesamtfolge* diese Eigenschaft zukommt. Hiernach kann also insbesondere, auch wenn der *extendierte* Kettenbruch *wesentlich divergiert* (also *oszilliert*), der *erzeugende* immerhin noch *konvergieren* (bzw. *außerwesentlich divergieren*), und zwar muß sein *Wert* dann stets unter den *Häufungszahlen* der *Gesamtfolge* (bzw. die *Null* unter den Häufungszahlen der reziprok genommenen Glieder der Gesamtfolge) enthalten sein.

Über diese allgemeingültige Feststellung hinaus, nach welcher die *Konvergenz* des *extendierten* Kettenbruches als eine *hinreichende* Bedingung für diejenige des *erzeugenden* erscheint, lassen sich in dem vorliegenden Falle noch die folgenden spezielleren Aussagen machen. Nach § 102, Nr. 5, S. 769, kann der *extendierte* Kettenbruch als ein solcher, dessen *zwei erste* Teilnenner *wesentlich positiv*, während die übrigen zum mindesten *nicht-negativ* sind, nur *konvergieren* oder zwischen zwei endlichen Zahlen $\underline{K}$ und $\overline{K}$ in *der* Weise *oszillieren*, daß für die Näherungsbrüche andere Häufungszahlen außer diesen beiden *Hauptlimites* nicht vorhanden sind. Mithin bleiben für den *erzeugenden* Kettenbruch nur die beiden Möglichkeiten, daß seine Näherungsbrüche gleichfalls jene *zwei* Limites (und keine anderen) oder nur *einen* von ihnen besitzen, er selbst kann also gleichfalls nur zwischen jenen beiden Zahlen $\underline{K}$ und $\overline{K}$ *oszillieren* oder gegen *eine* derselben *konvergieren.* Es wird sich aber sogar noch zeigen, daß, abgesehen von einem besonderen Falle, der *ursprüngliche* und der *extendierte* Kettenbruch stets *gleichseitig konvergieren* bzw. *gleichseitig oszillieren*, sodaß dann schließlich die *Konvergenz* des *extendierten* Kettenbruches auch als *notwendige* Bedingung für diejenige des ursprünglichen erscheint.

5. Wir gehen zunächst von der Voraussetzung aus, daß der den Bedingungen (21) genügende Kettenbruch *unendlich viele positive* Glieder enthält. Sind von einer gewissen Stelle $\nu \geqq m$ ab *alle* Teilzähler *positiv*, so hört ja das Extensionsverfahren bei dieser Stelle vollständig auf, der *extendierte* Kettenbruch verläuft also von da ab durchaus *identisch* mit dem *ursprünglichen*, das nämliche gilt dann auch für die *Näherungsbrüche*, und somit *konvergieren* bzw. *divergieren* beide Kettenbrüche stets *gleichzeitig*. Im übrigen ist für die *Konvergenz* beider Kettenbrüche dann *notwendig* und *hinreichend*, daß der Kettenbruch $\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_m^\infty$ *konvergiert*, da ja in diesem Falle der *extendierte* Kettenbruch *höchstens außerwesentlich* divergieren könnte, was aber nach Satz (VI) von § 102, Nr. 5, S. 771, endgültig ausgeschlossen ist.

Zur Behandlung des allgemeinen Falles, daß der Kettenbruch *unendlich viele* Glieder *beiderlei* Vorzeichens enthält, schicken wir die folgende Bemerkung voraus.

Es seien γ, δ, γ', δ' beliebige positive Zahlen[1]) von der Beschaffenheit, daß:

$$\frac{\gamma}{\delta} < \frac{\gamma'}{\delta'}, \tag{22}$$

so folgt durch Multiplikation dieser Ungleichung mit δ bzw. δ':

$$\delta \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \gamma < \delta \cdot \frac{\gamma'}{\delta'}$$

$$\delta' \cdot \frac{\gamma}{\delta} < \gamma' = \delta' \cdot \frac{\gamma'}{\delta'}.$$

Multipliziert man die erste dieser Beziehungen mit einer beliebigen positiven Zahl ϱ, die zweite mit einer ebensolchen ϱ', so ergibt sich durch Addition:

$$(\varrho\delta + \varrho'\delta') \cdot \frac{\gamma}{\delta} < \varrho\gamma + \varrho'\gamma' < (\varrho\delta + \varrho'\delta') \cdot \frac{\gamma'}{\delta'}$$

und daher:

$$\frac{\gamma}{\delta} < \frac{\varrho\gamma + \varrho'\gamma'}{\varrho\delta + \varrho'\delta'} < \frac{\gamma'}{\delta'}. \tag{23}$$

Angenommen nun, der unendlich viele Glieder *beiderlei* Vorzeichens enthaltende Kettenbruch $\left[\frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ konvergiere gegen einen gewissen Wert K. Dann ist nur zu zeigen, daß außer den Näherungsbrüchen $\frac{\mathsf{A}_\nu}{\mathsf{B}_\nu}$ auch die infolge der Extension eingeschalteten Näherungsbrüche $\frac{\mathsf{A}_\nu - \mathsf{A}_{\nu-1}}{\mathsf{B}_\nu - \mathsf{B}_{\nu-1}}$ für

---

1) Die folgende Schlußweise gilt auch noch im Falle $\gamma = 0$, in welchem übrigens die Richtigkeit des Endresultates (23) auch unmittelbar ersichtlich ist.

$\nu \to \infty$ gleichfalls gegen den Wert K konvergieren Versteht man unter ν einen der (unendlich vielen) Indizes, bei denen ein Zeichenwechsel vom *positiven* zum *negativen* stattfindet, sodaß also:

$$\varepsilon_\nu = +1, \ \varepsilon_{\nu+1} = -1 \text{ und daher: } \beta_\nu \geqq 1 + \alpha_\nu,$$

so findet man durch Anwendung der Rekursionsformeln für A_ν, B_ν:

$$(24) \qquad \frac{A_\nu - A_{\nu-1}}{B_\nu - B_{\nu-1}} = \frac{(\beta_\nu - 1)A_{\nu-1} + \alpha_\nu A_{\nu-2}}{(\beta_\nu - 1)B_{\nu-1} + \alpha_\nu B_{\nu-2}} \quad (\text{wo: } \beta_\nu - 1 > 0),$$

und man erkennt daher mit Benützung der Ungleichung (23), daß der Wert des rechtsstehenden Ausdruckes, also auch derjenige von $\frac{A_\nu - A_{\nu-1}}{B_\nu - B_{\nu-1}}$ zwischen $\frac{A_{\nu-2}}{B_{\nu-2}}$ und $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$ liegt. Andererseits kann man aber auf Grund der gemachten Voraussetzungen durch hinlängliche Vergrößerung von ν bei beliebig klein vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$ erzielen, daß $\frac{A_{\nu-2}}{B_{\nu-2}}$ und $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$ beide zwischen $K - \varepsilon$ und $K + \varepsilon$ liegen. Das gleiche gilt dann also insbesondere auch von $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$ und $\frac{A_\nu - A_{\nu-1}}{B_\nu - B_{\nu-1}}$ und, da dies zwei *konsekutive* Näherungsbrüche des *extendierten* Kettenbruches (K'_∞) sind (s. Gl. (18)), auch von *jedem folgenden* Näherungsbruche des letzteren (vgl. § 102, Nr. 5, Ungl (19), S. 769): somit *konvergiert* (K'_∞) gleichfalls gegen den Wert K. Hiernach sind also die Kettenbrüche (K_∞) und (K'_∞) *gleichseitig konvergent* bzw. *divergent.*

Es bleibt schließlich noch der Fall zu betrachten, daß der Kettenbruch (K_∞) (dessen *Anfangsglied* ja allemal als *positiv* vorausgesetzt wurde) nur eine *endliche* Anzahl von *positiven* Gliedern enthält, sodaß also von einer gewissen Stelle ab durchweg: $\varepsilon_\nu = -1$ ist. Sei dann etwa $\varepsilon_m \alpha_m$ der *letzte positive* Teilzähler, so hat man auf Grund der in Betracht kommenden Bedingung (21): $\beta_\nu \geqq 1 + \alpha_\nu$ für $\nu \geqq m$, und der Kettenbruch: $\left[\frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ ist daher nach dem Satze von § 106, Nr. 4, S. 812, *konvergent,* sein Wert *negativ* und numerisch *höchstens* gleich $\frac{\alpha_{m+1}}{\beta_{m+1} - 1} \leqq 1$. Wird derselbe mit $-\varrho_{m+1}$ bezeichnet, so findet man für $m \geqq 2$[1]) mit Hilfe des „Hauptsatzes" von § 99, Nr. 2, S. 744:

$$(25) \qquad \begin{aligned} K_\infty &= \frac{\varepsilon_1 \alpha_1|}{|\beta_1} + \cdots + \frac{\varepsilon_{m-1}\alpha_{m-1}|}{|\beta_{m-1}} + \frac{\alpha_m|}{|\beta_m - \varrho_{m+1}} \\ &= \frac{(\beta_m - \varrho_{m+1})A_{m-1} + \alpha_m A_{m-2}}{(\beta_m - \varrho_{m+1})B_{m-1} + \alpha_m B_{m-2}}, \end{aligned}$$

1) Im Falle $m = 1$ ist ja $\beta_\nu \geqq 1 + \alpha_\nu$ für $\nu \geqq 1$, und der Kettenbruch.

$$(K_\infty) \equiv \left[\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{-\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_2^\infty$$

erweist sich unmittelbar nach dem Satze von § 106, Nr. 4 als *konvergent.*

falls dieser Ausdruck eine bestimmte Zahl vorstellt, was aber sicher der Fall ist, da ja: $\beta_m - \varrho_{m+1} > 0$ und: $B_{m-1} > B_{m-2} > 0$ (s Nr. 3 am Ende). Unter der gemachten Voraussetzung ist also der gegebene Kettenbruch *in jedem Falle konvergent*, das Verhalten des *extendierten* Kettenbruches hat darauf keinerlei Einfluß. Dagegen kann dieser letztere hier unter gewissen Umständen *divergieren (oszillieren)*, nämlich dann, wenn die Näherungsbruch-Nenner des Kettenbruches: $\left[\frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_m^\infty = \left[\frac{\alpha_m}{\beta_m}, \frac{-\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ einen *endlichen* Grenzwert besitzen (vgl. § 106, Nr 3, S 809), also auch $\lim\limits_{n\to\infty} B_n$ *endlich* ausfällt In diesem Falle besteht ja, wie die a. a. O. angestellten Betrachtungen zeigen, im allgemeinen *keine* Übereinstimmung zwischen dem Grenzwerte der *Näherungsbrüche* $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ und demjenigen der *Nebennäherungsbrüche* $\frac{A_\nu - A_{\nu-1}}{B_\nu - B_{\nu-1}}$, welche letztere hier als *eingeschaltete Näherungsbrüche* des *extendierten* Kettenbruches erscheinen, sodaß also dieser letztere *oszilliert*

Hiernach ergibt sich jetzt der folgende Satz.

Enthält der den Bedingungen (21), *nämlich*

$$\varepsilon_1 = +1, \; \varepsilon_{\nu+1} = \pm 1 \quad \left.\begin{array}{l} \beta_\nu \geq \alpha_\nu \\ \beta_\nu > 1 + \alpha_\nu, \; \textit{wenn: } \varepsilon_{\nu+1} = -1 \end{array}\right\} (\nu > 1)$$

genügende Kettenbruch $\left[\frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ *unendlich viele positive Glieder, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für seine Konvergenz in der Konvergenz des (nach der Vorschrift von Nr. 2) extendierten Kettenbruches. Enthält er dagegen von einer gewissen Stelle ab nur noch negative Glieder, so konvergiert er ohne irgendwelche weitere Beschränkung in jedem Falle, während die Konvergenz des extendierten Kettenbruches nur gesichert ist, falls* $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = +\infty$

6. Das Vorstehende läßt sich noch durch die folgende Aussage vervollständigen:

Ist der den Bedingungen (21) *genügende Kettenbruch überhaupt konvergent, so konvergiert er unbedingt. Sein Wert* K *liegt zwischen* 0 *und* 1, *außer wenn durchweg:*

$$\varepsilon_{\nu+1} = -1, \; \beta_\nu = 1 + \alpha_\nu \quad (\nu \geq 1) \tag{26}$$

$$\textit{und außerdem: } \sum_1^\infty {}_\nu \, \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu = +\infty,$$

in welchem Falle $K = 1$ *wird.*

Beweis. Enthält der Kettenbruch (K_∞) unendlich viele *positive* Glieder, so *konvergiert* er stets *gleichzeitig* mit dem *extendierten* Kettenbruche $(K'_\infty) \equiv \left[\frac{\alpha'_\mu}{\beta'_\mu}\right]_1^\infty$. Dieser letztere konvergiert aber sicher *unbedingt.* Denn *wesentliche* Divergenz irgendeines durch Weglassung von Anfangsgliedern daraus hervorgehenden Kettenbruches $\left[\frac{\alpha'_\mu}{\beta'_\mu}\right]_{m'}^\infty$ ist ja (nach § 98, Nr. 5, S. 739) von vornherein ausgeschlossen. Aber auch *außerwesentliche* Divergenz ist *unmöglich,* da ja die nach Satz (VI) von § 102, Nr 5, S 771, hierzu erforderliche Bedingung: $0 = \beta_{m'} = \beta_{m'+2} = \beta_{m'+4} = \cdots$ niemals erfüllt sein kann: denn da (K_∞) unendlich viele *positive* Glieder enthalten sollte, so gibt es in (K'_∞) auf Grund einer in Nr. 3 gemachten Bemerkung unendlich viele Folgen von mindestens zwei Gliedern mit *wesentlich positiven* Teilnennern Aus der *unbedingten* Konvergenz von (K'_∞) folgt aber auch diejenige von (K_∞) Denn der einem Kettenbruche von der Form: $\left[\frac{\alpha_m}{\beta_m}, \frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_{m+1}^\infty \equiv \varepsilon_m \cdot \left[\frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_m^\infty$ zugeordnete *extendierte* Kettenbruch ist ja, wenn $\varepsilon_m = +1$, mit dem entsprechenden, bereits als *konvergent* erkannten Restkettenbruch von (K'_∞) vollkommen identisch und zeigt im Falle $\varepsilon_m = -1$ nur in bezug auf das erste Glied eine Abweichung, welche indessen die *Konvergenz* nicht beeinträchtigen kann, da ja alle Divergenzmöglichkeiten aus denselben Gründen wie oben wieder ausgeschlossen sind. Da überdies der Wert K' von (K'_∞) nach § 102 Nr. 5, Satz (VII), S. 772, der Beziehung genügt: $0 < K' < \frac{\alpha'_1}{\beta'_1}$ (und zwar mit definitivem Ausschluß der *Gleichheit,* da: $\beta'_1 > 0$, $\beta'_2 > 0$ ist und wegen des Vorhandenseins unendlich vieler *positiver* β_ν nicht für $\mu \geqq 1$ durchweg $\beta'_{2\mu+1} = 0$ sein kann), so folgt mit Berücksichtigung von: $\beta'_1 \geqq \alpha'_1$ (nämlich entweder: $\beta'_1 = \beta_1 \geqq \alpha_1$, wenn $\varepsilon_2 = +1$, oder: $\beta'_1 = \beta_1 - 1 \geqq \alpha_1$, wenn $\varepsilon_2 = -1$) schließlich, wie behauptet:

$$(27) \qquad 0 < K < 1,$$

und die entsprechende Ungleichung ergibt sich durch analoge Schlußweise auch für jeden durch Weglassung von Anfangsgliedern entstandenen Kettenbruch: $\left[\frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_m^\infty$ $(m > 1)$.

Enthält der Kettenbruch (K_∞) von einer gewissen Stelle ab, etwa für $\nu \geqq m + 1$, nur noch *negative* Glieder, sodaß also für $\nu \geqq m$ die Bedingung: $\beta_\nu \geqq 1 + \alpha_\nu$ besteht, so ist zunächst nach dem Satze von § 106, Nr. 4, S. 812, der Kettenbruch $\left[\frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_m^\infty$ *unbedingt* konvergent. Er bleibt aber, wie am Schlusse von Nr. 4 gezeigt wurde, auch *konvergent,*

wenn man die Anfangsglieder mit den Indizes $1 \leqq \nu \leqq m-1$ hinzufügt, und da die a. a. O. benützte Schlußweise gültig bleibt, wenn man nur einen beliebigen *Teil* dieser Gliederfolge mit den Indizes $\nu = m-1$, $m-2, \cdots$ vorn ansetzt, so folgt, daß auch der Kettenbruch $\left[\frac{s_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ *unbedingt* konvergiert. Sein Wert K ist dann wieder gleich dem Werte K′ des zugehörigen *extendierten* Kettenbruches, falls dieser *konvergiert*, oder auch gleich einem der beiden Oszillationswerte $\underline{K}'$ und $\overline{K}'$, falls er *divergiert* (was ja im vorliegenden Falle möglich ist). Nun liegen ja nach Satz (VII) von § 102, S. 772, K′ bzw. $\underline{K}'$ und $\overline{K}'$ im allgemeinen wieder zwischen 0 und $\frac{\alpha_1'}{\beta_1'}$, also schließlich zwischen 0 und 1. Von den allenfalls möglichen Grenzfällen der *Gleichheit* ist die Möglichkeit des einen, nämlich $K' = 0$ bzw $\underline{K}' = 0$ ausgeschlossen, da die hierfür erforderliche Bedingung: $\beta_{2\mu}' = 0$ für $\mu = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ wegen $\beta_2' > 0$ unerfüllbar ist. Die Bedingungen für den anderen Grenzfall: $K' = \frac{\alpha_1'}{\beta_1'}$ bzw. $\overline{K}' = \frac{\alpha_1'}{\beta_1'}$ lauten (s. Gl. (26b), (27), S 772):

(28) $\beta_{2\mu+1}' = 0$ $(\mu = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ und für den Fall der *Konvergenz:*

$$\sum_1^\infty {}_\mu \frac{\alpha_1 \alpha_3 \cdots \alpha_{2\mu-1}}{\alpha_2 \alpha_4 \cdots \alpha_{2\mu}} \cdot \beta_{2\mu} = +\infty.$$

Der ersten dieser Bedingungen kann nur genügt werden, wenn der Kettenbruch $\left[\frac{s_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ außer dem Anfangsgliede kein weiteres *positives* Glied enthält. Denn wäre schon $s_2 = +1$, so würde außer $\beta_2' > 0$ auch $\beta_3' > 0$ ausfallen. Und wäre irgendein späteres $s_\nu = +1$, so würde ja das betreffende Glied $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ das Auftreten von *zwei konsekutiven* Gliedern mit *wesentlich positiven* Nennern im *extendierten* Kettenbruche nach sich ziehen. Soll also die erste der Bedingungen (28) erfüllt sein, so ist das nur möglich, wenn: $(K_\infty) = \left[\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{-\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_2^\infty$, woraus weiter folgt, daß schon für $\nu \geqq 1$ durchweg $\beta_\nu \geqq 1 + \alpha_\nu$ sein muß. Steht dies aber einmal fest, so wissen wir bereits, daß *dieser* Kettenbruch *dann* und *nur* dann den Wert 1 hat, wenn (übereinstimmend mit (26)):

$$\beta_\nu = 1 + \alpha_\nu \text{ für } jedes\ \nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots \text{ und: } \sum_1^\infty {}_\nu \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu = +\infty.$$

Man kann sich dann der Vollständigkeit zuliebe noch davon überzeugen, daß in diesem Falle die Bedingungen (28) wirklich erfüllt sind. Denn der Kettenbruch $\left[\frac{\alpha_1}{\cdot}, \frac{-\alpha_\nu}{\cdot}\right]^\infty$ liefert durch Extension den folgenden:

$$\frac{\alpha_1|}{|\alpha_1} + \frac{1|}{|1} + \frac{\alpha_2|}{|0} + \frac{1|}{|1} + \frac{\alpha_3|}{|0} + \frac{1|}{|1} + \cdots,$$

sodaß also in der Tat $\beta'_{2\mu+1} = 0$ (für $\mu = 1, 2, 3, \cdots$) und außerdem: $\beta_{2\mu} = 1$, $\alpha_{2\mu-1} = \alpha_\mu$, $\alpha_{2\mu} = 1$ (für $\mu \geq 1$), also die in (28) auftretende Reihe sich auf die weiter unten angegebene reduziert.

Damit ist aber der ausgesprochene Satz vollständig bewiesen

7. Durch den Satz am Schlusse von Nr. 4 wird die Möglichkeit gegeben, *hinreichende*[1]) Bedingungen für die *Konvergenz* eines den Forderungen (21) genügenden Kettenbruches von der Form $\left[\frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ in der Weise zu gewinnen, daß man die früher für Kettenbrüche mit *positiven* bzw. *nicht-negativen* Bestandteilen abgeleiteten Kriterien auf den *extendierten* Kettenbruch anwendet Wird der letztere wieder mit $\left[\frac{\alpha'_\mu}{\beta'_\mu}\right]_1^\infty$ bezeichnet, so ist er nach dem Kriterium (B) von § 102, Nr 4, Satz (V), S. 767, *konvergent*, wenn die Reihe:

$$\sum \sqrt{\frac{\beta'_\mu \beta'_{\mu+1}}{\alpha'_{\mu+1}}}$$

oder ein Bestandteil derselben *divergiert*. Um einen solchen aus den verschiedenartig gebildeten Gliedern in möglichst einfacher Form auszusondern, wollen wir diejenigen $\frac{\alpha'_\mu}{\beta'_\mu}$ ins Auge fassen, welche aus *positiven* Gliedern $\frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}$ (wo also: $\varepsilon_\nu = +1$) entstanden sind.[2]) Dieselben haben ausschließlich die Form: $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ und $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu - 1}$ (vgl. Nr. 3, Gl (20a), (20b), S. 824), und für die zur Bildung des fraglichen Kriteriums erforderlichen konsekutiven Gliederpaare ergeben sich dann die folgenden drei Möglichkeiten:

[1] $\varepsilon_{\nu+1} = +1,\ \varepsilon_{\nu+2} = +1$: $\frac{\alpha'_\mu}{\beta'_\mu} = \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu},\ \frac{\alpha'_{\mu+1}}{\beta'_{\mu+1}} = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\beta_{\nu+1}}$

[2] $\varepsilon_{\nu+1} = +1,\ \varepsilon_{\nu+2} = -1$: $\frac{\alpha'_\mu}{\beta'_\mu} = \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu},\ \frac{\alpha'_{\mu+1}}{\beta'_{\mu+1}} = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\beta_{\nu+1}-1}$ (wo: $\beta_{\nu+1} \geq \alpha_{\nu+1} + 1$)

[3] $\varepsilon_{\nu+1} = -1$: $\frac{\alpha'_\mu}{\beta'_\mu} = \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu - 1},\ \frac{\alpha'_{\mu+1}}{\beta'_{\mu+1}} = \frac{1}{1}$ (wo: $\beta_\nu \geq \alpha_\nu + 1$).

1) Da für die Konvergenz eines den Bedingungen (21) genügenden Kettenbruches mit *unendlich vielen positiven* Gliedern die Konvergenz des zugehörigen *extendierten* Kettenbruches nicht nur *hinreichend*, sondern auch *notwendig* ist, so könnte man durch Vermittlung des letzteren auch Konvergenzbedingungen aufstellen, welche zugleich *notwendig und hinreichend* sind. Dieselben fallen jedoch wegen der verschiedenartigen Gliederformen des extendierten Kettenbruches viel zu kompliziert aus, um irgendwelchen Nutzen zu gewähren

2) Es kann sich selbstverständlich hier nur um solche Kettenbrüche handeln, welche *unendlich viele positive* Glieder enthalten. Denn im entgegengesetzten Falle ist ja der betreffende Kettenbruch ohne das Hinzutreten irgendwelcher weiteren Bedingungen bereits als *konvergent* erkannt.

Man findet daher

$$\text{im Falle [1]:}\quad \frac{\beta'_\mu \beta'_{\mu+1}}{\alpha'_{\mu+1}} = \beta_\nu \cdot \frac{\beta_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1}} \geqq \beta_\nu > \alpha_\nu$$

$$\text{im Falle [2]:}\quad \frac{\beta'_\mu \beta'_{\mu+1}}{\alpha'_{\mu+1}} = \beta_\nu \cdot \frac{\beta_{\nu+1}-1}{\alpha_{\nu+1}} \geqq \beta_\nu > \alpha_\nu$$

$$\text{im Falle [3]:}\quad \frac{\beta'_\mu \beta'_{\mu+1}}{\alpha'_{\mu+1}} = (\beta_\nu - 1) \cdot \frac{1}{1} = \beta_\nu - 1 > \alpha_\nu,$$

sodaß also die Reihe $\sum \sqrt{\frac{\beta'_\mu \beta'_{\mu+1}}{\alpha'_{\mu+1}}}$ sicher *divergiert*, wenn die aus den α_ν mit *positivem* ε_ν gebildete Reihe $\sum \sqrt{\alpha_\nu}$ *divergiert*. Man gewinnt somit das folgende Konvergenzkriterium:

(I) *Für die (unbedingte) Konvergenz des Kettenbruches* $\left[\frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$, *wo:* $\varepsilon_\nu = \pm 1$[1], $\beta_\nu \geqq \alpha_\nu$, *jedoch:* $\beta_\nu \geqq 1 + \alpha_\nu$, *wenn* $\varepsilon_{\nu+1} = -1$, *ist hinreichend, daß die Reihe* $\sum \sqrt{\alpha_\nu}$, *erstreckt über alle* α_ν *mit positivem* ε_ν, *divergiert.*

Zusatz. Andere Kriterienformen ähnlicher Art kann man selbstverständlich erhalten, wenn man statt, wie geschehen, ausschließlich die aus *positiven* Gliedern $\frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}$ hervorgegangenen Glieder $\frac{\alpha'_\mu}{\beta'_\mu}$ zum Ausgangspunkt zu nehmen, auch die Glieder mit *negativem* ε_ν in Rechnung zieht. Um aber die (ähnlich wie zuvor in den mit [1]—[3] bezeichneten Einzelfällen) zunächst auftretenden *verschiedenen* Bedingungen durch passende Reduktion auf eine *gemeinsame* Formel zurückzuführen, erweist es sich als zweckmäßig, das zuvor eingeschlagene Verfahren nicht einfach in der Weise nachzubilden, daß man nunmehr lediglich an die Stelle der Glieder mit positivem ε_ν diejenigen mit negativem ε_ν treten läßt, sondern (ohne Rücksicht darauf, ob $\varepsilon_\nu = +1$ oder $\varepsilon_\nu = -1$) *diejenigen* Glieder zusammenzufassen, für welche *entweder* $\varepsilon_{\nu+1} = +1$ *oder* aber $\varepsilon_{\nu+1} = -1$. Es ergibt sich dann durch eine der zuvor angewendeten analoge Schlußweise als gleichfalls *hinreichende* Bedingung für die *Konvergenz* des fraglichen Kettenbruches die *Divergenz* von einer der beiden Reihen:

(II) $\sum \sqrt{\beta_\nu - \alpha_\nu}$, erstreckt über alle (α_ν, β_ν), für welche $\varepsilon_{\nu+1} = +1$,

(III) $\sum \sqrt{\beta_\nu - \alpha_\nu - 1}$, „ „ „ „ „ „ „ $\varepsilon_{\nu+1} = -1$.

1) Die bisher lediglich zur einfacheren Fassung mancher Aussagen festgehaltene Bedingung $\varepsilon_1 = +1$ ist selbstverständlich für die *Konvergenz* des Kettenbruches gänzlich belanglos und kann daher hier ohne weiteres wegfallen

8. Der Nutzen der vorstehenden Kriterien ist naturgemäß auf diejenigen Fälle beschränkt, in denen der betreffende Kettenbruch *unendlich* viele Glieder *beiderlei* Vorzeichens enthält, da wir ja anderenfalls schon auf einfacherem Wege hergeleitete und zugleich *wirksamere* Kriterien besitzen.

Enthält nämlich der Kettenbruch von einer bestimmten Stelle ab, etwa für $\nu \geqq m$, nur noch Glieder mit *positiven* Teilzählern, so hängt ja seine *Konvergenz*, wie in Nr. 5' dieses Paragraphen, S. 827, bereits ausdrücklich festgestellt wurde, lediglich von derjenigen des Kettenbruches $\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_m^\infty$ ab, also eines Kettenbruches mit ausschließlich *positiven* Gliedern, sodaß wir in diesem Falle sogar, auch ohne auf den *extendierten* Kettenbruch zurückzugreifen, über die *notwendigen und hinreichenden* Konvergenzbedingungen durch die Sätze (II) und (III) von § 102, S. 764, vollständig orientiert sind. Zugleich ergibt sich, wegen $\beta_\nu \geqq \alpha_\nu$, als besonders einfache Form einer *hinreichenden Konvergenz*bedingung nach Satz (Va) des § 102, S. 768, die *Divergenz* der Reihe $\sum' \sqrt{\beta_\nu}$ — also eine Bedingung, die *wesentlich weniger* verlangt als jede der oben mit (I)—(III) bezeichneten

Noch einfacher lagen die Verhältnisse, wenn der Kettenbruch von einer bestimmten Stelle ab aus lauter *negativen* Gliedern besteht. In diesem Falle *konvergiert* der Kettenbruch *ohne* das Hinzutreten irgendwelcher sonstigen Bedingung, wie ja gleichfalls in Nr 5 unter Berufung auf den Satz von § 106, Nr. 4, S 812, bereits festgestellt wurde. Im übrigen ließe sich diese Tatsache ohne Heranziehung jenes früheren Ergebnisses auch direkt aus der Natur des *extendierten* Kettenbruches herleiten. Ist nämlich α_m der *letzte positive* Teilzähler des in Frage stehenden Kettenbruches, sodaß dieser also vom Index m an die folgende Form besitzt:

$$\frac{\alpha_m|}{|\beta_m} - \frac{\alpha_{m+1}|}{|\beta_{m+1}} - \frac{\alpha_{m+2}|}{|\beta_{m+2}} - \cdots\cdots,$$

so lauten die entsprechenden Glieder des *extendierten* Kettenbruches folgendermaßen:

$$\frac{\alpha_m|}{|\beta_m - 1} + \frac{1|}{|1} + \frac{\alpha_{m+1}|}{|\beta_{m+1} - \alpha_{m+1}} - \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{\alpha_{m+2}|}{|\beta_{m+2} - \alpha_{m+2}} - \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \cdots\cdots$$

und daher seine Näherungsbrüche für $\nu \geqq m$:

$$\frac{A_m - A_{m-1}}{B_m - B_{m-1}},\ \frac{A_m}{B_m},\ \frac{A_{m+1} - A_m}{B_{m+1} - B_m},\ \frac{A_{m+1}}{B_{m+1}},\ \frac{A_{m+2} - A_{m+1}}{B_{m+2} - B_{m+1}},\ \frac{A_{m+2}}{B_{m+2}}\cdots\cdots.$$

Hiernach sind also die Näherungsbrüche $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ des *ursprünglichen* Kettenbruches in ihrer Eigenschaft als Näherungsbrüche des *extendierten* Kettenbruches für $\nu \geqq m$ durchweg solche von *gerader* oder durchweg solche von *ungerader* Ordnung, und sie besitzen daher (da überdies der *erste* Teilnenner des *extendierten* Kettenbruches *von Null verschieden* ist) nach § 102, Nr. 5, S 769, für $\nu \longrightarrow \infty$ einen bestimmten endlichen Grenzwert: der gegebene Kettenbruch ist also *konvergent*

Dagegen dürfte es schwerlich möglich sein, auf diesem Wege das am Schlusse von Nr. 1 dieses Paragraphen, S. 823, ausgesprochene Kriterium abzuleiten, welches die *Konvergenz* der Kettenbrüche von der Form $\left[\frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ sichert, sofern nur $\beta_\nu \geqq 1 + \alpha_\nu$ für $\nu \geqq 1$ In der Tat scheint dieses Kriterium einen *allgemeineren*, ich möchte sagen, *fundamentaleren* Charakter zu besitzen, welcher sich späterhin noch in der Weise bemerkbar machen wird, daß dasselbe nicht nur *mutatis mutandis* auf Kettenbrüche mit beliebigen *komplexen* Gliedern übertragbar ist, sondern auch eine noch allgemeinere Fassung sehr einfacher Art zuläßt, vermöge deren es von Äquivalenz-Transformationen unabhängig wird, d. h. für alle Individuen einer Klasse unter sich *äquivalenter* Kettenbrüche die gleiche Wirksamkeit besitzt.

Immerhin läßt sich mit Hilfe des Extensionsprinzips noch eine gewisse Erweiterung des fraglichen Kriteriums erzielen. Steht nämlich nur so viel fest, daß die Bedingung: $\beta_\nu \geqq 1 + \alpha_\nu$ erst für $\nu \geqq m$ ausnahmslos erfüllt ist, während für $\nu < m$ lediglich: $\beta_\nu \geqq \alpha_\nu$ und nur dann: $\beta_\nu > 1 + \alpha_\nu$, wenn $\varepsilon_{\nu+1} = -1$, so führt die genaue Wiederholung derjenigen Schlußweise, welche in Nr 5 zur Behandlung des Falles $\varepsilon_\nu = -1$ (für $\nu \geqq m + 1$) angewendet wurde (s. insbesondere Gl (25)), zu dem Ergebnis, daß auch schon *diese* Bedingungen für die *Konvergenz* des Kettenbruches $\left[\frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ *hinreichend* sind.

§ 109. Über die Irrationalität gewisser Kettenbrüche. (Der verallgemeinerte Legendresche Irrationalitätssatz.)

1. Es wurde früher (§ 103, Nr. 3, S. 776 und § 107, Nr. 4, S. 818) gezeigt, daß der Wert eines *regelmäßigen* und, mit einer einzigen Ausnahme, auch derjenige eines *negativ-regelmäßigen unendlichen* Kettenbruches *irrational* ist. Dieses Ergebnis (einschließlich des erwähnten Ausnahmefalles) läßt sich zunächst in folgender Weise verallgemeinern:

Es sei der Kettenbruch $\left[\frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$, *wo für* $\nu \geqq 1 : \varepsilon_\nu$ *nach Belieben* $= +1$ *oder* $= -1$ *und* α_ν, β_ν *natürliche Zahlen bedeuten, unbedingt konvergent, und es werde gesetzt:*

$$(1) \qquad \left[\frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_{n+1}^\infty = \mathsf{K}^{(n)} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

(sodaß also $\mathsf{K}^{(0)} = \mathsf{K}$, *wenn der Wert des gesamten Kettenbruches, wie bisher, mit* K *bezeichnet wird). Besteht sodann die Beziehung:*

$$(2) \qquad 0 < |\mathsf{K}^{(n)}| \leqq 1 \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \cdots$$

in dem Sinne, daß mindestens für ein n das Gleichheitszeichen gilt, und ist m der kleinste Index, für welchen:

$$(3) \qquad |\mathsf{K}^{(m)}| = 1,$$

so ist:

$$(4) \qquad \mathsf{K}^{(n)} = \varepsilon_{n+1} \quad \text{für } n = m, m+1, m+2, \cdots,$$

insbesondere also: $\mathsf{K} = \varepsilon_1$, *wenn* $m = 0$, *dagegen* K *ein mit dem Vorzeichen von* ε_1 *behafteter rationaler echter Bruch, wenn* $m > 1$.

Ist hingegen für $n = 0, 1, 2, \cdots$ *ausnahmslos*

$$(5) \qquad 0 < |\mathsf{K}^{(n)}| < 1 \quad \textit{(mit Ausschluß der Gleichheit)},$$

so ist jedes $\mathsf{K}^{(n)}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ *eine irrationale Zahl mit dem Vorzeichen von* ε_{n+1}.

Beweis. Man hat für jedes $n \geqq 0$:

$$(6) \qquad \mathsf{K}^{(n)} = \frac{\varepsilon_{n+1}\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1} + \mathsf{K}^{(n+1)}}.$$

Da nun: $\beta_{n+1} \geqq 1$, $|\mathsf{K}^{(n+1)}| \leqq 1$, also: $\beta_{n+1} + \mathsf{K}^{(n+1)} \geqq 0$, und (infolge der Voraussetzung $|\mathsf{K}^{(n)}| \leqq 1$): $|\beta_{n+1} + \mathsf{K}^{(n+1)}| > \alpha_{n+1} > 0$, so folgt, daß:

$$(7) \qquad \beta_{n+1} + \mathsf{K}^{(n+1)} > 0$$

und daß daher jedes $\mathsf{K}^{(n)}$ mit dem Vorzeichen von ε_{n+1} behaftet ist.

Besteht nun die Voraussetzung (3):

$$|\mathsf{K}^{(m)}| = 1,$$

so hat man nach dem eben Gesagten:

$$(8_0) \qquad \mathsf{K}^{(m)} = \varepsilon_{m+1},$$

und es nimmt somit Gl. (6) für $n = m$ die Form an.

$$1 = \frac{\alpha_{m+1}}{\beta_{m+1} + \mathsf{K}^{(m+1)}},$$

sodaß also.

$$\mathsf{K}^{(m+1)} = \alpha_{m+1} - \beta_{m+1},$$

d. h $K^{(m+1)}$ ist eine *ganze* Zahl, und da infolge der Voraussetzung (2): $0 < | K^{m+1} | \leqq 1$, so ergibt sich:

$$(8_1) \qquad | K^{(m+1)} | = 1 \text{ und somit: } K^{(m+1)} = \varepsilon_{m+2}$$

Durch Fortsetzung dieser Schlußweise findet man, daß allgemein:

$$(8) \qquad | K^{(n)} | = 1, \; K^{(n)} = \varepsilon_{n+1} \text{ für } n \geqq m,$$

in Worten: Gilt die *erste* dieser Beziehungen für irgendein bestimmtes $n = m$, so gelten *beide* für jedes $n \geqq m$.

Ist nun $m = 0$, so gelten also die Beziehungen (8) für jedes $n \geqq 0$ und man hat insbesondere: $K = \varepsilon_1$.

Ist dagegen $m > 0$, so ist ja auf Grund der gemachten Annahme: $| K^{(m-1)} | \neq 1$, also auf Grund der Voraussetzung (2):

$$| K^{(m-1)} | < 1 \text{ und, wegen: } K^{(m-1)} = \frac{\varepsilon_m \alpha_m}{\beta_m + K^{(m)}},$$

$K^{(m-1)}$ ein *rationaler echter Bruch* mit dem Vorzeichen von ε_m. Das analoge gilt dann wieder für jedes $K^{(n)}$ mit kleinerem Index n, also schließlich für: $0 \leqq n \leqq m - 1$

Damit ist also der auf die Voraussetzung (3) bezügliche Teil des ausgesprochenen Satzes bewiesen.

Es bestehe nun zweitens die Voraussetzung (5):

$$0 < | K^{(n)} | < 1 \text{ für } n = 0, 1, 2, \cdots\cdots.$$

Um zu zeigen, daß dann $K^{(n)}$ *irrational*, werde vorläufig angenommen, es treffe dies für $K^{(0)} \equiv K$ *nicht* zu, sodaß also K ein rationaler echter Bruch, der dann, wegen:

$$K = \frac{\varepsilon_1 \alpha_1}{\beta_1 + K^{(1)}} \text{ und: } \beta_1 \geqq 1, \; | K^{(1)} | < 1,$$

das Vorzeichen von ε_1 haben muß, also etwa:

$$K = \varepsilon_1 \cdot \frac{\gamma}{\delta}, \text{ wo } \gamma, \delta \text{ relativ prim und: } \gamma \leqq \delta - 1.$$

Man hätte somit:

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha_1}{\beta_1 + K^{(1)}}$$

und daher:

$$K^{(1)} = \frac{\alpha_1 \delta - \beta_1 \gamma}{\gamma} \text{ (wo } \alpha_1 \delta - \beta_1 \gamma \text{ eine ganze Zahl).}$$

Da andererseits $| K^{(1)} | < 1$ und $K^{(1)}$ (auf Grund der zuvor bei K benützten Schlußweise) das Vorzeichen von ε_2 haben muß, so wäre $K^{(1)}$ von der Form:

$$K^{(1)} = \varepsilon_2 \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma}, \text{ wo } \gamma_1 \text{ eine natürliche Zahl und } \gamma_1 \leqq \gamma - 1.$$

Daraus würde dann analog sich ergeben, daß:

$$\mathsf{K}^{(2)} = \varepsilon_3 \cdot \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \text{ wo: } \gamma_2 \leqq \gamma_1 - 1 \leqq \gamma - 2,$$

und bei weiterer Fortsetzung dieser Schlußweise:

$$\mathsf{K}^{(\nu)} = \varepsilon_{\nu+1} \cdot \frac{\gamma_\nu}{\gamma_{\nu-1}}, \text{ wo: } \gamma_\nu \leqq \gamma_{\nu-1} - 1 \leqq \cdots \leqq \gamma - \nu,$$

sodaß also *spätestens* für $\nu = \gamma$ sich ergeben würde: $\mathsf{K}^{(\nu)} = 0$, was der Voraussetzung widerspricht. Mithin ist K eine *Irrationalzahl* (mit dem Vorzeichen von ε_1), und das analoge gilt dann offenbar für $\mathsf{K}^{(n)}$ bei jedem beliebigen Werte von n (da ja aus der *Rationalität* von $\mathsf{K}^{(n)}$ diejenige von K folgen würde)

2 Unterwirft man die natürlichen Zahlen α_ν, β_ν den im vorigen Paragraphen, S. 825, mit (21) bezeichneten Bedingungen.

$$\left.\begin{array}{l} \beta_\nu \geqq \alpha_\nu \\ \beta_\nu \geqq 1 + \alpha_\nu, \quad \text{wenn: } \varepsilon_{\nu+1} = -1 \end{array}\right\} (\nu \geqq 1),$$

so ist $\left[\frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ *unbedingt konvergent*, nämlich ohne weiteres, wenn von irgendeiner Stelle ab durchweg: $\varepsilon_\nu = -1$ (nach dem Satze von Nr. 5, S. 829), und im Falle unendlich vieler $\varepsilon_{m_\nu} = +1$ wegen der Divergenz der Reihe $\sum \sqrt{\alpha_{m_\nu}}$ (nach Nr. 7, (I), S. 833). Ferner ist für jedes n (nach dem Satze von Nr. 6, S. 829):

$$0 < |\,\mathsf{K}^{(n)}\,| < 1,$$

außer wenn von einer gewissen Stelle ab, etwa für $\nu \geqq m + 1$:

$$\varepsilon_\nu = -1, \quad \beta_\nu = 1 + \alpha_\nu{}^{1)},$$

in welchem Falle für $n \geqq m$:

$$\mathsf{K}^{(n)} = -1$$

wird. Wendet man auf diesen Kettenbruch den zuvor bewiesenen Satz an, so ergibt sich also der folgende:

---

1) Die sonst noch erforderliche, a. a. O. angeführte Bedingung:

$$\sum_1^\infty{}^\nu \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu = +\infty$$

ist ja wegen $\alpha_\nu \geqq 1$ $(\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ schon an und für sich erfüllt.

Der Kettenbruch: $\left[\frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$, *wo die* α_ν, β_ν *natürliche Zahlen bedeuten und:*

$$(9)\qquad \varepsilon_\nu = \pm 1,\quad \begin{matrix} \beta_\nu \geq \alpha_\nu \\ \beta_\nu \geqq 1 + \alpha_\nu, \text{ wenn: } \varepsilon_{\nu+1} = -1 \end{matrix} \Bigg\} \; (\nu \geqq 1),$$

hat einen irrationalen, numerisch zwischen 0 und 1 gelegenen Wert mit dem Vorzeichen von ε_1, *außer wenn für* $\nu \geq m+1$ *durchweg.*

$$(10)\qquad \varepsilon_\nu = -1,\quad \beta_\nu = 1 + \alpha_\nu.$$

In diesem Falle ist sein Wert ein rationaler echter Bruch mit dem Vorzeichen von ε_1, *wenn* $m > 0$, *bzw. gleich* -1, *wenn* $m = 0$.

Ist durchweg $\varepsilon_\nu = +1$, so genügt also die Bedingung: $\beta_\nu \geq \alpha_\nu$ für die Gültigkeit des Satzes. Da zu dessen Herleitung (vermittelst des in Nr. 1 bewiesenen Satzes) lediglich die *unbedingte Konvergenz* des betreffenden Kettenbruches und die Beziehung $0 < |\mathsf{K}^{(n)}| \leq 1$ erforderlich ist, so würde für den Beweis unter Beschränkung auf den Fall $\varepsilon_\nu = +1$ schon die aus § 102, Nr. 4, Satz (V) oder (Va), S. 767/8, zu entnehmende Kenntnis der unbedingten Konvergenz von $\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ und die Beziehung $0 < \mathsf{K}^{(n)} < \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}}$ genügen. Danach hat z. B. der Kettenbruch: $\left[\frac{\nu}{\nu}\right]_1^\infty$ einen *irrationalen* Wert (der übrigens $= \frac{1}{e-1}$ ist).[1])

Will man sich ferner beim Beweise des obigen Satzes für *beliebige* $\varepsilon_\nu = \pm 1$ auf die Voraussetzung $\beta_\nu \geq 1 + \alpha_\nu$ $(\nu \geq 1)$ beschränken[2]), so genügt offenbar die Heranziehung des Satzes von § 108, Nr. 1, S. 823, an Stelle der merklich umständlicheren Betrachtungen von Nr 4–6 des betreffenden Paragraphen.

3. Ist der Kettenbruch $\left[\frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ so beschaffen, daß $\left[\frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ *unbedingt konvergiert* und einen *irrationalen* Wert hat (was also insbesondere der Fall wäre, wenn für $\nu \geqq m+1$ die Bedingungen (9), aber nicht von irgendeiner Stelle ab die Bedingungen des Ausnahmefalls (10) erfüllt sind), während die α_ν, β_ν für $\nu \leqq m$ *beliebige rationale* Zahlen sein mögen, so ist er gleichfalls *unbedingt konvergent* und sein Wert *irrational*. Denn mit Beibehaltung der zuvor gebrauchten Bezeichnung (s. Gl. (1)) hat man zunächst:

$$\left[\frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_m^\infty = \frac{\varepsilon_m \alpha_m}{\beta_m + \mathsf{K}^{(m)}},$$

---

1) S. § 97, Nr. 4, Beispiel 3, S. 782.

2) Das ist diejenige Form der Voraussetzung, unter welcher der betreffende Satz gewöhnlich schlechthin als „*Legendrescher Irrationalitätssatz*" bezeichnet wird.

wo $K^{(m)}$ *irrational*, sodaß $\beta_m + K^{(m)}$ sicher *von Null verschieden*, der Kettenbruch $\left[\frac{s_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_m^\infty$ also *konvergent* und sein Wert $K^{(m-1)}$ wieder *irrational* Das gleiche gilt dann auf Grund derselben Schlußweise von $\left[\frac{s_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_{m-1}^\infty$ usf. — schließlich auch von $\left[\frac{s_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$, sodaß also dieser Kettenbruch *unbedingt* konvergiert und einen *irrationalen* Wert besitzt.

Ist dagegen der Wert $K^{(m)}$ des Kettenbruches $\left[\frac{s_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ *rational*, so kann offenbar der Kettenbruch $\left[\frac{s_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ auch *außerwesentlich divergieren*. Andererseits ist sein Wert sicher *rational*, falls er *konvergiert*, nämlich gleich dem Werte des endlichen Kettenbruches:

$$\frac{s_1 \alpha_1|}{|\beta_1} + \cdots + \frac{s_{m-1} \alpha_{m-1}|}{|\beta_{m-1}} + \frac{s_m \alpha_m|}{|\beta_m + K^{(m)}},$$

falls dieser letztere *nicht sinnlos* ausfällt

Kapitel III.

Kettenbrüche aus komplexen Zahlen.

§ 110. Über zweckmäßige Formulierung allgemeiner Konvergenz- und Divergenzkriterien für unendliche Kettenbrüche. — Zusammenstellung der wichtigsten Grundformeln für Kettenbrüche der ersten Hauptform.

1 Ehe wir dazu übergehen, die bisher abgeleiteten Konvergenz- und Divergenzkriterien nach Möglichkeit auf Kettenbrüche mit komplexen Gliedern zu übertragen, schicken wir zur Kennzeichnung des uns dabei leitenden Gesichtspunktes die folgende Bemerkung voraus Vergleicht man die in § 102 angegebenen, auf Kettenbrüche $\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ mit lauter *positiven* Gliedern bezüglichen Kriterien mit den Kriterien für Kettenbrüche mit Gliedern *negativen* (§ 106) oder *beliebig wechselnden Vorzeichens*: $\left[\frac{s_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$, wo $s_\nu = \pm 1_1$ (§ 108, 109), so zeigt sich in bezug auf ihre Tragweite ein sehr wesentlicher Unterschied. Die Kriterien der erstgenannten Art, und zwar die *notwendigen* und *hinreichenden* Konvergenzbedingungen (Satz III, S. 764) hängen ab von dem Verhalten der Ausdrücke:

$$\frac{\alpha_1 \alpha_3 \cdots \alpha_{2\mu-1}}{\alpha_2 \alpha_4 \cdots \alpha_{2\mu}} \beta_{2\mu}, \quad \frac{\alpha_2 \alpha_4 \cdots \alpha_{2\mu}}{\alpha_1 \alpha_3 \cdots \alpha_{2\mu-1} \alpha_{2\mu+1}} \beta_{2\mu+1},$$

die *hinreichenden* (Satz IV, V, S 765/7) von dem Verhalten der Ausdrücke:

$$\frac{\alpha_{\nu+1}\beta_{\nu-1}}{\alpha_\nu \beta_{\nu+1}} \text{ bzw. } \frac{\beta_\nu \beta_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1}},$$

und diese bleiben vollständig *unverändert,* wenn man

$$\begin{array}{ll} \alpha_\nu \text{ durch } c_{\nu-1} c_\nu \alpha_\nu & (\text{wo: } c_0 = 1) \\ \beta_\nu \text{ durch } \quad c_\nu \beta_\nu & \end{array}$$

ersetzt, mit anderen Worten, wenn man statt des Kettenbruches: $\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ irgendeinen (nach § 94, Nr. 1, Gl. (10), S. 706) ihm *äquivalenten:* $\left[\frac{c_{\nu-1} c_\nu \alpha_\nu}{c_\nu \beta_\nu}\right]_1^\infty$ in Betracht zieht. Die betreffenden Kriterien besitzen also für alle *äquivalenten* Kettenbrüche die *gleiche* Wirksamkeit.

Dagegen beruhen ja die Kriterien der zweiten Kategorie auf dem Verhalten der *Differenzen*.

$$\beta_\nu - \alpha_\nu,$$

und da diese bei Anwendung der obigen Äquivalenztransformation übergehen in:

$$c_\nu (\beta_\nu - c_{\nu-1} \alpha_\nu),$$

also infolge der Willkürlichkeit von $c_{\nu-1}$, c_ν jeden beliebigen Wert annehmen können, so muß ein solches Kriterium, auch wenn es für irgendeinen bestimmten Kettenbruch sich als *wirksam* erweist, bei unendlich vielen damit äquivalenten Kettenbrüchen vollständig *versagen,* obschon doch alle diese Kettenbrüche (nach § 97, Nr. 2, S. 728) gleichen Konvergenzcharakter besitzen

Wie leicht ersichtlich, rührt die Überlegenheit jener anderen Kriterien davon her, daß ihnen ein entsprechendes Kriterium für einen Kettenbruch der *ersten Hauptform:* $\left[\frac{1}{\beta'_\nu}\right]_1^\infty$ zugrunde lag und daß es lediglich der Umformung mit Hilfe der Transformationsformeln (§ 94, Nr 4, Gl. (23), S 710):

$$\beta'_{2\mu} = \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2 \alpha_4} \cdots \frac{\alpha_{2\mu-1}}{\alpha_{2\mu}} \beta_{2\mu}, \quad \beta'_{2\mu+1} = \frac{\alpha_2 \alpha_4}{\alpha_1 \alpha_3} \cdots \frac{\alpha_{2\mu}}{\alpha_{2\mu-1} \alpha_{2\mu+1}} \cdot \beta_{2\mu+1} \; (\mu \geqq 1)$$

bedurfte, um jenes Kriterium sofort auf *alle* mit dem genannten Kettenbruche *äquivalenten* Kettenbrüche $\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ zu übertragen. Zur Erzielung möglichst allgemeiner Kriterienbildungen wird es sich daher empfehlen, im folgenden ein analoges Verfahren einzuschlagen und dabei naturgemäß auch die *zweite Hauptform* $\left[\frac{\alpha'_\nu}{1}\right]^\infty$ zu berücksichtigen, die ja überdies den

und zwar gilt das *Gleichheitszeichen nur dann* (vgl. Fußnote 1, S. 842), wenn $b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$. Da jetzt für $n = 6$ wieder die Bedingungen (I) gelten, so ergibt sich für $|A_6|$, wie oben, die Gültigkeit der Formel (5a). Für $|A_7|$ folgt dann wieder die Formel (5a′), wobei aber das *Gleichheitszeichen nur* gilt, wenn $b_2 = b_3 = \cdots = b_7 = 0$. So fortschließend findet man allgemein: Für *gerade* Indizes n gilt ausnahmslos die *Ungleichung* (5a), für *ungerade* die Formel (5a′), jedoch gilt für irgendein A_{2m+1} *nur* dann das *Gleichheitszeichen*, wenn $b_2 = b_3 = \cdots = b_{2m+1} = 0$. In der Tat wird in diesem Falle:

$$\left.\begin{aligned} A_{2\mu+1} &= 1 = \prod_{2}^{2\mu+1}{}^{\nu}(1+|b_\nu|) \\ A_{2\mu} &= 0 < \prod_{2}^{2\mu}{}^{\nu}(1+|b_\nu|) \end{aligned}\right\} \quad (\mu = 1, 2, \cdots m)$$

Ebenso findet man:

$$\begin{aligned} |B_1| &= |b_1| < 1 + |b_1| \\ |B_2| &< 1 + |b_2 B_1| \leqq (1+|b_1|)\,(1+|b_2|).^{1)} \end{aligned}$$

Wird dann wiederum angenommen, man habe für irgendein $n \geqq 3$ bzw. $n \geqq 4$:

$$\text{(II)} \left\{\begin{aligned} |B_{n-2}| &< \prod_{1}^{n-2}{}^{\nu}(1+|b_\nu|) \\ |B_{n-1}| &\leqq \prod_{1}^{n-1}{}^{\nu}(1+|b_\nu|) \end{aligned}\right\} \text{ bzw. } \left\{\begin{aligned} |B_{n-2}| &\leqq \prod_{1}^{n-2}{}^{\nu}(1+|b_\nu|) \\ |B_{n-1}| &< \prod_{1}^{n-1}{}^{\nu}(1+|b_\nu|), \end{aligned}\right.$$

so folgt analog, wie oben

$$\text{(5b)} \qquad |B_n| \leqq \prod_{1}^{n}{}^{\nu}(1+|b_\nu|),^{2)}$$

wobei das *Gleichheitszeichen* nur für *gerade* n möglich ist, und zwar für irgendein $n = 2m$ (und dann *eo ipso* auch für $n = 2, 4, \cdots 2m-2$) *nur dann*, wenn: $b_1 = b_2 = \cdots = b_{2m} = 0$. Man findet in diesem Falle:

$$\begin{aligned} B_{2\mu} &= 1 = \prod_{1}^{2\mu}{}^{\nu}(1+|b_\nu|) \\ B_{2\mu-1} &= 0 < \prod_{1}^{2\mu-1}{}^{\nu}(1+|b_\nu|). \end{aligned}$$

1) Das *Gleichheitszeichen* nur für den Fall $b_1 = b_2 = 0$.

2) Vgl. § 102, Nr. 2, Ungl. (9), S. 762.

3. Bezeichnet man mit $\tilde{B}_\nu$ die zu B_ν konjugierte Zahl, sodaß also:

$$B_\nu \tilde{B}_\nu = |B_\nu|^2,$$

und multipliziert die auf die Form:

$$B_{\nu+1} - B_{\nu-1} = b_{\nu+1} B_\nu$$

gebrachte Rekursionsformel (1b) mit $\tilde{B}_\nu$, so folgt:

$$B_{\nu+1} \tilde{B}_\nu - \tilde{B}_\nu B_{\nu-1} = b_{\nu+1} |B_\nu|^2 \tag{6}$$

Setzt man sodann.

$$\tilde{B}_\nu B_{\nu-1} = \sigma_\nu - \sigma_\nu' i, \text{ also: } B_\nu \tilde{B}_{\nu-1} = \sigma_\nu + \sigma_\nu' i, \tag{7}$$

sodaß also:

$$\sigma_\nu = \Re(\tilde{B}_\nu B_{\nu-1}) = \Re(B_\nu \tilde{B}_{\nu-1}),\ \sigma_\nu' = \Re(i \tilde{B}_\nu B_{\nu-1}) = \Re(\tfrac{1}{i} B_\nu \tilde{B}_{\nu-1}), \tag{8}$$

so ergibt sich durch Multiplikation der Gleichungen (7):

$$|B_\nu B_{\nu-1}|^2 = \sigma_\nu^2 + \sigma_\nu'^2, \text{ also: } |B_\nu B_{\nu-1}| \begin{cases} \geqq |\sigma_\nu| \\ \geqq |\sigma_\nu'|. \end{cases} \tag{9}$$

Durch Einsetzen der Beziehungen (7) in Gl. (6) geht diese in die folgende über:

$$\sigma_{\nu+1} + \sigma_{\nu+1}' i - (\sigma_\nu - \sigma_\nu' i) = (\beta_{\nu+1} + \beta_{\nu+1}' i) \cdot |B_\nu|^2,$$

welche durch Trennung des Reellen und Imaginären die zwei Beziehungen liefert:

$$\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu = \beta_{\nu+1} |B_\nu|^2, \quad \sigma_{\nu+1}' + \sigma_\nu' = \beta_{\nu+1}' |B_\nu|^2. \tag{10}$$

Substituiert man in der ersten und der mit $(-1)^{\nu+1}$ multiplizierten zweiten dieser Gleichungen $\nu = 1, 2, \cdots (n-1)$, so folgt durch Addition (mit Berücksichtigung von: $\sigma_1 = \beta_1 = \beta_1 |B_0|^2$, $\sigma_1' = \beta_1' = \beta_1' |B_0|^2$):

$$\sigma_n = \sum_0^{n-1} {}^{\nu} \beta_{\nu+1} |B_\nu|^2,\ (-1)^n \cdot \sigma_n' = \sum_0^{n-1} {}^{\nu} (-1)^{\nu+1} \cdot \beta_{\nu+1}' |B_\nu|^2 \ (n \geqq 1)\ ^{1)} \tag{11}$$

1) Sind die b_ν *reell* (also $b_\nu = \beta_\nu$), so gilt das gleiche von den B_ν, die somit sich selbst konjugiert sind. Man hat daher nach Gl. (7):

$$B_\nu B_{\nu-1} = \sigma_\nu \quad (\sigma_\nu' = 0),$$

sodaß die erste der Beziehungen (11) die Form annimmt:

$$B_n B_{n-1} = \sum_0^{n-1} {}^{\nu} \beta_{\nu+1} B_\nu^2,$$

in Übereinstimmung mit Gl. (12) von § 102, Nr 2, S. 768, wenn man daselbst n durch $n-1$ ersetzt.

§ 111. Divergenz- und Konvergenzkriterien für Kettenbrüche der ersten Hauptform.

1 Die in § 102, S 761ff., enthaltenen Aussagen über die *Divergenz* von Kettenbrüchen mit *positiven Teilzahlern* und *nicht-negativen Teilnennern* sind im wesentlichen auch auf Kettenbrüche mit *komplexen* Gliedern übertragbar und lassen sich zunächst, soweit sie sich auf Kettenbrüche der ersten Hauptform beziehen, zu dem folgenden Satze zusammenfassen:

(I) *Der Kettenbruch* $\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *ist divergent, und zwar mit Ausnahme eines besonderen Falles wesentlich divergent,*

1) *wenn durchweg:* $b_{2\nu+1} = 0$ $(\nu = 0, 1, 2, \dots)$;

2) *wenn die Reihe:* $\sum |b_\nu|$ *konvergiert.*

Und zwar werden im Falle 1) alle Näherungsbrüche mit *ungeradem* Index *sinnlos;*[1]) *doch reduziert sich die Divergenz auf eine außerwesentliche,* wenn $\left|\sum_1^\infty b_{2\nu}\right| = +\infty$. Im *Falle* 2) *existiert (auch wenn gleichzeitig die Bedingung* 1) *erfüllt ist) stets einer der beiden Grenzwerte*[2]): $\lim_{n\to\infty}\frac{A_{2n}}{B_{2n}}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}}$ *als bestimmte Zahl, der andere ist entweder eine davon verschiedene bestimmte Zahl oder der Grenzwert des reziprok genommenen Bruches ist gleich Null.*

Beweis. Besteht die Voraussetzung 1), ist also:

$$b_1 = b_3 = \cdots = b_{2n+1} = 0,$$

so folgt aus der *zweiten* der Gleichungen (4a) bzw. (4b) des vorigen Paragraphen, daß:

$$(1) \qquad A_{2n+1} = 1,\ B_{2n+1} = 0,$$

und es haben somit *alle* Näherungsbrüche $\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}}$ die Form $\frac{1}{0}$, wenn für $\nu > 0$ *durchweg:* $b_{2\nu+1} = 0$. Zugleich ergibt sich in diesem Falle aus der *ersten* der Gleichungen (4a) bzw. (4b):

---

1) Dies gilt auch für Kettenbrüche von der allgemeineren Form $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$. Denn man hat:

$$B_{2\nu+1} = a_{2\nu+1} B_{2\nu-1},$$

und hieraus folgt durch vollständige Induktion:

$$B_{2\nu+1} = 0,$$

wegen

$$B_1 = b_1 = 0$$

2) Ist gleichzeitig die Bedingung 1) erfüllt, so steht von vornherein fest, daß nur die Folge $\left(\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}\right)$ einen bestimmten Grenzwert besitzen kann.

(2) $$A_{2n} = \sum_{1}^{n} b_{2\nu}, \quad B_{2n} = 1$$

Danach reduziert sich offenbar die sonst *wesentliche* Divergenz des Kettenbruchs auf eine *außerwesentliche*[1]), wenn: $\left|\sum_{1}^{\infty} b_{2\nu}\right| = +\infty$, da in diesem Falle $\lim_{n\to\infty} \frac{B_{2n}}{A_{2n}} = 0$ (neben: $\frac{B_{2n+1}}{A_{2n+1}} = 0$ nach Gl. (1)).

Besteht andererseits die Voraussetzung 2), d. h. ist die Reihe $\sum |b_\nu|$ *konvergent*, so gilt das gleiche von dem unendlichen Produkt $\prod (1 + |b_\nu|)$, sodaß also die $|A_\nu|$, $|B_\nu|$ auf Grund der Ungleichungen (5a, b) des vorigen Paragraphen unter einer endlichen Schranke bleiben. Infolgedessen sind dann gleichzeitig mit der Reihe $\sum |b_\nu|$ auch die z. B. in den Gleichungen (4a, b) auftretenden Reihen:

$$\sum b_{2\nu} A_{2\nu-1}, \quad \sum b_{2\nu+1} A_{2\nu}, \quad \sum b_{2\nu} B_{2\nu-1}, \quad \sum b_{2\nu+1} B_{2\nu}$$

absolut konvergent, sodaß man setzen kann:

(3) $$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} A_{2n} = \sum_{1}^{\infty} b_{2\nu} A_{2\nu-1} = A^{(0)}, \\ \lim_{n\to\infty} A_{2n+1} = 1 + \sum_{1}^{\infty} b_{2\nu+1} A_{2\nu} = A^{(1)}, \\ \lim_{n\to\infty} B_{2n} = 1 + \sum_{1}^{\infty} b_{2\nu} B_{2\nu-1} = B^{(0)}, \\ \lim_{n\to\infty} B_{2n+1} = \sum_{0}^{\infty} b_{2\nu+1} B_{2\nu} = B^{(1)}, \end{cases}$$

wo $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, $B^{(0)}$, $B^{(1)}$ bestimmte Zahlen vorstellen.

Da sodann aus der für jedes $n > 0$ geltenden Beziehung (s. Gl. (2) des vorigen Paragraphen):

$$A_{2n+1} B_{2n} - A_{2n} B_{2n+1} = 1$$

für $n \to \infty$ folgt:

(4) $$A^{(1)} B^{(0)} - A^{(0)} B^{(1)} = 1,$$

so können $B^{(0)}$ und $B^{(1)}$ niemals gleichzeitig *Null* sein, und es stellt somit ***mindestens eins*** der Bruchsymbole $\frac{A^{(0)}}{B^{(0)}}$, $\frac{A^{(1)}}{B^{(1)}}$, also ***mindestens einer*** der Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} \frac{A_{2n}}{B_{2n}}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}}$ eine bestimmte Zahl vor.

---

1) Genau wie im entsprechenden Falle für *reelle nicht-negative* b_ν; vgl. § 102 Nr. 5, Satz (VI), S. 771.

Sind insbesondere $B^{(0)}$ und $B^{(1)}$ *beide von Null verschieden*, so folgt aus Gl. (4), daß:

$$\frac{A^{(1)}}{B^{(1)}} - \frac{A^{(0)}}{B^{(0)}} = \frac{1}{B^{(0)} B^{(1)}} \neq 0, \tag{5}$$

d. h in diesem Falle existieren die *beiden* Grenzwerte: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_{2n}}{B_{2n}}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}}$ als bestimmte, *voneinander verschiedene* Zahlen.

Ist dagegen eine der beiden Zahlen $B^{(0)}$, $B^{(1)}$ gleich *Null*, z. B. $B^{(1)} = 0$, so findet man aus Gl. (4):

$$A^{(1)} = \frac{1}{B^{(0)}} \neq 0 \tag{6}$$

und daher wird·

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_{2n+1}}{A_{2n+1}} = 0. \tag{7}$$

Dies findet, wie oben gezeigt wurde, insbesondere jedesmal dann statt[1]), wenn für $\nu \geqq 0$ *durchweg:* $b_{2\nu+1} = 0$, also (nach Gl. (1)): $A_{2\nu+1} = 1$, $B_{2\nu+1} = 0$ Da in diesem Falle andererseits nach Gl. (2) für jedes n

$$A_{2n} = \sum_1^n{}_{\nu}\, b_{2\nu},\ B_{2n} = 1,$$

so *existiert:*

$$\lim_{n\to\infty} A_{2n} = \sum_1^\infty{}_{\nu}\, b_{2\nu} \tag{8}$$

als *bestimmte Zahl* schon dann, wenn die Reihe $\sum b_{2\nu}$ (auf welche sich ja hier die Reihe $\sum b_\nu$ reduziert) nur *überhaupt* (d. h. nicht notwendig *absolut) konvergiert.* Für den Kettenbruch:

$$\frac{1|}{|0} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|0} + \frac{1|}{|b_4} + \cdots$$

hat man also, falls $\sum\limits_1^\infty{}_{\nu}\, b_{2\nu} = A^{(0)}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{2n}}{B_{2n}} = A^{(0)},$$

während alle $\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}}$ die sinnlose Form $\frac{1}{0}$ haben.

---

1) Bei *reellen, nicht-negativen* b_ν kann der durch Gl. (7) charakterisierte Fall *nur* eintreten, wenn für $\nu \geqq 0$ *alle* $\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}}$ *sinnlos* werden (vgl. § 102, Nr. 5, S. 769).

Zusatz Der vorstehende Satz läßt sich unmittelbar auch auf einen Kettenbruch von der allgemeineren Form $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ (mit der einzigen Beschränkung: $|a_\nu| > 0$) übertragen, indem man denselben durch Äquivalenz-Transformation auf die erste Hauptform $\left[\frac{1}{b'_\nu}\right]_1^\infty$ bringt. Da hierbei (§ 94, Nr. 4, Gl (23), S 710)·

$$(9)\quad \begin{cases} b'_1 = \dfrac{1}{a_1} \cdot b_1 \text{ und für } \nu > 1 \quad b'_{2\nu} = \dfrac{a_1 a_3 \cdots a_{2\nu-1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2\nu}} \cdot b_{2\nu}, \\ \qquad\qquad b'_{2\nu+1} = \dfrac{a_2 a_4 \cdots a_{2\nu}}{a_1 a_3 \cdots a_{2\nu-1} a_{2\nu+1}} \, b_{2\nu+1}, \end{cases}$$

so erkennt man unmittelbar, daß die *Divergenzbedingung* 1) des Satzes (I) *unverändert* bleibt, während die *Divergenzbedingung* 2) durch die *Konvergenz* der beiden Reihen $\sum\left|\frac{a_1 a_3 \cdots a_{2\nu-1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2\nu}} \cdot b_{2\nu}\right|$ und $\sum\left|\frac{a_2 a_4 \cdots a_{2\nu}}{a_1 a_3 \cdots a_{2\nu-1} a_{2\nu+1}} \cdot b_{2\nu+1}\right|$ zu ersetzen ist Die weiteren Aussagen des Satzes (I) bleiben im übrigen auf Grund der Äquivalenz· $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \simeq \left[\frac{1}{b'_\nu}\right]_1^\infty$ ohne weiteres erhalten

2. Während nach dem Satze (I) aus der *Konvergenz* der Reihe $\sum|b_\nu|$ nur so viel gefolgert werden konnte, daß mindestens *einer* der beiden Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_{2n}}{B_{2n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}}$ als bestimmte Zahl existiert, so sollen jetzt *hinreichende* Bedingungen dafür angegeben werden, unter denen *beide* Grenzwerte diese Eigenschaft besitzen, nämlich·

(II) *Die beiden Näherungsbruch-Folgen·* $\left(\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}\right)$, $\left(\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}}\right)$ *des Kettenbruches* $\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *(wo:* $b_\nu = \beta_\nu + \beta'_\nu i$*) konvergieren gegen zwei bestimmte, voneinander verschiedene Zahlen, wenn zu der Konvergenz der Reihe* $\sum|b_\nu|$ *und der für mindestens einen Wert von* ν *geltenden Voraussetzung* $|b_{2\nu+1}| > 0$ *noch eine der folgenden Bedingungen hinzutritt:*

(a) Die β_ν *sind, soweit sie von Null verschieden, durchweg gleichbezeichnet, und entweder enthält das erste nicht verschwindende* $b_{2\nu+1}$ *ein von Null verschiedenes* $\beta_{2\nu+1}$ *oder es existieren irgend zwei konsekutive* $b_\nu, b_{\nu+1}$ *mit nicht verschwindenden reellen Teilen* β_ν, $\beta_{\nu+1}$.

(b) Die Zahlen $(-1)^\nu \cdot \beta'_\nu$ *sind, soweit sie von Null verschieden, durchweg gleichbezeichnet*[1]*, und entweder enthält die erste nicht verschwindende* $b_{2\nu+1}$ *ein von Null verschiedenes* $\beta'_{2\nu+1}$ *oder es existieren irgend zwei konsekutive* b_ν, $b_{\nu+1}$ *mit nicht verschwindenden* β'_ν, $\beta'_{\nu+1}$

Beweis Es gelte zunächst die Bedingung (*a*), die β_ν seien also *gleichbezeichnet.* Dann soll gezeigt werden, daß die B_ν zum mindesten von einer bestimmten Stelle ab durchweg *von Null verschieden* sind (und zwar, wie mit Rücksicht auf eine spätere Anwendung ausdrücklich hervorgehoben werden soll, unabhängig davon, ob $\sum |b_\nu|$ *konvergiert* oder *divergiert*)

Unter der Voraussetzung (*a*) läßt sich die erste der Gleichungen (11) des vorigen Paragraphen, S 845, in die Form setzen:

$$(10) \qquad |\sigma_n| = \sum_0^{n-1} |\beta_{\nu+1}| \cdot |B_\nu|^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

und hieraus würde folgen, daß $|\sigma_n|$ sicher *von Null verschieden* ist und mit wachsendem *n niemals abnimmt*, wenn auch nur für irgendein einziges $\nu < n - 1$ *gleichzeitig*

$$|\beta_{\nu+1}| > 0, \quad |B_\nu| > 0$$

Ist nun etwa schon $|\beta_1| > 0$, so hat man

$$\sigma_1 = |\beta_1| \cdot |B_0|^2 = |\beta_1| > 0.$$

Ist dagegen b_{2k+1}, wo $k > 0$, der *erste* von Null verschiedene Teilnenner mit ungeradem Index und *genügt er überdies der Bedingung:* $|\beta_{2k+1}| > 0$, so ergibt sich, wegen: $b_1 = b_3 = \cdots = b_{2k-1} = 0$, aus der Rekursionsformel

$$B_{2\nu+1} = B_{2\nu-1} \text{ für } \nu = 1, 2, \cdots, k-1,$$

d. h.

$$B_{2k-1} = B_{2k-3} = \cdots = B_1 = b_1 = 0,$$

---

1) Anders ausgesprochen die $\beta'_{2\nu}$ besitzen *gleiches*, die $\beta'_{2\nu+1}$ das *entgegengesetzte* Vorzeichen, soweit sie von Null verschieden sind. Inkorrekt und irreführend wäre es dagegen, die fragliche Bedingung so zu fassen: „die β'_ν sollen *alternierende* Vorzeichen besitzen" — da ja beliebig viele $\beta'_\nu = 0$ sein können, insbesondere sogar *alle* $\beta_{2\nu}$ bzw *alle* $\beta_{2\nu+1}$ bis auf ein *einziges*, sodaß dann also von einem „alternieren" der Vorzeichen nicht einmal *cum grano salis* die Rede sein kann

und andererseits:

$$B_{2\nu} = B_{2\nu-2} \quad \text{für } \nu = 1, 2, \dots k,$$

d. h.

$$B_{2k} = B_{2k-2} = \dots = B_0 = 1,$$

und daher:

$$B_{2k+1} = b_{2k+1} B_{2k} + B_{2k-1} = b_{2k+1} \neq 0,$$

also schließlich nach Gl. (10):

$$(11) \qquad |\sigma_{2k+1}| = |\beta_{2k+1}| \cdot |b_{2k+1}|^2 > 0.$$

Genügt dagegen das *erste* von Null verschiedene b_ν mit ungeradem Index *nicht der Bedingung*: $|\beta_\nu| > 0$, so soll ja nach Voraussetzung mindestens einmal der Fall eintreten, daß *gleichzeitig*:

$$|\beta_m| > 0, \quad |\beta_{m+1}| > 0$$

Da sodann, wegen: $|A_m B_{m-1} - A_{m-1} B_m| = 1$, keinesfalls B_{m-1}, B_m *gleichzeitig Null* sein können, so ist von den Ausdrücken:

$$|\beta_m| \cdot |B_{m-1}|^2, \quad |\beta_{m+1}| \cdot |B_m|^2$$

mindestens einer *von Null verschieden* und daher mit Sicherheit:

$$(11') \qquad |\sigma_{m+1}| = \sum_0^m |\beta_{\nu+1}| \cdot |B_\nu|^2 > 0.$$

In jedem der betrachteten Fälle ergibt sich also, daß σ_ν für ein gewisses $\nu = n$ und somit auch für $\nu > n$ *von Null verschieden* ausfällt. Da aber nach Gl. (8) des vorigen Paragraphen (S. 845): $\sigma_\nu = \Re(\tilde{B}_\nu B_{\nu-1})$, so ist $B_{\nu-1}$ für $\nu \geqq n$, also schließlich B_ν für $\nu \geqq n-1$ durchweg *von Null verschieden*.

Bis hierher wurde die Beschaffenheit der Reihe $\sum |b_\nu|$ noch in keiner Weise in Rechnung gezogen. Ist nun aber $\sum |b_\nu|$ *konvergent*, so bleiben, wie schon beim Beweise von Satz (I) hervorgehoben wurde, die $|B_\nu|$ unter einer endlichen Schranke und es existieren nach Gl. (3) die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} B_{2n}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} B_{2n+1}$ als bestimmte Zahlen (zunächst noch mit eventuellem Einschluß der *Null*). Das gleiche gilt dann offenbar auch von den konjugierten Grenzwerten $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{B}_{2n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{B}_{2n+1}$ und es stellt somit auch:

$$(12) \qquad \lim_{n\to\infty} \sigma_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \Re(\tilde{B}_{2n+1} B_{2n})$$

eine bestimmte Zahl vor. Da aber $|\sigma_\nu|$ von einem bestimmten ν ab *von Null verschieden* ist und mit wachsendem ν *niemals abnimmt*, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{2n+1}$ sicher *von Null verschieden*. Das nämliche gilt daher von $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{B}_{2n+1}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} B_{2n}$, also schließlich auch von $\lim\limits_{n\to\infty} B_{2n+1}$ (da ja die *Endlichkeit* dieser Grenzwerte bereits erwiesen ist).

Da andererseits nach Satz (I), Gl. (3) auch $\lim_{n\to\infty} A_{2n}$, $\lim_{n\to\infty} A_{2n+1}$ bestimmte Zahlen sind, so folgt jetzt das gleiche für $\lim_{n\to\infty} \frac{A_{2n}}{B_{2n}}$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}}$, während zugleich die *Verschiedenheit* dieser beiden Grenzwerte, genau wie in Satz (I), aus der Beziehung $\lim_{n\to\infty} (A_{2n+1} B_{2n} - A_{2n} B_{2n+1}) = 1$ unmittelbar hervorgeht. Hiermit ist also die Gültigkeit des ausgesprochenen Satzes (II) für den Fall der Voraussetzung (a) bewiesen.

Der Fall der Voraussetzung (b) läßt sich in vollkommen analoger Weise erledigen, wenn man dabei von der zweiten der Gleichungen (11) am Schlusse des vorigen Paragraphen ausgeht, welche ja unter der Voraussetzung, daß die Zahlen $(-1)^{\nu} \beta'_{\nu}$ gleichbezeichnet sind, die Umformung zuläßt

$$|\sigma'_n| = \sum_{0}^{n-1}{}^{\nu} |\beta'_{\nu+1}| \cdot |B_{\nu}|^2.$$

Einfacher kann man jedoch das fragliche Ergebnis unmittelbar aus dem zuvor gefundenen mit Hilfe einer Äquivalenz-Transformation ableiten. Setzt man nämlich in der Äquivalenzformel (§ 94, Nr. 1, S. 707, Fußnote 3):

$$(13) \qquad \left[\frac{1}{\beta_{\nu} + \beta'_{\nu} i}\right]_1^n \simeq \frac{1}{c_0} \cdot \left[\frac{c_{\nu-1} c_{\nu}}{c_{\nu}(\beta_{\nu} + \beta'_{\nu} i)}\right]_1^n$$

speziell für $\nu = 0, 1, 2, \cdots$:

$$c_{\nu} = (-1)^{\nu} i, \quad \text{also} \quad c_{\nu-1} c_{\nu} = (-1)^{2\nu-1} \cdot i^2 = +1,$$

so ergibt sich:

$$(14) \qquad \left[\frac{1}{\beta_{\nu} + \beta'_{\nu} i}\right]_1^n \simeq -i \cdot \left[\frac{1}{(-1)^{\nu-1} \beta'_{\nu} + (-1)^{\nu} \beta_{\nu} i}\right]_1^n,$$

womit dann in der Tat der durch die Voraussetzung (b) charakterisierte Fall auf den zuvor betrachteten zurückgeführt ist.[1])

Zusatz. Sind die Bedingungen (a) und (b), soweit sie sich auf die *Vorzeichen* der β_{ν}, β'_{ν} beziehen, *gleichzeitig* erfüllt, so bedarf die schon in dem gemeinsamen Teile der Voraussetzung enthaltene Bedingung, daß mindestens *einmal*: $b_{2\nu+1} \neq 0$ sein soll, keines weiteren Zusatzes, da es ja dann völlig gleichgültig ist, *welche* der Beziehungen: $\beta_{2\nu+1} \neq 0$, $\beta'_{2\nu+1} \neq 0$ für das *erste* nicht verschwindende $b_{2\nu+1}$ besteht, andererseits aber mindestens *eine* dieser beiden Beziehungen sicher er-

1) Setzt man in der Formel (13): $c_{\nu} = -1$ ($\nu = 0, 1, 2, \cdots$), so folgt:

$$\left[\frac{1}{\beta_{\nu} + \beta'_{\nu} i}\right]_1^n \simeq - \left[\frac{1}{-\beta_{\nu} - \beta'_{\nu} i}\right]_1^n.$$

Mit Benützung dieser Beziehung hätten wir uns schon bei der Behandlung des Falles (a) auf die Annahme: $\beta_{\nu} > 0$ beschränken können

füllt ist. Daraus folgt insbesondere, daß in diesem Falle die B_ν zum mindesten von einer bestimmten Stelle ab durchweg *von Null verschieden* sind.

3. Die in Satz (I) als *hinreichend* für die *Divergenz* des Kettenbruches erkannten Bedingungen lassen sich ohne weiteres auch in solche umformen, die für die *Konvergenz* als *notwendige* erscheinen, nämlich:

(III) *Für die Konvergenz des Kettenbruches* $\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *ist notwendig, daß mindestens ein* $b_{2\nu+1}$ *von Null verschieden ist und daß die Reihe* $\sum |b_\nu|$ *divergiert.*

Diese *notwendigen Konvergenz*bedingungen werden zu *hinreichenden* durch das Hinzutreten gewisser Ergänzungsbedingungen, welche den in Satz (II) mit (*a*) und (*b*) bezeichneten ähnlich, jedoch noch etwas enger gefaßt sind, nämlich:

(IV) *Der Kettenbruch* $\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *ist konvergent, wenn außer den in Satz* (III) *als notwendig bezeichneten Bedingungen noch eine der folgenden drei Voraussetzungen erfüllt ist:*

1ᵃ) *Die* β_ν *sind gleichbezeichnet, und für die* β'_ν *besteht eine Beziehung von der Form:*

$$|\beta'_\nu| \leq \gamma \cdot |\beta_\nu| \quad (\text{wo } \gamma \text{ irgendeine positive Zahl})\text{[1]} \tag{15a}$$

1ᵇ) *Die Zahlen* $(-1)^\nu \cdot \beta'_\nu$ *sind gleichbezeichnet, und für die* β_ν *besteht eine Beziehung von der Form:*

$$|\beta_\nu| \leq \gamma \cdot |\beta'_\nu|.$$

2) *Die Zahlen* β_ν *sind unter sich gleichbezeichnet, ebenso die* $(-1)^\nu \cdot \beta'_\nu$ *(dabei können aber die* β_ν *und* $(-1)^\nu \cdot \beta'_\nu$ *verschiedenes Vorzeichen haben).*

Beweis. Die Voraussetzung 1ᵇ) kann, analog wie in Nr. 2, mit Hilfe der Äquivalenzformel (14) auf den Fall 1ᵃ) zurückgeführt werden. Das gleiche gilt aber, wie später gezeigt werden soll, bei passender Spezialisierung der allgemeinen Äquivalenzformel (13) auch bezüglich der Voraussetzung 2), sodaß es sich also im wesentlichen nur um die Behandlung des Falles 1ᵃ) handeln wird.

Da auf Grund der in 1ᵃ) enthaltenen Bedingung: $|\beta'_\nu| \leq \gamma \cdot |\beta_\nu|$ stets: $|\beta_\nu| > 0$, sobald: $|\beta'_\nu| > 0$, so folgt, daß das *erste* nicht ver-

---

1) Für $\beta_\nu > 0$, $\beta'_\nu = 0$ $(\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ resultiert das Konvergenzkriterium von § 102, Nr. 2, Satz (II), S. 764, als spezieller Fall.

schwindende $b_{2\nu+1}$ jedenfalls ein *von Null verschiedenes* $\beta_{2\nu+1}$ enthalten muß, sodaß also die unter (a) angeführten Voraussetzungen des Satzes (II) erfüllt sind und somit, wie dort gezeigt wurde (S. 850/1), die B_ν zum mindesten von einer bestimmten Stelle ab durchweg *von Null verschieden* ausfallen. Dann läßt sich zunächst zeigen, daß, geradeso wie unter den Voraussetzungen des Satzes (II), die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_{2n}}{B_{2n}}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}}$ als bestimmte Zahlen existieren, und zwar unabhängig davon, ob die Reihe $\sum |b_\nu|$ *konvergiert* oder *divergiert*. Mit Hinzunahme der *letzteren* Voraussetzung wird sich dann ergeben, daß jene beiden Grenzwerte *zusammenfallen*, der Kettenbruch also *konvergiert*.

Wird m so angenommen, daß für $\nu > 2m$: $|B_\nu| > 0$, so hat man für jedes $n > m$ die Identitäten:

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{A_{2n}}{B_{2n}} = \dfrac{A_{2m}}{B_{2m}} + \sum\limits_{m+1}^{n} \left(\dfrac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} - \dfrac{A_{2\nu-2}}{B_{2\nu-2}}\right) \\ \dfrac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}} = \dfrac{A_{2m+1}}{B_{2m+1}} + \sum\limits_{m+1}^{n} \left(\dfrac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} - \dfrac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}}\right), \end{cases}$$

aus denen hervorgeht, daß die Existenz und Endlichkeit der beiden Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_{2n}}{B_{2n}}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}}$ mit der *Konvergenz* der beiden Reihen:

$$(17)\qquad \sum_{m+1}^{\infty} \left(\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} - \frac{A_{2\nu-2}}{B_{2\nu-2}}\right) \quad \text{und:} \quad \sum_{m+1}^{n} \left(\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} - \frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}}\right)$$

zusammenfällt. Diese Konvergenz ist aber offenbar gesichert, wenn die Reihe:

$$(18)\qquad \sum \left|\frac{A_{\nu+1}}{B_{\nu+1}} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right|$$

konvergent ist, da dann jede der beiden Reihen (17) *absolut konvergiert*.

Nun folgt aus der verallgemeinerten Differenzenformel (IX) des § 92, Nr. 2, S. 697, für $\varrho = 2$, wenn man schließlich noch ν durch $\nu - 1$ ersetzt[1]):

$$(19)\qquad \frac{A_{\nu+1}}{B_{\nu+1}} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} = (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{b_{\nu+1}}{B_{\nu+1} B_{\nu-1}},$$

---

1) Vgl. auch § 100, Nr. 1, Fußnote 2, S. 747. Übrigens gewinnt man die Beziehung (19) auch aus der gewöhnlichen Differenzenformel (21) des Textes, wenn man zu ihr die durch Substitution von $\nu - 1$ an Stelle von ν daraus hervorgehende addiert und berücksichtigt, daß:

$$B_{\nu+1} - B_{\nu-1} = b_{\nu+1} B_\nu$$

sodaß also die Glieder der Reihe (18) mit den entsprechenden der Reihe

$$(20) \qquad \sum \left| \frac{b_{\nu+1}}{B_{\nu+1} B_{\nu-1}} \right|$$

identisch sind. Sobald dann deren *Konvergenz* und somit, nach dem bisher Gesagten, die *Existenz* der fraglichen Grenzwerte erwiesen ist, würde das *Zusammenfallen* der letzteren unmittelbar aus der gewöhnlichen Differenzenformel

$$(21) \qquad \frac{A_{\nu+1}}{B_{\nu+1}} - \frac{A_\nu}{B_\nu} = (-1)^\nu \frac{1}{B_{\nu+1} B_\nu}$$

hervorgehen, sobald noch gezeigt werden kann, daß.

$$(22) \qquad \lim_{\nu \to \infty} B_{\nu+1} B_\nu = \infty.$$

Hiernach reduziert sich also der Beweis für die *Konvergenz des Kettenbruches* $\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ auf denjenigen für die *Konvergenz der Reihe* (20) und die *Existenz der Beziehung* (22)

Man hat nun, wie beim Beweise des Satzes (II) gezeigt wurde (s S. 850/1, Gl. (10), (11)).

$$(23) \qquad \sigma_n = \sum_{0}^{n-1} |\beta_{\nu+1}| \cdot |B_\nu|^2 > 0 \text{ etwa für } n > n_0$$

Zugleich ergibt sich hieraus, daß.

$$(24) \qquad |\sigma_{n+1}| - |\sigma_n| = |\beta_{n+1}| \cdot |B_n|^2$$

und daß $|\sigma_n|$ mit wachsendem n niemals abnimmt, mithin $\lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n|$ zum mindesten im weiteren Sinne *existiert.* Ferner sind dann die B_n, wegen: $\sigma_n = \Re(B_n \bar{B}_{n-1})$ (s S. 845, Gl. (8)), für $n \geq n_0$ *von Null verschieden,* und man findet daher für $\nu > n_0$, wegen:

$$|b_{\nu+1}| < |\beta_{\nu+1}| + |\beta'_{\nu+1}| < (1+\gamma) \cdot |\beta_{\nu+1}|,$$

zunächst:

$$\left| \frac{b_{\nu+1}}{B_{\nu+1} B_{\nu-1}} \right| = \frac{|b_{\nu+1}| \cdot |B_\nu|^2}{|B_{\nu+1} B_\nu| \cdot |B_\nu B_{\nu-1}|} < \frac{(1+\gamma) \cdot |\beta_{\nu+1}| \cdot |B_\nu|^2}{|B_{\nu+1} B_\nu| \cdot |B_\nu B_{\nu-1}|}$$

und sodann mit Benützung von Gl. (24) und § 110, Ungl. (9), S 845:

$$(25) \qquad \left| \frac{b_{\nu+1}}{B_{\nu+1} B_{\nu-1}} \right| < (1+\gamma) \frac{|\sigma_{\nu+1}| - |\sigma_\nu|}{|\sigma_{\nu+1}| \cdot |\sigma_\nu|} = (1+\gamma) \left(\frac{1}{|\sigma_\nu|} - \frac{1}{|\sigma_{\nu+1}|} \right),$$

woraus unmittelbar die *Konvergenz* der Reihe: $\sum\limits_{n_0}^{\infty} \left| \frac{b_{\nu+1}}{B_{\nu+1} B_{\nu-1}} \right|$ hervorgeht, da ja die Reihe: $\sum\limits_{n_0}^{\infty} \left(\frac{1}{|\sigma_\nu|} - \frac{1}{|\sigma_{\nu+1}|} \right)$ infolge der Monotonie der $|\sigma_\nu|$ bei wachsendem ν sicher konvergiert.

Wir zeigen nun weiter, daß die Existenz eines *endlichen* $\lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n|$ *nur* dann möglich ist, wenn die Reihe: $\sum |b_\nu|$ *konvergiert* (daß sie im letzteren Falle auch wirklich allemal stattfindet, wurde ja übrigens beim Beweise des Satzes (II) gezeigt — s. S 851, Gl (12))

Die Rekursionsformel für $B_{\nu+1}$ läßt sich, falls $|B_{\nu-1}| > 0$, also für $\nu > n_0$ in die Form setzen:

$$\frac{B_{\nu+1}}{B_{\nu-1}} = 1 + \frac{b_{\nu+1} B_\nu}{B_{\nu-1}},$$

sodaß durch Substitution von: $\nu = 2m+1, 2m+3, \cdots, 2n-1$ bzw. von: $\nu = 2m+2, 2m+4, \cdots, 2n$ (wo: $2m > n_0$) und Multiplikation der resultierenden Gleichungen sich ergibt

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{B_{2n}}{B_{2m}} = \prod\limits_{m+1}^{n} {}^{\nu} \left(1 + \dfrac{b_{2\nu} B_{2\nu-1}}{B_{2\nu-2}}\right) \\[2ex] \dfrac{B_{2n+1}}{B_{2m+1}} = \prod\limits_{m+1}^{n} {}^{\nu} \left(1 + \dfrac{b_{2\nu+1} B_{2\nu}}{B_{2\nu-1}}\right). \end{cases}$$

Wird nun angenommen, daß $\lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n|$ *endlich* ausfällt, so muß, wegen: $|\sigma_n| = \sum\limits_0^{n-1} {}^{\nu} |\beta_{\nu+1}| \cdot |B_\nu|^2$ (nach Gl (23)), die Reihe: $\sum\limits_0^{\infty} {}^{\nu} |\beta_{\nu+1}| \cdot |B_\nu|^2$ *konvergieren*, folglich auch, wegen: $|b_{\nu+1}| \leqq (1+\gamma) \cdot |\beta_{\nu+1}|$, die Reihe: $\sum\limits_0^{\infty} {}^{\nu} |b_{\nu+1}| \cdot |B_\nu|^2$. Da aber für $\nu > n_0$:

$$\left|\frac{b_{\nu+1} B_\nu}{B_{\nu-1}}\right| = \frac{|b_{\nu+1}| \cdot |B_\nu|^2}{|B_\nu B_{\nu-1}|} \leqq \frac{|b_{\nu+1}| \cdot |B_\nu|^2}{|\sigma_\nu|} \quad \text{(S 845, Ungl. (9)).}$$

$$(27)\qquad\qquad \leqq \frac{|b_{\nu+1}| \cdot |B_\nu|^2}{|\sigma_{n_0}|},$$

so folgt aus der *Konvergenz* der Reihe: $\sum |b_{\nu+1}| \cdot |B_\nu|^2$ auch diejenige der Reihe: $\sum \left|\dfrac{b_{\nu+1} B_\nu}{B_{\nu-1}}\right|$, mithin auch diejenige der beiden Teilreihen, welche entstehen, wenn man dem Index ν *nur gerade* oder *nur ungerade* Zahlenwerte beilegt. Beachtet man noch, daß in den beiden Produkten (26) niemals ein Faktor mit dem Werte *Null* vorkommen kann (da beim Eintreten dieses Falles alle B_{2n} bzw B_{2n+1} von der betreffenden Stelle ab den Wert *Null* haben würden, was den bisherigen Feststellungen widerspricht), so folgt, daß jene Produkte für $n \longrightarrow \infty$ in *absolut konvergierende* unendliche Produkte (ohne Nullfaktoren) übergehen und daß daher $\lim\limits_{n\to\infty} B_{2n}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} B_{2n+1}$ als *bestimmte, von Null verschiedene Zahlen* existieren Da infolgedessen die (bereits für jedes *einzelne*

$\nu \geqq n_0$ als *von Null verschieden* erkannten) $|B_\nu|$ für $\nu \geqq n_0$ sogar eine *von Null verschiedene untere Grenze* besitzen müssen, so folgt weiter, daß gleichzeitig mit der Reihe: $\sum |b_{\nu+1}| \cdot |B_\nu|^2$ auch die Reihe: $\sum |b_\nu|$ *konvergieren* muß.

Somit ergibt sich schließlich, daß die *Divergenz* von $\sum |b_\nu|$ stets die Beziehung $\lim\limits_{n \to \infty} |\sigma_\nu| = +\infty$ nach sich zieht. Da aber nach Ungl. (9), S. 845: $|B_n B_{n-1}| \geqq |\sigma_n|$, so folgt unter Voraussetzung der *Divergenz* von $\sum |b_\nu|$:

$$\lim_{n \to \infty} |B_n B_{n-1}| = +\infty, \tag{28}$$

womit also der auf die Voraussetzung 1^a^) bzw 1^b^) bezügliche Teil des Satzes (IV) nunmehr bewiesen ist.

Bei der noch zu erledigenden Behandlung des Falles 2) können wir, ohne die Allgemeinheit des Endergebnisses zu beeinträchtigen, uns auf die Annahme beschränken, daß die Zahlen $(-1)^\nu \cdot \beta'_\nu$ *dasselbe* Vorzeichen haben wie die β_ν. Betrachtet man nämlich zwei Kettenbrüche von der Form:

$$\left[\frac{1}{\beta_\nu + \beta'_\nu i}\right]_1^\infty \text{ und: } \left[\frac{1}{\beta_\nu - \beta'_\nu i}\right]_1^\infty,$$

oder noch etwas allgemeiner:

$$\left[\frac{\alpha_\nu + \alpha'_\nu i}{\beta_\nu + \beta'_\nu i}\right]_1^\infty \text{ und: } \left[\frac{\alpha_\nu - \alpha'_\nu i}{\beta_\nu - \beta'_\nu i}\right]_1^\infty,$$

so folgt, daß jeder *Näherungsbruch* des einen Kettenbruches dem entsprechenden des anderen *konjugiert* ausfallen muß[1]) und daß daher zwei derartig konjugierte Kettenbrüche stets *gleichzeitig* konvergieren bzw divergieren, daß es also gegebenenfalls vollständig genügt, die *Konvergenz* des *einen* nachzuweisen.

Dies vorausgeschickt, seien also jetzt die β_ν und $(-1)^\nu \cdot \beta'_\nu$, soweit sie von Null verschieden, durchweg *gleichbezeichnet*. Wendet man sodann auf den betreffenden Kettenbruch die Äquivalenzformel (13) in der Weise an, daß man setzt:

$$c_\nu = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(1 + (-1)^{\nu+1} i) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

also:

$$c_{\nu-1}\, c_\nu = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1, \; |c_\nu| = 1,$$

so ergibt sich:

$$\left[\frac{1}{\beta_\nu + \beta'_\nu i}\right]_1^\infty \simeq \sqrt{\tfrac{1}{2}}(1-i) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{\tfrac{1}{2}}(\beta_\nu + (-1)^\nu \cdot \beta'_\nu) + \sqrt{\tfrac{1}{2}}(\beta'_\nu + (-1)^{\nu+1} \cdot \beta_\nu) i}\right]_1^\infty. \tag{29}$$

1) S § 70, Nr. 3, S. 537.

Sind nun die β_ν und $(-1)^\nu \cdot \beta'_\nu$, soweit sie von Null verschieden, durchweg gleichbezeichnet, so findet man:

$$|\beta_\nu + (-1)^\nu \cdot \beta'_\nu| = |\beta_\nu| + |\beta'_\nu|$$
$$|\beta'_\nu + (-1)^{\nu+1} \cdot \beta_\nu| = \big||\beta_\nu| - |\beta'_\nu|\big|$$

und daher:

$$(30) \qquad \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,|\beta'_\nu + (-1)^{\nu+1} \cdot \beta_\nu| \leqq \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,|\beta_\nu + (-1)^\nu \cdot \beta'_\nu|,$$

d. h. die Teilnenner des transformierten Kettenbruches genügen der für den Fall 1^a) maßgebenden Bedingung (15a), wenn daselbst $\gamma = 1$ gesetzt wird. Zugleich hat man:

$$|\sqrt{\tfrac{1}{2}}(\beta_\nu + (-1)^\nu \cdot \beta'_\nu) + \sqrt{\tfrac{1}{2}}(\beta_\nu + (-1)^{\nu+1} \cdot \beta'_\nu)i|$$
$$= |\beta_\nu + \beta'_\nu i| \cdot |\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(1 + (-1)^{\nu+1} \cdot i)| = |b_\nu|,$$

sodaß also der transformierte Kettenbruch den sämtlichen für die Konvergenz erforderlichen Bedingungen genügt, mithin auch der gegebene Kettenbruch $\left[\frac{1}{\beta_\nu + \beta'_\nu i}\right]_1^\infty$ *konvergiert.*[1])

4. Der Kettenbruch $\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ braucht, falls er auf Grund des vorstehenden Satzes (IV) *konvergiert*, *nicht unbedingt* zu konvergieren. Zunächst bemerke man, daß für den Kettenbruch $\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_2^\infty$ die b_ν mit *geradem* Index dieselbe Rolle spielen wie für den ursprünglichen die b_ν mit *ungeradem* Index. Wenn also unter den b_ν mit *ungeradem* oder mit *geradem* Index nur eine *endliche* Anzahl *von Null verschiedener* sich befindet und wenn dann etwa $b_{2m-1} \neq 0$ bzw. $b_{2m} \neq 0$ das *letzte* b_ν dieser Art bedeutet, so wird jeder der Kettenbrüche: $\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_{2n+1}^\infty$ bzw. $\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_{2n+2}^\infty$ für $n \geqq m$ *divergent.* Soll also die *Konvergenz* des Kettenbruches $\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ eine *unbedingte* sein, so ist dafür offenbar *notwendig*, daß unter den b_ν mit *ungeradem*, wie auch mit *geradem* Index *unendlich viele von Null verschieden* sind. Diese Bedingung ist dann aber auch *hinreichend*, falls im übrigen eine der Bedingungsformen des Satzes (IV) erfüllt ist, da diese letzteren durch Weglassung von Anfangsgliedern ja nicht beeinträchtigt werden.

---

1) Aus dem Umstande, daß zur Herleitung dieses Ergebnisses das Kriterium 1^a) nur für den besonderen, verhältnismäßig niedrigen Wert $\gamma = 1$ in Anspruch genommen wurde, erkennt man, daß die Bedingung 2) von merklich geringerer Tragweite ist als die Bedingung 1^a), und daß sie einer der Willkürlichkeit von γ entsprechenden Erweiterung fähig sein muß, wie im übrigen aus dem Folgenden (s. den Schluß von Nr. 4) noch des näheren hervorgehen wird.

Schließlich sei noch hervorgehoben, daß die Brauchbarkeit der Sätze (II)—(IV) für Kettenbrüche, die nicht von vornherein in der ersten Hauptform vorliegen, äußerst beschränkt ist, da ihre Übertragung auf Kettenbrüche der allgemeinen Form $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ (s die Formeln (9), S. 849) Bedingungen liefert, die viel zu verwickelt sind, um irgendwelchen praktischen Nutzen zu gewähren — es sei denn, daß die a_ν von vornherein ganz besonderen Beschränkungen unterliegen. Hat man z. B. durchweg: $a_{2\mu-1} = a_{2\mu}$, so ergibt sich mit Hilfe der soeben angeführten Formeln die einfache Beziehung:

$$(31)\quad \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_1|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \frac{a_3|}{|b_4} + \cdots \simeq \frac{1|}{|a_1^{-1}b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|a_3^{-1}b_3} + \frac{1|}{|b_4} + \cdots\cdots$$

und bei weiterer Spezialisierung, wenn man durchweg $a_\nu = a$ setzt:

$$(32a)\quad \left[\frac{a}{b_\nu}\right]_1^\infty \simeq \frac{1|}{|a^{-1}b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|a^{-1}b_3} + \frac{1|}{|b_4} + \cdots\cdots.$$

Die letztere Beziehung läßt sich übrigens auch durch die folgende ersetzen:

$$(32b)\quad \left[\frac{a}{b_\nu}\right]_1^\infty \simeq a^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{1}{a^{-\frac{1}{2}}b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{a^{\frac{1}{2}}|}{|a^{-\frac{1}{2}}b_1} + \frac{1|}{|a^{-\frac{1}{2}}b_2} + \frac{1|}{|a^{-\frac{1}{2}}b_3} + \cdots\cdots,$$

wie unmittelbar aus der Äquivalenzformel (14) hervorgeht, wenn gesetzt wird:

$$c_\nu = a^{-\frac{1}{2}} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots).$$

Bezeichnet man ferner mit $\mathfrak{e}$ einen beliebigen Einheitsfaktor und setzt:

$$c_{2\mu} = \mathfrak{e}a^{-\frac{1}{2}}, \quad c_{2\mu+1} = \mathfrak{e}^{-1}a^{-\frac{1}{2}} \quad (\mu = 0, 1, 2, \cdots\cdots),$$

so gewinnt man an Stelle von (32b) die noch etwas allgemeinere Beziehung:

$$(32c)\quad \left[\frac{a}{b_\nu}\right]_1^\infty \simeq \frac{\mathfrak{e}^{-1}a^{\frac{1}{2}}|}{|\mathfrak{e}^{-1}a^{-\frac{1}{2}}b_1} + \frac{1|}{|\mathfrak{e}a^{-\frac{1}{2}}b_2} + \frac{1|}{|\mathfrak{e}^{-1}a^{-\frac{1}{2}}b_3} + \frac{1|}{|\mathfrak{e}a^{-\frac{1}{2}}b_4} + \cdots\cdots.$$

Hieraus ergibt sich insbesondere für $a = 1$:

$$(33)\quad \left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty \simeq \frac{\mathfrak{e}^{-1}|}{|\mathfrak{e}^{-1}b_1} + \frac{1|}{|\mathfrak{e}b_2} + \frac{1|}{|\mathfrak{e}^{-1}b_3} + \frac{1|}{|\mathfrak{e}b_4} + \cdots\cdots$$

eine Formel, die zur Verallgemeinerung des Konvergenzsatzes (IV) dienen kann. Danach erweist sich der Kettenbruch $\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ als *konvergent,* wenn zu den notwendigen Konvergenzbedingungen (III) noch hinzukommt, daß (bei beliebiger Wahl des Einheitsfaktors $\mathfrak{e}$) die Zahlen $\mathfrak{e}^{-1}b_{2\mu-1}$, $\mathfrak{e}b_{2\mu}$ ($\mu = 1, 2, 3, \cdots\cdots$) derjenigen Bedingung genügen, welche unter 1ª) für die b_ν gefordert wurde. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt,

daß die Tragweite dieses Kriteriums durchsichtiger wird, wenn man die an dieser Stelle uns noch nicht zur Verfügung stehende geometrische Darstellung der komplexen Zahlen zu Hilfe nimmt. Im übrigen erkennt man unmittelbar, daß die oben durchgeführte Behandlung der Bedingungsform 2) (s. Gl. (29)) als spezieller Fall ($\mathfrak{e} = \sqrt{\frac{1}{2}}\ (1+i)$) des vorstehenden Ergebnisses sich erweist.[1])

§ 112. Konvergenzkriterien für Kettenbrüche der zweiten Hauptform.

1. Hauptsatz

Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ *(bei beliebig komplexen* a_ν *einschließlich der Null) ist* **unbedingt konvergent**, *wenn eine unbegrenzte Folge positiver Zahlen* (ϑ_ν) *existiert, derart, daß:* $\vartheta_1 < 1$ *und für* $\nu \geqq 2$.

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} 0 < \vartheta_\nu \leqq 1 \\ 0 \leqq |a_\nu| \leqq \vartheta_{\nu-1}(1-\vartheta_\nu) \end{cases}$$ [2])

Und zwar ist stets

$$\text{(1)} \qquad \left|\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty\right| < \frac{|a_1|}{1-\vartheta_1} \quad (\text{falls: } |a_1| > 0),$$

außer wenn durchweg:

$$\text{(I')} \qquad a_\nu = -\vartheta_{\nu-1}(1-\vartheta_\nu) \neq 0 \quad (\nu \geqq 2)$$

und zugleich:

$$\text{(1'')} \qquad \sum_2^\infty{}^{\nu} \frac{(1-\vartheta_2)\cdots(1-\vartheta_\nu)}{\vartheta_2\cdots\vartheta_\nu} = +\infty,$$

---

1) Das gleiche gilt übrigens auch bezüglich der Zurückführung der Bedingungsform 1b) auf 1a) ($\mathfrak{e} = i$, s. Gl. (14), S. 850) und für etwaige Anwendung der Äquivalenzformel in Fußnote 1, S. 852 ($\mathfrak{e} = -1$).

2) Bezeichnet man mit $\mathfrak{e}_\nu$ ($\nu \geqq 2$) beliebige Einheitsfaktoren und setzt für $\nu \geqq 2$ speziell:

$$a_\nu = \mathfrak{e}_\nu \vartheta_{\nu-1}(1-\vartheta_\nu),$$

so folgt also (indem man noch $a_1 = 1$ setzt), daß der Kettenbruch

$$\left[\frac{1}{1},\ \frac{\mathfrak{e}_\nu \vartheta_{\nu-1}(1-\vartheta_\nu)}{1}\right]_2^\infty$$

unbedingt konvergiert, und zwar auch noch im Falle $\vartheta_1 = 1$, außer wenn durchweg $\mathfrak{e}_\nu = -1$ und die Reihe (I'') divergiert, in welchem Falle außerwesentliche Divergenz eintritt.

in welchem Falle:

(1') $$\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty = \frac{a_1}{1-\vartheta_1}$$

wird. Die unbedingte Konvergenz des Kettenbruches bleibt auch noch für $\vartheta_1 = 1$ erhalten, außer wenn die besonderen Bedingungen (I'), (I'') *gleichzeitig bestehen: in diesem Falle ist der Kettenbruch außerwesentlich divergent.*[1])

Beweis. Man hat (wenn die Näherungsbrüche wieder mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ bezeichnet werden):

(2) $B_0 = 1,\; B_1 = 1$ und für $\nu \geq 2$: $B_\nu = B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2}$,

mithin (für $\nu \geq 2$):

(3) $$\begin{aligned} |B_\nu| &\geq |B_{\nu-1}| - |a_\nu| \cdot |B_{\nu-2}| \\ &\geq |B_{\nu-1}| - \vartheta_{\nu-1}(1-\vartheta_\nu) \cdot |B_{\nu-2}| \end{aligned}$$

und, wenn man auf beiden Seiten dieser Ungleichung $\vartheta_\nu \cdot |B_{\nu-1}|$ subtrahiert:

(4) $$|B_\nu| - \vartheta_\nu |B_{\nu-1}| \geq (1-\vartheta_\nu)(|B_{\nu-1}| - \vartheta_{\nu-1} |B_{\nu-2}|)$$

Diese Rekursionsformel zeigt zunächst, daß stets:

(5) $$|B_\nu| - \vartheta_\nu |B_{\nu-1}| \geq 0, \text{ wenn: } |B_{\nu-1}| - \vartheta_{\nu-1} |B_{\nu-2}| \geq 0.$$

Da aber aus Ungl (4) für $\nu = 2$ folgt:

(6) $|B_2| - \vartheta_2 |B_1| \geq (1-\vartheta_2)(|B_1| - \vartheta_1 |B_0|) = (1-\vartheta_1)(1-\vartheta_2)$, also ≥ 0,

so ergibt sich, daß in der Tat Ungl. (5) für jedes $\nu \geq 2$ gilt. Man hat also:

$$|B_\nu| \geq \vartheta_\nu |B_{\nu-1}| \quad (\nu \geq 2)$$

und durch fortgesetzte Anwendung dieser Ungleichung bis $\vartheta_2 B_1$

(7) $$|B_\nu| \geq \vartheta_\nu \vartheta_{\nu-1} \cdots \vartheta_2, \text{ also jedenfalls } > 0,$$

woraus zunächst hervorgeht, daß die Folge der Näherungsbrüche *keine sinnlosen* enthält. Da das vorstehende Ergebnis völlig unabhängig davon ist, ob unter den a_ν solche mit dem Werte *Null* vorkommen, so soll es zunächst dazu benützt werden, um diesen besonderen Fall für $\nu \geq 2$ von vornherein zu erledigen. Es sei $a_{n+1} = 0$ (wo $n \geq 1$) der *erste* bzw. *einzige* Teilzähler dieser Art, dann ist auf Grund der üblichen Rekursionsformeln:

(8) $$\begin{cases} A_{n+1} = A_n & B_{n+1} = B_n \neq 0 \\ A_{n+2} = (1+a_{n+2})A_n & B_{n+2} = (1+a_{n+2})B_n \neq 0 \end{cases}$$

und somit:

$$\frac{A_{n+2}}{B_{n+2}} = \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} = \frac{A_n}{B_n}.$$

1) bzw. von der Form $\frac{0}{0}$, falls $a_1 = 0$ sein sollte.

Durch vollständige Induktion ergibt sich aber, daß dann *für jedes* $v > n$:

$$(9) \qquad \frac{A_v}{B_v} = \frac{A_n}{B_n}$$

(gleichgültig, ob für $v > n + 1$ noch beliebig viele $a_v = 0$ vorkommen oder nicht). Denn angenommen, es bestehen für irgendein $\mu > n$ Beziehungen von der Form:

$$\left.\begin{array}{ll} A_\mu = k_\mu A_n & B_\mu = k_\mu B_n \\ A_{\mu+1} = k_{\mu+1} A_n & B_{\mu+1} = k_{\mu+1} B_n \end{array}\right\} \text{wo: } k_\mu \neq 0,\ k_{\mu+1} \neq 0.$$

wie ja nach (8) für $\mu = n + 1$ tatsächlich der Fall ist, so folgt zunächst.

$$A_{\mu+2} = (k_{\mu+1} + k_\mu a_{\mu+2}) A_n \qquad B_{\mu+2} = (k_{\mu+1} + k_\mu a_{\mu+2}) B_n.$$

Da bereits feststeht, daß: $B_{\mu+2} \neq 0$, so ist auch: $k_{\mu+1} + k_\mu a_{\mu+2} \neq 0$, und man findet daher:

$$\frac{A_{\mu+2}}{B_{\mu+2}} = \frac{A_n}{B_n},$$

womit die Richtigkeit der fraglichen Behauptung (9) erwiesen ist.

Sollte schon $a_1 = 0$ sein, so folgt aus den Anfangsgleichungen.

$$A_0 = 0, \quad A_1 = a_1 = 0,$$

daß *für jedes* v:

$$A_v = 0,$$

also, da ja a_1 in den B_v gar nicht vorkommt und daher, wie zuvor, durchweg $B_v \neq 0$, *für jedes* v auch:

$$(10) \qquad \frac{A_v}{B_v} = 0.$$

Somit ergibt sich aus Gl. (9) und (10) für $v \longrightarrow \infty$:

Ist $a_v = 0$ *für beliebig viele* v, *während die übrigen* a_v *den Bedingungen* (I) *genügen, so ist der Kettenbruch* $\left[\frac{a_v}{1}\right]_1^\infty$ *konvergent, und zwar ist:*

$$(11) \quad \begin{cases} \left[\frac{a_v}{1}\right]_1^\infty = 0, \ \textit{wenn: } a_1 = 0 \\ \left[\frac{a_v}{1}\right]_1^\infty = \left[\frac{a_v}{1}\right]_1^n, \ \textit{wenn: } a_{n+1} = 0 \ (n \geqq 1), \ \textit{dagegen: } a_v \neq 0 \text{ für } v < n. \end{cases}$$

Enthält der Kettenbruch *unendlich viele* Teilzähler $a_v = 0$, so ist die Konvergenz sicher eine *unbedingte*, da ja jeder durch Weglassung von Anfangsgliedern entstehende Kettenbruch genau denselben Charakter hat wie der ursprüngliche. Enthält er nur eine *endliche* Anzahl und ist $a_m = 0$ der *letzte* derartige Teilzähler, so bleibt nur noch die *unbedingte* Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_v}{1}\right]_{m+1}^\infty$ zu erweisen, was weiterhin noch geschehen wird.

2. Die Annahme, daß unter den a_ν die *Null* vorkommt, kann also für die weitere Untersuchung ausscheiden[1]), und wir dürfen daher von jetzt ab ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß durchweg:

$$|a_\nu| > 0 \quad (\nu \geqq 1) \quad \text{und somit: } \vartheta_\nu < 1 \text{ für } \nu \geqq 2,$$

übrigens zunächst auch, entsprechend der Fassung des Hauptteiles unseres Satzes:

$$\vartheta_1 < 1.$$

Man hat alsdann nach Ungl. (6):

(6) $|B_2| - \vartheta_2 |B_1| \geqq (1-\vartheta_1)(1-\vartheta_2) > 0$ (*letzteres* mit Ausschluß der Gleichheit)

und daher nach Ungl. (4) für jedes $\nu \geqq 2$:

$$(4) \quad |B_\nu| - \vartheta_\nu |B_{\nu-1}| \geqq (1-\vartheta_\nu)(|B_{\nu-1}| - \vartheta_{\nu-1}|B_{\nu-2}|) > 0,$$

also durch Substitution von $\nu = 2, 3, \cdots, n$, Multiplikation der resultierenden Ungleichungen und Weglassung der beiden Seiten gemeinsamen (durchweg von *Null* verschiedenen) Faktoren:

$$(12) \qquad |B_n| - \vartheta_n |B_{n-1}| \geqq (1-\vartheta_1)(1-\vartheta_2)\cdots(1-\vartheta_n).$$

Dabei kommt offenbar das *Gleichheits*zeichen *dann* und *nur* dann zum Vorschein, wenn es in *jeder* der zur Herleitung benützten Beziehungen (4) ausnahmslos gilt, wenn also für $\nu = 2, 3, \cdots, n$ durchweg:

$$(4') \quad |B_\nu| - \vartheta_\nu |B_{\nu-1}| = (1-\vartheta_\nu)(|B_{\nu-1}| - \vartheta_{\nu-1}|B_{\nu-2}|),$$

anders geschrieben (übereinstimmend mit der Fassung (3)):

$$(3') \qquad |B_\nu| = |B_{\nu-1}| - \vartheta_{\nu-1}(1-\vartheta_\nu)|B_{\nu-2}|.$$

Wir wollen zeigen, daß dies *nur* möglich ist, wenn für $\nu = 2, 3, \cdots, n$ durchweg die Beziehung (1') besteht, und daß alsdann die B_ν $(\nu \leqq n)$ sämtlich *reell und positiv* sind.

Angenommen, es seien für irgendein bestimmtes $\nu \geqq 2$ die Zahlen $B_{\nu-2}$, $B_{\nu-1}$ *reell und positiv*, also:

$$(13) \qquad |B_{\nu-2}| = B_{\nu-2}, \quad |B_{\nu-1}| = B_{\nu-1},$$

so nimmt Gl. (3') die Form an:

$$(14) \qquad |B_\nu| = B_{\nu-1} - \vartheta_{\nu-1}(1-\vartheta_\nu) B_{\nu-2},$$

während andererseits aus der Rekursionsformel (2) folgen würde:

$$(15) \qquad |B_\nu| \geqq B_{\nu-1} - |a_\nu| B_{\nu-2}.$$

---

1) Daß in dem betreffenden Falle auch die Behauptung (I), nämlich:

$$\left| \left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty \right| < \frac{|a_1|}{1-\vartheta_1} \text{ für } \vartheta_1 < 1,$$

gültig bleibt, wird sich späterhin noch ergeben (s. Fußnote 2, S. 867).

Die Vergleichung von (14) und (15) zeigt, daß alsdann:

$$-|a_\nu| \leqq -\vartheta_{\nu-1}(1-\vartheta_\nu),$$

also:

$$|a_\nu| \geqq \vartheta_{\nu-1}(1-\vartheta_\nu).$$

Da aber nach (I):

$$|a_\nu| \leqq \vartheta_{\nu-1}(1-\vartheta_\nu),$$

so folgt, daß:

$$|a_\nu| = \vartheta_{\nu-1}(1-\vartheta_\nu), \tag{16}$$

und man erkennt durch nochmalige Vergleichung von (14) und (15), daß in (15) nur das *Gleichheits*zeichen gelten kann. Dies ist aber (wegen: $B_\nu = B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2}$) nur möglich, wenn a_ν *reell und negativ*, sodaß mit Berücksichtigung von (16) sich ergibt:

$$a_\nu = -\vartheta_{\nu-1}(1-\vartheta_\nu) \quad \text{(übereinstimmend mit (I'))}. \tag{17}$$

Zugleich liefert dann die Rekursionsformel (2) in Verbindung mit Gl. (14) die Beziehung:

$$B_\nu = B_{\nu-1} - \vartheta_{\nu-1}(1-\vartheta_\nu) B_{\nu-2} = |B_\nu|,$$

welche zeigt, daß B_ν jedenfalls *reell und nicht negativ* ist. Da aber bereits feststeht, daß die B_ν durchweg *von Null verschieden* sind (s. Ungl. (7)), so folgt, daß im vorliegenden Falle B_ν *wesentlich positiv* sein muß.

Wir finden also: Sind für irgend ein $\nu \geqq 2$: $B_{\nu-2}$, $B_{\nu-1}$ *positiv* und besteht die Gleichung (3'), so genügt a_ν der (mit Gl. (17) gleichlautenden) Beziehung (I'), und auch B_ν ist *positiv*. Da aber, wegen: $B_0 = B_1 = 1$, die bezüglich $B_{\nu-2}$, $B_{\nu-1}$ gemachte Voraussetzung für $\nu = 2$ erfüllt ist, so ergibt sich durch vollständige Induktion, daß das Bestehen der Gleichung (3') für $\nu = 2, 3, \cdots, n$ in dem gleichen Umfange die Existenz der Beziehung (I') nach sich zieht und daß dann alle B_ν für $\nu \leqq n$ *reell und positiv* ausfallen.

Umgekehrt: Genügt a_ν für $\nu = 2, 3, \cdots, n$ der Beziehung (I'), so lautet die Rekursionsformel (2) folgendermaßen:

$$B_\nu = B_{\nu-1} - \vartheta_{\nu-1}(1-\vartheta_\nu) B_{\nu-2} \quad (\nu \geqq 2), \tag{18}$$

und diese wird *identisch* mit der Beziehung (3'), sobald feststeht, daß alle B_ν *reell und positiv* sind. Bringt man aber Gl. (18) auf die Form:

$$B_\nu - \vartheta_\nu B_{\nu-1} = (1-\vartheta_\nu)(B_{\nu-1} - \vartheta_{\nu-1} B_{\nu-2}),$$

so folgt durch wiederholte Anwendung (vgl. Ungl. (12)):

$$B_\nu - \vartheta_\nu B_{\nu-1} = (1-\vartheta_1)(1-\vartheta_2)\cdots(1-\vartheta_\nu) \quad (\nu = 2, 3, \cdots, n)$$

und daher: $B_\nu > 0$, falls $B_{\nu-1} > 0$, was offenbar zutrifft, da ja $B_1 = 1 > 0$.

Hiernach gestattet jetzt das in Ungl. (12) enthaltene Ergebnis die folgende präzisere Fassung:

Genügen die $|a_\nu|$ *für* $\nu = 2, 3, \cdots, n$ *der Bedingung* (I) *(mit dem Zusatze:* $|a_\nu| > 0$ *für* $\nu \geq 1$*), so hat man, abgesehen von einem sogleich anzugebenden Einzelfall:*

(19a) $|B_n| - \vartheta_n |B_{n-1}| > (1-\vartheta_1)(1-\vartheta_2)\cdots(1-\vartheta_n)$ *mit Ausschluß der Gleichheit.*

Nur dann, wenn für $\nu = 2, 3, \cdots, n$ *die besondere Bedingung* (I′) *erfüllt ist, tritt an die Stelle der obigen Ungleichung die folgende Gleichung:*

(19b) $B_n - \vartheta_n B_{n-1} = (1-\vartheta_1)(1-\vartheta_2) \quad (1-\vartheta_n)$ (nebst: $B_\nu = |B_\nu|$ für $\nu \leq n$)

3. Führt man die folgenden Abkürzungen ein:

$$(20) \qquad \begin{cases} \vartheta_1 \vartheta_2 \cdots \vartheta_\nu = \Theta_\nu \\ (1-\vartheta_1)(1-\vartheta_2) \cdots (1-\vartheta_\nu) = \Theta'_\nu, \end{cases}$$

so gehen die Beziehungen (19a), (19b) durch Multiplikation mit $\frac{1}{\Theta_n}$ in die folgenden über:

$$(21a) \qquad \frac{1}{\Theta_n} \cdot |B_n| - \frac{1}{\Theta_{n-1}} \cdot |B_{n-1}| > \frac{\Theta'_n}{\Theta_n} \text{ (im \textit{allgemeinen Falle})}$$

$$(21b) \qquad \frac{1}{\Theta_n} \cdot B_n - \frac{1}{\Theta_{n-1}} \cdot B_{n-1} = \frac{\Theta'_n}{\Theta_n} \text{ (im \textit{Einzelfalle}).}$$

Ersetzt man n der Reihe nach durch $(n-1)$, $(n-2)\cdots 2$, so folgt durch Addition der resultierenden Beziehungen zu (21a) bzw. (21b)

$$\frac{1}{\Theta_n} \cdot |B_n| - \frac{1}{\Theta_1} \cdot |B_1| > \sum_2^n{}_\nu \frac{\Theta'_\nu}{\Theta_\nu}$$

bzw.

$$\frac{1}{\Theta_n} \cdot B_n - \frac{1}{\Theta_1} \cdot B_1 = \sum_2^n{}_\nu \frac{\Theta'_\nu}{\Theta_\nu},$$

und wenn man berücksichtigt, daß:

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{\Theta_1} \cdot |B_1| \\ \frac{1}{\Theta_1} \cdot B_1 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\Theta_1} = 1 + \frac{\Theta'_1}{\Theta_1},$$

so wird:

$$(22a) \qquad \frac{1}{\Theta_n} \cdot |B_n| > S_n \quad \text{(im \textit{allgemeinen Falle}),}$$

$$(22b) \qquad \frac{1}{\Theta_n} \cdot B_n = S_n \quad \text{(im \textit{Einzelfalle}),}$$

wenn noch gesetzt wird:

$$S_n = 1 + \sum_1^n \frac{\Theta'_\nu}{\Theta_\nu}, \tag{23}$$

also:

$$\left| \begin{aligned} & S_n - S_{n-1} = \frac{\Theta'_n}{\Theta_n} \quad (n = 2, 3, \cdots\cdots) \\ & S_1 = 1 + \frac{\Theta'_1}{\Theta_1} = \frac{1}{\vartheta_1}. \end{aligned} \right. \tag{24}$$

Nun ist (vgl. § 92, Nr. 2, (VII), S. 697):

$$\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^n = \frac{A_1}{B_1} + \sum_2^n \left(\frac{A_\nu}{B_\nu} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right) = a_1 + \sum_2^n (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{a_1 a_2 \cdots a_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu} \tag{25}$$

und daher:

$$\left| \left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^n \right| \leqq |a_1| \cdot \left(1 + \sum_2^n \frac{|a_2 a_3 \cdots a_\nu|}{|B_{\nu-1} B_\nu|}\right). \tag{26}$$

Da aber auf Grund der Voraussetzung (I), wenn wir zunächst den *allgemeinen Fall* ins Auge fassen:

$$|a_2 a_3 \cdots a_\nu| \leqq \vartheta_1 \vartheta_2 \cdots \vartheta_{\nu-1} (1 - \vartheta_2)(1 - \vartheta_3) \cdots (1 - \vartheta_\nu) = \frac{\Theta_{\nu-1} \Theta'_\nu}{1 - \vartheta_1}$$

und nach Ungl. (22 a):

$$|B_{\nu-1} B_\nu| > \Theta_{\nu-1} \Theta_\nu S_{\nu-1} S_\nu,$$

so findet man:

$$\frac{|a_2 a_3 \cdots a_\nu|}{|B_{\nu-1} B_\nu|} < \frac{1}{1-\vartheta_1} \cdot \frac{\Theta'_\nu}{\Theta_\nu S_{\nu-1} S_\nu} = \frac{1}{1-\vartheta_1} \cdot \frac{S_\nu - S_{\nu-1}}{S_\nu S_{\nu-1}} \quad \text{(s. Gl. 24)} \tag{27}$$

und da die (positiven) Zahlen S_ν mit wachsendem ν monoton zunehmen, so folgt, daß die Summe, welche das letzte Glied von Gl. (25) bildet, für $n \longrightarrow \infty$ in eine *absolut konvergente* Reihe übergeht und somit auch der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ *konvergiert.*

Zugleich ergibt sich aus Ungl. (26) mit Berücksichtigung von (27):

$$\left| \left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^n \right| < \frac{|a_1|}{1-\vartheta_1} \cdot \left((1 - \vartheta_1) + \sum_2^n \left(\frac{1}{S_{\nu-1}} - \frac{1}{S_\nu}\right)\right)$$

$$= \frac{|a_1|}{1-\vartheta_1}\left(1 - \frac{1}{S_n}\right) \quad \text{(s. die zweite Gleichung (24))} \tag{28}$$

und daher für $n \longrightarrow \infty$:

$$\left| \left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty \right| < \frac{|a_1|}{1-\vartheta_1}\left(1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{S_n}\right) \tag{29}$$

mit Ausschluß der Gleichheit, da die für hinlänglich große *endliche* n bestehende *Ungleichheit* durch den Grenzübergang $n \longrightarrow \infty$ nicht auf-

gehoben werden kann.[1]) Man findet also schließlich (auch im Falle: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$), wie behauptet:

$$(30) \qquad \left|\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty\right| < \frac{|a_1|}{1-\vartheta_1}.^{2)}$$

In dem oben bezeichneten, durch die Bedingung (I′) charakterisierten *Einzelfalle* hat man zunächst:

$$a_2 a_3 \cdots a_\nu = (-1)^{\nu-1}\vartheta_1\vartheta_2\cdots\vartheta_{\nu-1}(1-\vartheta_2)(1-\vartheta_3)\cdots(1-\vartheta_\nu) = (-1)^{\nu-1}\cdot\frac{\Theta_{\nu-1}\Theta_\nu'}{1-\vartheta_1}$$

und nach Gl. (22b):

$$B_{\nu-1}B_\nu = \Theta_{\nu-1}\Theta_\nu S_{\nu-1}S_\nu,$$

sodaß an die Stelle der Ungleichung (27) die folgende Gleichung tritt:

$$(31)\ \frac{a_2 a_3\cdots a_\nu}{B_{\nu-1}B_\nu} = (-1)^{\nu-1}\frac{1}{1-\vartheta_1}\cdot\frac{\Theta_\nu'}{\Theta_\nu S_{\nu-1}S_\nu} = \frac{1}{1-\vartheta_1}\cdot(-1)^{\nu-1}\cdot\frac{S_\nu - S_{\nu-1}}{S_\nu S_{\nu-1}}.$$

Infolgedessen geht die Gleichung (25) in die folgende über:

$$(32)\ \left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^n = \frac{a_1}{1-\vartheta_1}\left((1-\vartheta_1) + \sum_1^n{}_\nu\left(\frac{1}{S_{\nu-1}} - \frac{1}{S_\nu}\right)\right) = \frac{a_1}{1-\vartheta_1}\left(1 - \frac{1}{S_n}\right),$$

und es ergibt sich somit schließlich:

$$(33) \qquad \left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty = \frac{a_1}{1-\vartheta_1}\left(1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n}\right).$$

Dabei ist $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{S_n} > 0$ oder $= 0$, je nachdem die Reihe: $\sum\limits_1^\infty{}_\nu \frac{\Theta_\nu'}{\Theta_\nu}$ (s. Gl. (23)) oder auch die durch Weglassung des (von Null verschiedenen) Faktors $\frac{\vartheta_1}{1-\vartheta_1}$ und des Anfangsgliedes daraus hervorgehende Reihe: $\sum\limits_1^\infty{}_\nu \frac{(1-\vartheta_2)(1-\vartheta_3)\cdots(1-\vartheta_\nu)}{\vartheta_2\vartheta_3\cdots\vartheta_\nu}$ *konvergiert* oder *divergiert*. Im *ersteren* Falle hat man also, geradeso wie früher:

$$(34\text{a}) \qquad \left|\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty\right| < \frac{|a_1|}{1-\vartheta_1}$$

---

1) Vgl. § 108, Nr. 1 die Motivierung von Ungl. (15), S. 822.

2) Diese Ungleichung bleibt auch gültig, falls für irgendwelche $\nu > 1$ die Beziehung $a_\nu = 0$ besteht. Ist etwa $a_{m+1} = 0$ $(m > 0)$ der *erste* Teilzähler dieser Art, so hat man nach (11):

$$\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty = \left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^m$$

und andererseits nach (28) bzw. (32):

$$\left|\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^m\right| \leqq \frac{|a_1|}{1-\vartheta_1}\left(1 - \frac{1}{S_m}\right) < \frac{|a_1|}{1-\vartheta_1}.$$

und nur, wenn jene Reihe *divergiert*, also die Voraussetzung (I″) erfüllt ist:

$$\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty = \frac{a_1}{1-\vartheta_1}. \tag{34b}$$

Da die vorstehenden Konvergenzbetrachtungen auch für jeden Kettenbruch von der Form: $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_{m+1}^\infty$ (wo $m > 0$) gültig bleiben, so ergibt sich zugleich, daß die Konvergenz eine *unbedingte* ist.

Es bleibt noch der Fall: $\vartheta_1 = 1$ zu erledigen. Hier folgt zunächst, daß auf Grund der bisherigen Ergebnisse der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_2^\infty$ (unbedingt) *konvergiert*. Daraus würde aber auch sofort die *Konvergenz* des gegebenen Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ hervorgehen, falls:

$$\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_2^\infty \neq -1,$$

während für.

$$\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_2^\infty = -1$$

offenbar *außerwesentliche Divergenz*[1]) eintreten müßte. Nun ist aber nach Ungl. (30) bzw. (34a):

$$\left|\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_2^\infty\right| < \frac{|a_2|}{1-\vartheta_2} \text{ d. h.} < 1, \text{ wegen: } |a_2| \leqq \vartheta_1\,(1-\vartheta_2) = 1-\vartheta_2,$$

außer wenn die besondere Bedingung (I′) für $\nu \geqq 3$ und außerdem die Bedingung (I″) erfüllt ist. Alsdann ergibt sich zunächst nach Gl. (34b):

$$\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_2^\infty = \frac{a_2}{1-\vartheta_2},$$

also:

$$\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_2^\infty = -1, \quad \text{wenn: } a_2 = -(1-\vartheta_2),$$

mit anderen Worten, wenn die Bedingung (I′) auch schon für $\nu = 2$ besteht.

Damit ist der in Nr. 1 ausgesprochene Hauptsatz in allen Teilen bewiesen.

4. Durch passende Spezialisierung der ϑ_ν lassen sich aus dem Hauptkriterium von Nr. 1 mannigfache Spezialkriterien ableiten, als deren bemerkenswerteste wir die folgenden erwähnen wollen:

---

1) Bzw. die Form $\frac{0}{0}$, falls $a_1 = 0$.

Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ *ist unbedingt konvergent, wenn eine der folgenden Bedingungsformen erfüllt ist:*

(A) $$0 \leqq |a_2| \leqq \frac{1}{2} \quad \text{und für } \nu \geqq 3: \quad 0 \leqq |a_\nu| \leqq \frac{1}{4}.$$

Ausgenommen ist der Fall:

$$a_2 = -\frac{1}{2} \quad \text{und für jedes } \nu \geqq 3: \quad a_\nu = -\frac{1}{4},$$

in welchem außerwesentliche Divergenz stattfindet.

(B) $$0 \leqq |a_\nu| \leqq \frac{\nu^2}{4\nu^2 - 1} \quad (\nu \geqq 2)$$

(C) $$0 \leqq |a_{2\mu}| \leqq \frac{1-\vartheta'_\mu}{1+\vartheta'_\mu}, \quad 0 \leqq |a_{2\mu+1}| \leqq \frac{\vartheta'_\mu \vartheta'_{\mu+1}}{1+\vartheta'_{\mu+1}} \quad (\mu \geqq 1),$$

wo: $0 < \vartheta'_\mu < 1.$

(D) $|a_{2\mu}| + |a_{2\mu+1}| \leqq \frac{1}{2}$ $(\mu \geqq 1)$ *mit dem Zusatze:* $|a_{2\mu+1}| > 0$ $(\mu \geqq 0)$.

(E) $$\sum_2^\infty |a_\nu| \leqq 1.^{1)}$$

Beweis Zu (A). Man hat nur zu setzen:

$$\vartheta_1 = 1 \quad \text{und für } \nu \geqq 2: \quad \vartheta_\nu = \frac{1}{2}.$$

Da für $\nu \geqq 2$: $1 - \vartheta_\nu = \vartheta_\nu$, so ist $\sum_2^\infty \frac{(1-\vartheta_2)\cdots(1-\vartheta_\nu)}{\vartheta_2 \cdots \vartheta_\nu} = +\infty$, sodaß in dem angeführten (der Bedingung (I') des Hauptsatzes genügenden) Ausnahmefall wirklich *Divergenz* stattfindet.

Zu (B). Man setze für $\nu \geqq 1$:

$$\vartheta_\nu = \frac{\nu+1}{2\nu+1}, \quad \text{also:} \quad 1 - \vartheta_\nu = \frac{\nu}{2\nu+1}.$$

Da hier: $\vartheta_1 = \frac{2}{3}$, also < 1, so scheidet die Divergenzmöglichkeit vollständig aus. Die Bedingung (B) gibt, wegen: $\frac{\nu^2}{4\nu^2-1} > \frac{1}{4}$, für die $|a_\nu|$ eine etwas höhere obere Schranke, als Bedingung (A) — abgesehen von $|a_2|$, wofür ja in (A) der Maximalwert $\frac{1}{2}$ zulässig war.

Zu (C). Man setze für $\mu \geqq 1$:

$$\vartheta_{2\mu-1} = \frac{1}{1+\vartheta'_\mu}, \quad \vartheta_{2\mu} = \vartheta'_\mu \quad (\text{wo: } 0 < \vartheta' < 1),$$

---

1) Dabei wird überdies angenommen, daß die Reihe unendlich viele *von Null verschiedene* Glieder enthält.

so nimmt die Bedingung (I) des Hauptkriteriums die Form an:

$$|a_{2\mu}| \leqq \frac{1}{1+\vartheta'_\mu} \quad (1-\vartheta'_\mu)$$

$$|a_{2\mu+1}| \leqq \vartheta'_\mu \left(1 - \frac{1}{1+\vartheta'_{\mu+1}}\right) = \frac{\vartheta'_\mu \vartheta'_{\mu+1}}{1+\vartheta'_{\mu+1}} \quad (\mu \geqq 1).$$

Wählt man die ϑ'_μ insbesondere in der Weise, daß: $\lim\limits_{\mu\to\infty} \vartheta'_\mu = 0$ (was ja nach Fassung der Voraussetzung durchaus zulässig ist), so wird:

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}} |a_{2\mu}| \leqq 1, \quad \lim_{\mu\to\infty} a_{2\mu+1} = 0.$$

Während also in den Fällen (A) und (B) die obere Schranke für die $|a_\nu|$ (abgesehen von $|a_2|$ im Falle (A)) nur $\frac{1}{4}$ oder wenig darüber $\left(\text{mit dem Grenzwert } \frac{1}{4}\right)$ betrug, so scheiden sich hier die $|a_\nu|$ in zwei Serien, dergestalt, daß die Glieder der einen beliebig wenig unterhalb 1 liegen bzw. auch den Grenzwert 1 besitzen dürfen, während die Glieder der anderen dann gegen *Null* konvergieren.

Wegen $\vartheta_1 = \frac{1}{1+\vartheta'_1} < 1$ ist auch hier das Vorkommen des Divergenzfalles von vornherein ausgeschlossen.

Zu (D). Setzt man zunächst für $\mu \geqq 1$:

$$\vartheta_{2\mu-1} = \frac{1}{2},$$

so ergibt sich aus der Bedingung (I) des Hauptsatzes durch Trennung der Fälle $\nu = 2\mu$ und $\nu = 2\mu + 1$, wenn man dabei noch die Zusatzbedingung $|a_{2\mu+1}| > 0$ berücksichtigt:

$$0 \leqq |a_{2\mu}| \leqq \frac{1}{2}(1-\vartheta_{2\mu}), \quad 0 < |a_{2\mu+1}| \leqq \frac{1}{2}\vartheta_{2\mu} \quad (\mu \geqq 1)$$

und durch Addition dieser beiden Ungleichungen:

$$\text{(D)} \qquad 0 < |a_{2\mu}| + |a_{2\mu+1}| \leqq \frac{1}{2}.$$

Diese Bedingung allein — nur mit dem Zusatze: $|a_{2\mu+1}| > 0$ — ist dann aber auch *hinreichend* für die Konvergenz des Kettenbruches. Versteht man nämlich unter $\vartheta_{2\mu}$ $(\mu \geqq 1)$ diejenigen positiven Zahlen, welche durch die Bedingung:

$$|a_{2\mu+1}| = \frac{1}{2}\vartheta_{2\mu} \quad (\mu \geqq 1)$$

bestimmt sind, so hat man: $0 < \vartheta_{2\mu} \leqq 1$ auf Grund der obigen Bedingung (D), und diese selbst geht in die folgende über:

$$|a_{2\mu}| \leqq \frac{1}{2}(1-\vartheta_{2\mu}).$$

Setzt man also wieder: $\vartheta_{2\mu-1} = \frac{1}{2}$, so sind die Bedingungen (I) des Hauptkriteriums befriedigt, der betreffende Kettenbruch also *konvergent*

Da hier: $\vartheta_1 = \frac{1}{2}$, also < 1, so ist die Möglichkeit der *Divergenz* wieder ausgeschlossen [1])

Zu (E). Setzt man:

$$0 < \vartheta_1 \leqq 1 \quad \text{und für } \nu \geqq 2\colon\ 0 < \vartheta_\nu \leqq \vartheta_{\nu-1}, \quad \text{ferner: } \lim_{\nu\to\infty} \vartheta_\nu = 0$$

und nimmt an, daß die a_ν der Bedingung genügen:

$$|a_\nu| \leqq \vartheta_{\nu-1} - \vartheta_\nu \quad (\nu \geqq 2),$$

so hat man um so mehr:

$$|a_\nu| \leqq \vartheta_{\nu-1}(1 - \vartheta_\nu),$$

und zwar zum mindesten von einer bestimmten Stelle ab *mit Ausschluß der Gleichheit*, da ja schließlich einmal $\vartheta_{\nu-1} < 1$ werden muß. Infolgedessen ist der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ ausnahmslos *konvergent*. Aus der vorletzten Ungleichung folgt durch Summation für $\nu = 2, 3, \cdots, n$ und Übergang zur Grenze für $n \to \infty$, mit Berücksichtigung von $\vartheta_1 \leqq 1$ und $\lim_{n\to\infty} \vartheta_n = 0$:

$$0 < \sum_2^\infty {}^\prime |a_\nu| \leqq 1.$$

---

1) Wenn man, statt von der Festsetzung $\vartheta_{2\mu-1} = \frac{1}{2}$ auszugehen, die Verfügungen trifft:

$$\vartheta_1 = 1 \text{ und für } \mu \geqq 1\colon\ \vartheta_{2\mu} = \frac{1}{2},$$

so ergibt sich statt des Kriteriums (D) durch analoge Schlußweise das folgende:

$$(\mathrm{D}')\qquad \begin{cases} |a_2| \leqq \frac{1}{2} \\ |a_{2\mu-1}| + |a_{2\mu}| \leqq \frac{1}{2} \quad (\mu \geqq 2) \end{cases}$$

mit dem Zusatze: $|a_{2\mu}| > 0 \quad (\mu \geqq 1)$.

Doch tritt hier, wegen: $\vartheta_1 = 1$, der *Divergenzfall* ein, wenn durchweg $a_\nu < 0$ $(\nu \geqq 2)$ und die obigen Bedingungen die spezielle Form annehmen:

$$a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_{2\mu-1} + a_{2\mu} = -\frac{1}{2},$$

wenn außerdem:

$$\sum \frac{a_3 a_5 \cdots a_{2\mu-1}}{a_4 a_6 \cdots a_{2\mu}} = +\infty.$$

Das Kriterium (D′) einschließlich des Divergenzfalles würde sich übrigens auch ergeben, wenn man das Kriterium (D) zunächst auf den Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_2^\infty$ anwendet.

Diese als Folgerung aus den getroffenen Festsetzungen hervorgehende Bedingung erweist sich schon als *hinreichend* für die Konvergenz des Kettenbruches Denn *definiert* man jetzt $\vartheta_{\nu-1}$ durch die Beziehung:

$$\vartheta_{\nu-1} = \sum_{\nu}^{\infty}{}^{\lambda} |a_\lambda| > 0 \quad (\nu \geqq 2),$$

so folgt zunächst:

$$|a_\nu| = \vartheta_{\nu-1} - \vartheta_\nu \geqq 0, \quad \text{also: } 0 < \vartheta_\nu \leqq \vartheta_{\nu-1}$$

und außerdem:

$$\vartheta_1 = \sum_{2}^{\infty}{}^{\lambda} |a_\lambda| \leqq 1, \quad \lim_{\nu \to \infty} \vartheta_\nu = 0,$$

sodaß also die ϑ_ν die sämtlichen ursprünglich gemachten Voraussetzungen erfüllen.

§ 118. Übertragung der Konvergenzkriterien für Kettenbrüche der zweiten Hauptform auf beliebige Kettenbrüche.

1. Um die Kriterien des vorigen Paragraphen auf Kettenbrüche von der allgemeineren Form $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ zu übertragen, hat man nur zu beachten, daß unter der Voraussetzung: $b_\nu \neq 0$ (für $\nu = 1, 2, 3, \cdots$) die Äquivalenzformel besteht (vgl. § 94, Nr. 4, Gl. (25), S. 711):

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \simeq \left[\frac{a'_\nu}{1}\right]_1^\infty, \text{ wenn gesetzt wird: } a'_1 = \frac{a_1}{b_1}, \; a'_\nu = \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} \quad (\nu \geqq 2).$$

Hiernach nimmt das Hauptkriterium von Nr. 1 des vorigen Paragraphen jetzt die folgende Form an:

Ist $|a_1| > 0$[1]) *und existiert eine unbegrenzte Folge positiver Zahlen* (ϑ_ν), *derart, daß:* $\vartheta_1 < 1$ *und für* $\nu \geqq 2$:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} 0 < \vartheta_\nu \leqq 1 \\ 0 \leqq \left|\dfrac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| \leqq \vartheta_{\nu-1}(1 - \vartheta_\nu), \end{cases}$$

1) Ist $a_1 = 0$, so folgt aus Nr. 1 des vorigen Paragraphen, daß der Kettenbruch (abgesehen von dem Einzelfalle, auf den sich die Fußnote der nächsten Seite bezieht) *konvergiert* und den Wert *Null* hat; ebendanach ergibt sich:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n,$$

wenn $a_{n+1} = 0$ $(n > 0)$, dagegen: $a_\nu \neq 0$ für $\nu \leqq n$.

so ist der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ ***unbedingt konvergent****, und zwar ist:*

$$\left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| < \frac{1}{1-\vartheta_1}\cdot\left|\frac{a_1}{b_1}\right|, \tag{1}$$

außer wenn durchweg:

$$\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}b_\nu} = -\vartheta_{\nu-1}(1-\vartheta_\nu) \neq 0 \quad (\nu \geqq 2) \tag{I'}$$

und zugleich:

$$\sum_2^\infty{}_\nu \frac{(1-\vartheta_2)(1-\vartheta_3)\cdots(1-\vartheta_\nu)}{\vartheta_2\vartheta_3\cdots\vartheta_\nu} = +\infty, \tag{I''}$$

in welchem Falle die Beziehung besteht:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{1}{1-\vartheta_1}\cdot\frac{a_1}{b_1}. \tag{1'}$$

Die ***unbedingte Konvergenz*** *des Kettenbruches bleibt auch noch für* $\vartheta_1 = 1$ *erhalten, außer wenn die besonderen Bedingungen* (I') *und* (I'') *bestehen: in diesem Falle ist der Kettenbruch* ***außerwesentlich divergent.***[1])

2. Der Vollständigkeit halber und um den Vergleich mit einigen anderen weiter unten noch anzugebenden Kriterien möglichst zu erleichtern, wollen wir auch noch die Übertragung der Spezialkriterien von Nr. 4 des vorigen Paragraphen auf Kettenbrüche von der Form $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ ausdrücklich vornehmen (obschon dabei tatsächlich nichts anderes geleistet wird, als daß man auf Grund der oben angeführten Äquivalenzformel a_ν durch $\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}b_\nu}$ ersetzt), nämlich:

Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *ist* ***unbedingt konvergent****, wenn eine der folgenden Bedingungsformen erfüllt ist:*

$$0 \leqq \left|\frac{a_2}{b_1b_2}\right| \leqq \frac{1}{2}, \quad 0 \leqq \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}b_\nu}\right| \leqq \frac{1}{4} \text{ für } \nu \geqq 3. \tag{A}$$

Ausgenommen ist der Fall:

$$\frac{a_2}{b_1b_2} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{a_\nu}{b_{\nu-1}b_\nu} = -\frac{1}{4} \text{ für } \nu \geqq 3,$$

in welchem außerwesentliche Divergenz stattfindet.

---

1) bzw. von der Form $\frac{0}{-}$, falls $a_\cdot = 0$.

(B) $$0 \leqq \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}b_\nu}\right| \leqq \frac{\nu^2}{4\nu^2-1} \quad (\nu \geqq 2).$$ [1])

(C) $$0 \leqq \left|\frac{a_{2\mu}}{b_{2\mu-1}b_{2\mu}}\right| \leqq \frac{1-\vartheta'_\mu}{1+\vartheta'_\mu}, \quad 0 \leqq \left|\frac{a_{2\mu+1}}{b_{2\mu}b_{2\mu+1}}\right| \leqq \frac{\vartheta'_\mu \vartheta'_{\mu+1}}{1+\vartheta'_{\mu+1}} \quad (\mu \geqq 1),$$

wo: $$0 < \vartheta'_\mu < 1.$$

(D) $$\left|\frac{a_{2\mu}}{b_{2\mu-1}b_{2\mu}}\right| + \left|\frac{a_{2\mu+1}}{b_{2\mu}b_{2\mu+1}}\right| \leqq \frac{1}{2} \quad (\mu \geqq 1), \quad |a_{2\mu+1}| > 0 \quad (\mu \geqq 0).$$

(E) $$\sum_2^\infty{}_\nu \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}b_\nu}\right| \leqq 1.$$

3. Das Hauptkriterium von Nr. 1, sowie jedes der daraus abgeleiteten Spezialkriterien (A)—(E) besitzt, wie aus der Herleitung hervorgeht, aber auch in der Form jener Kriterien unmittelbar zum Ausdruck kommt[2]), für alle unter sich *äquivalenten* Kettenbrüche die gleiche Wirksamkeit. Etwas Derartiges findet im allgemeinen nicht mehr statt, wenn man bei Spezialisierung der ϑ_ν solche Ausdrücke verwendet, welche irgendwie von den a_ν, b_ν abhängen. Ein in dem angedeuteten Sinne spezielleres, aber wegen seiner einfachen Form, zumal bei noch weiterer Spezialisierung besonders nützliches Kriterium gewinnt man durch die Annahme:

(2) $$\vartheta_\nu = \frac{\varrho_\nu}{|b_\nu|},$$

---

1) Daraus folgt z. B. für $a_\nu = \varepsilon_\nu \nu^2$, $b_\nu = 2\nu+1$, wo die ε_ν beliebige komplexe Einheitsfaktoren bedeuten, daß der Kettenbruch $\left[\frac{\varepsilon_\nu \nu^2}{2\nu+1}\right]_1^\infty$ stets unbedingt konvergiert, und zwar selbst in jenem „ungünstigsten" Falle, in welchem sonst unter Umständen außerwesentliche Divergenz eintritt, nämlich wenn für $\nu \geqq 2$ durchweg: $\varepsilon_\nu = -1$ (vgl. im vorigen Paragraphen den Beweis zu (B), S. 869). Zugleich findet man in diesem Falle $\left(\text{wegen } \vartheta_1 = \left(\frac{\nu+1}{2\nu+1}\right)_{\nu=1} = \frac{2}{3}\right)$ aus Gl. (1'):

$$\left[\frac{-\nu^2}{2\nu+1}\right]_1^\infty = 3 \cdot \frac{-1}{3} = -1$$

und $\left(\text{wegen: } \vartheta_n = \frac{n+1}{2n+1}\right)$ allgemein:

$$\left[\frac{-\nu^2}{2\nu+1}\right]_n^\infty = \frac{1}{1-\vartheta_n} \cdot \frac{-n^2}{2n+1} = -n.$$

2) Indem ja die a_ν, b_ν durchweg nur in der Verbindung $\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}b_\nu}$ auftreten, welche ungeändert bleibt, wenn man

$$a_\nu \text{ durch: } c_{\nu-1}c_\nu a_\nu,$$

$$b_{\nu-1}, b_\nu \text{ durch: } c_{\nu-1}b_{\nu-1}, c_\nu b_\nu$$

ersetzt.

wo ϱ_ν nach (I) den Bedingungen zu genügen hat:

$$(3) \qquad 0 < \varrho_\nu \leqq |b_\nu| \quad \text{für } \nu \geqq 2,$$

während im allgemeinen $0 < \varrho_1 < |b_1|$ zu setzen ist und die spezielle Annahme: $\varrho_1 = |b_1|$ die a. a O. für den Fall $\vartheta_1 = 1$ gemachten Einschränkungen erfordert.

Die Hauptbedingung (I) nimmt alsdann die Form an·

$$0 \leqq \left| \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} \right| \leqq \frac{\varrho_{\nu-1}}{|b_{\nu-1}|} \cdot \frac{|b_\nu| - \varrho_\nu}{|b_\nu|} \quad (\nu \geqq 2),$$

anders geschrieben:

$$(4) \qquad |b_\nu| \geqq \frac{|a_\nu|}{\varrho_{\nu-1}} + \varrho_\nu \quad (\nu \geqq 2),$$

sodaß also, wenn nur diese Beziehung besteht und außerdem:

$$(4a) \qquad \varrho_\nu > 0 \quad (\nu \geqq 1)$$

die zuvor in Ungl. (3) enthaltene Beschränkung $\varrho_\nu \leqq |b_\nu|$ für $\nu \geqq 2$ schon von selbst erfüllt ist und nur noch die Bedingung:

$$(4b) \qquad |b_1| \geqq \varrho_1$$

(mit den erforderlichen Einschränkungen für den Fall $|b_1| = \varrho_1$) ausdrücklich erwähnt werden muß.

Sind diese Bedingungen erfüllt und insbesondere: $|b_1| > \varrho_1$, so *konvergiert* der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ und es ergibt sich aus der Beziehung (1) (mit Berücksichtigung von: $\frac{1}{1-\vartheta_1} = \frac{|b_1|}{|b_1| - \varrho_1}$), daß:

$$(5) \qquad \left| \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \right| < \frac{|a_1|}{|b_1| - \varrho_1},$$

abgesehen von jenem Ausnahmefalle, welcher bei gleichzeitigem Bestehen der beiden Beziehungen (I'), (I'') eintritt. Dabei würde die Beziehung (I') hier zunächst folgendermaßen lauten:

$$\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} = -\frac{\varrho_{\nu-1}}{|b_{\nu-1}|} \cdot \frac{|b_\nu| - \varrho_\nu}{|b_\nu|} \neq 0 \quad (\nu \geqq 2),$$

und diese Bedingung besagt offenbar mit Rücksicht auf die Voraussetzung (4) dasselbe wie die beiden folgenden zusammen:

$$(6) \qquad \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} < 0, \quad |b_\nu| = \frac{|a_\nu|}{\varrho_{\nu-1}} + \varrho_\nu \quad (\nu \geqq 2).$$

Infolgedessen nimmt die Bedingung (I''), wegen: $\frac{1-\vartheta_\nu}{\vartheta_\nu} = \frac{|b_\nu| - \varrho_\nu}{\varrho_\nu} = \frac{|a_\nu|}{\varrho_{\nu-1}\varrho_\nu}$, nach Hinzufügung des im übrigen einflußlosen Faktors $\frac{1}{\varrho_1}$ die Form an:

$$(7) \qquad \sum_2^\infty \frac{|a_2 a_3 \cdots a_\nu|}{(\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{\nu-1})^2} \cdot \frac{1}{\varrho_\nu} = +\infty.$$

Sind dann diese Bedingungen (6) und (7) erfüllt, so findet man nach Gl. (1'):

$$(8)\qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{|b_1|}{|b_1|-\varrho_1}\cdot\frac{a_1}{b_1},\quad \text{also:}\ \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| = \frac{|a_1|}{|b_1|-\varrho_1}.$$

Die *unbedingte Konvergenz* des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ bleibt wiederum auch noch im Falle $|b_1| = \varrho_1$ erhalten, außer wenn die Spezialbedingungen (6) und (7) bestehen. Alsdann wird auf Grund der Beziehung (8) zunächst:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty = \frac{|b_2|}{|b_2|-\varrho_2}\cdot\frac{a_2}{b_2}$$

und, wenn man die beiden Bedingungen (6) für $\nu = 2$ wieder in die *eine* vorangehende vereinigt:

$$\frac{a_2}{b_1 b_2} = -\frac{|b_2|-\varrho_2}{|b_2|},$$

schließlich:

$$(9)\qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty = -b_1,$$

sodaß der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *außerwesentlich divergiert*, falls $|a_1| > 0$.

Durch Zusammenfassung der in den Beziehungen (4)—(9) enthaltenen Ergebnisse gewinnt man also das folgende Konvergenzkriterium:

Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *ist unbedingt konvergent, wenn eine Folge positiver Zahlen* ϱ_ν $(\nu = 1, 2, 3 \cdots\cdots)$ *existiert derart, daß:*

$$(\mathrm{F})\qquad \begin{cases} |b_1| > \varrho_1 \\ |b_\nu| \geqq \dfrac{|a_\nu|}{\varrho_{\nu-1}} + \varrho_\nu \quad (\nu \geqq 2).^{1)} \end{cases}$$

---

1) Setzt man:

$$\frac{|a_\nu|}{\varrho_{\nu-1}} = \sigma_\nu \geqq 0,$$

so kann man dem betreffenden Kriterium auch die folgende Fassung geben:

Existieren zwei Folgen von Zahlen $\varrho_\nu > 0,\ \sigma_\nu \geqq 0$ $(\nu = 1, 2, 3 \cdots)$ *derart, daß*

$$|b_1| \geqq \varrho_1,\qquad \left.\begin{array}{l} |b_\nu| \geqq \varrho_\nu + \sigma_\nu \\ |a_\nu| = \varrho_{\nu-1}\,\sigma_\nu \end{array}\right\} (\nu \geqq 2),$$

so ist der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *(abgesehen von dem im Texte erwähnten einzigen Divergenzfall) unbedingt konvergent.*

Dabei ist, falls $|a_1| > 0$:

(f) $$\left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| < \frac{|a_1|}{|b_1|-\varrho_1},$$

außer wenn für $\nu \geqq 2$ *durchweg:*

(F') $$\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}b_\nu} < 0, \quad |b_\nu| = \frac{|a_\nu|}{\varrho_{\nu-1}} + \varrho_\nu$$

und zugleich:

(F'') $$\sum_2^\infty{}_\nu \frac{|a_2 a_3 \cdots a_\nu|}{(\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{\nu-1})^2} \cdot \frac{1}{\varrho_\nu} = +\infty,$$

in welchem Falle an die Stelle der Ungleichung (f) *die Gleichung tritt:*

(f') $$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{|b_1|}{|b_1|-\varrho_1} \cdot \frac{a_1}{b_1}, \quad \text{also:} \quad \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| = \frac{|a_1|}{|b_1|-\varrho_1}.$$

Die unbedingte Konvergenz des Kettenbruches bleibt auch noch für $|b_1| = \varrho_1$ *erhalten, außer wenn die besonderen Bedingungen* (F') *und* (F'') *bestehen: in diesem Falle ist der Kettenbruch außerwesentlich divergent.*[1])

4. Das vorstehende Kriterium nimmt besonders einfache Formen an, wenn für ϱ_ν eine der folgenden drei Annahmen gemacht wird:

$$\varrho_\nu = 1, \quad \varrho_\nu = |a_{\nu+1}|, \quad \varrho_\nu = \sqrt{|a_{\nu+1}|} \quad (\nu = 1, 2, 3 \cdots\cdots),$$

wobei im zweiten und dritten Falle für $\nu \geqq 2$ durchweg: $|a_\nu| > 0$ vorauszusetzen ist. *Mit dieser Zusatzbedingung* ergibt sich dann:

Dies folgt übrigens auch unmittelbar aus dem Hauptkriterium von § 112, Nr. 1, S. 860, denn aus den obigen Bedingungen ergibt sich für $\nu \geqq 2$:

$$\left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}b_\nu}\right| \leqq \frac{\varrho_{\nu-1}\sigma_\nu}{(\varrho_{\nu-1}+\sigma_{\nu-1})(\varrho_\nu+\sigma_\nu)}$$

$$= \frac{\varrho_{\nu-1}}{\varrho_{\nu-1}+\sigma_{\nu-1}}\left(1-\frac{\varrho_\nu}{\varrho_\nu+\sigma_\nu}\right) = \vartheta_{\nu-1}(1-\vartheta_\nu),$$

wo jetzt für $\nu \geqq 1$:

$$0 < \vartheta_\nu = \frac{\varrho_\nu}{\varrho_\nu+\sigma_\nu} \leqq 1.$$

1) bzw. von der Form $\frac{0}{0}$, wenn $a_1 = 0$.

Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ ***ist unbedingt konvergent***, *wenn eine der folgenden drei Bedingungsformen erfüllt ist:*

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{G}) & |b_1| > 1, & |b_\nu| \geqq |a_\nu| + 1 \\ (\mathrm{H}) & |b_1| > |a_2|, & |b_\nu| \geqq |a_{\nu+1}| + 1 \\ (\mathrm{I}) & |b_1| > \sqrt{|a_2|}, & |b_\nu| \geqq \sqrt{|a_\nu|} + \sqrt{|a_{\nu+1}|} \end{array} \quad (\nu \geqq 2),$$

und zwar genügt sein Wert, falls $|a_1| > 0$, *je einer der folgenden Beziehungen:*

$$(\mathrm{g}) \qquad \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| < \frac{|a_1|}{|b_1|-1},$$

$$(\mathrm{h}) \qquad \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| < \frac{|a_1|}{|b_1|-|a_2|},$$

$$(\mathrm{i}) \qquad \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| < \frac{|a_1|}{|b_1|-\sqrt{|a_2|}},$$

außer wenn für $\nu \geqq 2$ *durchweg:*

$$(\mathrm{G}') \quad \frac{a_\nu}{b_{\nu-1}\, b_\nu} < 0, |b_\nu| = |a_\nu| + 1 \qquad \text{und zugleich:} \sum_2^\infty |a_2 a_3 \cdots a_\nu| = +\infty,$$

$$(\mathrm{H}') \quad \frac{a_\nu}{b_{\nu-1}\, b_\nu} < 0, |b_\nu| = |a_{\nu+1}| + 1 \qquad \text{„ „} \quad \sum_2^\infty |a_2 a_3 \cdots a_\nu|^{-1} = +\infty,$$

$$(\mathrm{I}') \quad \frac{a_\nu}{b_{\nu-1}\, b_\nu} < 0, |b_\nu| = \sqrt{|a_\nu|} + \sqrt{|a_{\nu+1}|} \text{ „} \qquad \text{„} \quad \sum_2^\infty \frac{1}{\sqrt{|a_\nu|}} = +\infty,$$

in welchen Fällen an die Stelle der Ungleichungen (g)—(i) ***die folgenden Gleichungen treten:***

$$(\mathrm{g}') \qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{|b_1|}{|b_1|-1} \cdot \frac{a_1}{b_1}, \quad \text{also:} \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| = \frac{|a_1|}{|b_1|-1},$$

$$(\mathrm{h}') \qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{|b_1|}{|b_1|-|a_2|} \cdot \frac{a_1}{b_1}, \quad \text{„} \quad \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| = \frac{|a_1|}{|b_1|-|a_2|},$$

$$(\mathrm{i}') \qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{|b_1|}{|b_1|-\sqrt{|a_2|}} \cdot \frac{a_1}{b_1}, \text{„} \quad \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| = \frac{|a_1|}{|b_1|-\sqrt{|a_2|}}.$$

Die ***unbedingte Konvergenz*** *des Kettenbruches bleibt auch erhalten, falls in den auf* $|b_1|$ *bezüglichen Bedingungen* (G)—(I) ***das Gleichheitszeichen*** *steht, außer wenn die besonderen Bedingungen* (G′) *bzw.* (H′), (I′) *bestehen: alsdann ist der Kettenbruch* ***außerwesentlich divergent.***[1])

1) bzw. von der Form $\frac{0}{0}$, wenn $a_1 = 0$.

Zusatz Besteht die zweite der Bedingungen (G) bzw. (H), (I) auch noch für $\nu = 1$, besteht also eine der folgenden drei Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{ll} (G_1) & |b_\nu| \geqq |a_\nu| + 1 \\ (H_1) & |b_\nu| \geqq |a_{\nu+1}| + 1 \\ (I_1) & |b_\nu| \geqq \sqrt{|a_\nu|} + \sqrt{|a_{\nu+1}|} \end{array}\right\} (\nu \geqq 1)^{1)},$$

so reduzieren sich die Ungleichungen (g)—(i) auf die einfacheren:

$$(g_1) \qquad \left| \left[\frac{a_\nu}{b_\nu} \right]_1^\infty \right| < 1$$

$$(h_1) \qquad \left| \left[\frac{a_\nu}{b_\nu} \right]_1^\infty \right| < |a_1|$$

$$(i_1) \qquad \left| \left[\frac{a_\nu}{b_\nu} \right]_1^\infty \right| < \sqrt{|a_1|}$$

und gehen in die entsprechenden Gleichungen über, wenn die Spezialbedingungen (G′) bzw. (H′), (I′) — und zwar die in der zweiten Kolonne stehenden für $\nu \geqq 1$ — erfüllt sind.

5. Trennt man in dem Kriterium (F) zunächst für $\nu \geqq 2$ die Fälle $\nu = 2\mu - 1$ und $\nu = 2\mu$, setzt außerdem: $\varrho_{2\mu} = 1$ (für $\mu = 1, 2, 3, \cdots\cdots$), so resultieren die Bedingungen:

$$(10) \qquad \begin{cases} |b_{2\mu-1}| \geqq |a_{2\mu-1}| + \varrho_{2\mu-1} & (\mu \geqq 2) \\ |b_{2\mu}| \geqq \dfrac{|a_{2\mu}|}{\varrho_{2\mu-1}} + 1 & (\mu \geqq 1). \end{cases}$$

Läßt man die erste dieser Ungleichungen auch für $\mu = 1$ bestehen (sodaß also: $|b_1| \geqq |a_1| + \varrho_1$), so ist damit auch die Anfangsbedingung von (F) erfüllt, falls $|a_1| > 0$. Bringt man sodann die obigen zwei Ungleichungen auf die Form:

$$(11) \qquad \left.\begin{array}{ll} |b_{2\mu-1}| - |a_{2\mu-1}| & \geqq \varrho_{2\mu-1} \\ |b_{2\mu}| - 1 & \geqq \dfrac{|a_{2\mu}|}{\varrho_{2\mu-1}} \end{array}\right\} (\mu \geqq 1),$$

so folgt durch Multiplikation:

$$(|b_{2\mu-1}| - |a_{2\mu-1}|)(|b_{2\mu}| - 1) \geqq |a_{2\mu}|,$$

---

1) In den Fällen (H_1), (I_1) mit dem Zusatz $|a_\nu| > 0$. Sind die a_ν, b_ν *reell*, in welchem Falle die b_ν ohne Beschränkung der Allgemeinheit als *positiv* vorausgesetzt werden dürfen, so ist das Kriterium (G_1) identisch mit dem Konvergenzkriterium von § 108, Nr. 1, S. 823.

und diese Ungleichung nimmt eine besonders einfache Form an, wenn für $\nu \geqq 1$ durchweg: $|a_\nu| = 1$, nämlich:

(12) $$(|b_{2\mu-1}| - 1)(|b_{2\mu}| - 1) \geqq 1,$$

also:

$$|b_{2\mu-1}| \cdot |b_{2\mu}| - |b_{2\mu}| - |b_{2\mu-1}| \geqq 0$$

und schließlich:

(13) $$\left|\frac{1}{b_{2\mu-1}}\right| + \left|\frac{1}{b_{2\mu}}\right| \leqq 1 \quad (\mu \geqq 1).$$

Diese *eine* Bedingung reicht aber aus, um die *beiden* (für die unbedingte *Konvergenz* des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *hinreichenden*) Bedingungen (11) unter der oben gemachten Annahme $|a_\nu| = 1$ zu ersetzen. Da nämlich aus (12) mit Notwendigkeit folgt, daß: $|b_{2\mu-1}| > 1$, so kann man eine Folge *positiver* Zahlen $\varrho_{2\mu-1}$ durch die Gleichung definieren:

$$|b_{2\mu-1}| - 1 = \varrho_{2\mu-1} \quad (\mu \geqq 1),$$

sodaß sich aus (12) ergibt:

$$|b_{2\mu}| - 1 \geqq \frac{1}{\varrho_{2\mu-1}}$$

und somit die Bedingungen (11) für $|a_{2\mu-1}| = |a_{2\mu}| = 1$ tatsächlich erfüllt sind.

Somit gewinnt man auf diese Weise das folgende Konvergenzkriterium:

Versteht man unter $\mathfrak{e}_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$ *beliebige komplexe Einheitsfaktoren, so ist der Kettenbruch* $\left[\frac{\mathfrak{e}_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *unbedingt konvergent, wenn für* $\mu \geqq 1$:

(K) $$\left|\frac{1}{b_{2\mu-1}}\right| + \left|\frac{1}{b_{2\mu}}\right| \leqq 1$$

§ 114. Periodische Kettenbrüche.

1. Ein Kettenbruch von der Form: $b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ heißt *periodisch* mit der *p-gliedrigen Periode*: $\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}, \ldots, \frac{a_{k+p}}{b_{k+p}}$ (wo: $k \geqq 0$, $p \geqq 1$), wenn von einem bestimmten Index $\nu = k + 1$ ab die obige Folge von Teilbrüchen (welche sich im Falle $p = 1$ auf das einzige Glied $\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$ reduziert) *beständig wiederkehrt.* Ist $b_0 = 0$ und $k = 0$, handelt es sich also um einen Kettenbruch von der Form: $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ mit der Periode:

$\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_p}{b_p}$, so soll derselbe *rein periodisch ohne (additives) Anfangsglied* heißen und nach Bedarf durch das Symbol:

$$(1) \qquad \left[\overline{\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_p}{b_p}}\right]$$

bezeichnet werden. Wird diesem Kettenbruche ein von Null verschiedenes Anfangsglied b_0 hinzugefügt und ist $b_0 = b_p$, sodaß also die Periodizität schon mit dem Gliede b_0 beginnt, so soll der betreffende Kettenbruch als *rein periodisch mit Anfangsglied* bezeichnet und gegebenenfalls:

$$b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \equiv \left[\overline{b_0, \frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_{p-1}}{b_{p-1}}, \frac{a_p}{b_0}}\right]$$

gesetzt werden.[1]) In jedem anderen Falle heißt der *periodische* Kettenbruch *unrein periodisch,* und als entsprechende Bezeichnung dient alsdann die folgende:

$$\left[b_0, \overline{\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_p}{b_p}}\right] \text{ bzw. } \left[b_0, \frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_k}{b_k} \overline{\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}, \ldots \frac{a_{k+p}}{b_{k+p}}}\right].$$

Da das additive Anfangsglied gar keinen, eine Anzahl der Periode vorangehender nicht-periodischer Teilbrüche nur einen begrenzten und genau zu umschreibenden Einfluß auf die *Konvergenz* des Kettenbruches ausübt, so wird es im wesentlichen nur darauf ankommen, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Konvergenz eines *rein periodischen Kettenbruches ohne Anfangsglied* festzustellen.

2. Es sei also der unendliche Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *rein periodisch* mit der p-gliedrigen Periode $\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_p}{b_p}$, sodaß also:

$$(2a) \qquad \frac{a_{p+\nu}}{b_{p+\nu}} \equiv \frac{a_\nu}{b_\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots),$$

anders geschrieben:

$$(2b) \qquad \frac{a_{\lambda+\mu p}}{b_{\lambda+\mu p}} \equiv \frac{a_\lambda}{b_\lambda} \quad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \cdots p \\ \mu = 1, 2, 3, \cdots\cdots \end{pmatrix}.$$

---

1) Ist durchweg $a_\nu = a$, so kann man statt

$$\left[\overline{b_0, \frac{a}{b_1}, \ldots \frac{a}{b_{p-1}}, \frac{a}{b_0}}\right]$$

einfacher schreiben:

$$\left[\overline{b_0, \frac{a}{b_1}, \ldots \frac{a}{b_{p-1}}}\right].$$

Es ist das derjenige Typus, welcher im Falle, daß $a = 1$ und die b_ν natürliche Zahlen, der Kettenbruch also ein *regelmäßiger,* früher *schlechthin* als *rein periodisch* bezeichnet wurde (§ 104, Nr. 1, S. 780).

Bezüglich der a_ν soll ein für allemal die beschränkende Voraussetzung gemacht werden, daß sie durchweg *von Null verschieden.*

Ist der Kettenbruch überhaupt *konvergent* und wird sein Wert mit x bezeichnet, so hat man nach dem „Hauptsatz" von § 99, Nr. 2 (S. 744, Gl. 13):

$$x = \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{p-1}|}{|b_{p-1}} + \frac{a_p\ |}{|b_p + x},$$

also, mit Benützung von § 92, Nr. 3, Gl. (11), S. 699:

$$x = \frac{A_p + A_{p-1}\,x}{B_p + B_{p-1}\,x},$$

sodaß der Wert x des Kettenbruches jedenfalls eine Wurzel der quadratischen Gleichung:

$$B_{p-1}x^2 - (A_{p-1} - B_p)x - A_p = 0 \tag{1}$$

sein muß. Dabei ist diese Gleichung, falls der Kettenbruch *konvergiert*, allemal wirklich eine *quadratische*, d. h es ist stets $|B_{p-1}| > 0$. Man hat nämlich für jedes $\varrho \geqq 1$ und $\mu \geqq 1$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{\mu p+\varrho} &\equiv \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\mu p}|}{|b_{\mu p}} + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_\varrho|}{|b_\varrho} \\ &= \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\mu p}|}{|b_{\mu p}} + \frac{A_\varrho|}{|B_\varrho} \end{aligned}$$

und daher, da beide Kettenbrüche dieselbe reduzierte Form besitzen:

$$\left\{\begin{aligned} A_{\mu p+\varrho} &= B_\varrho A_{\mu p} + A_\varrho A_{\mu p-1} \\ B_{\mu p+\varrho} &= B_\varrho B_{\mu p} + A_\varrho B_{\mu p-1}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Aus der zweiten dieser Formeln folgt für $\varrho = p - 1$:

$$B_{(\mu+1)p-1} = B_{p-1}B_{\mu p} + A_{p-1}B_{\mu p-1} \tag{4}$$

und hieraus speziell für $\mu = 1$:

$$B_{2p-1} = B_{p-1}(B_p + A_{p-1}).$$

Ist also: $B_{p-1} = 0$, so wird auch: $B_{2p-1} = 0$, sodaß sich aus der Rekursionsformel (4) durch vollständige Induktion ergibt: $B_{\mu p-1} = 0$ für *jedes* μ. Daraus geht aber hervor, daß der Kettenbruch im Falle $B_{p-1} = 0$ *unendlich viele sinnlose* Näherungsbrüche besitzt und somit *divergiert.* Mithin ergibt sich:

Die Bedingung:

$$(\mathrm{A}) \qquad | B_{p-1} | > 0$$

ist eine für die Konvergenz des Kettenbruches (1) *(wo durchweg* $| a_\nu | > 0$) *notwendige* [1])

Aus dieser Erkenntnis entspringt aber sofort eine ganze Folge von *notwendigen* Bedingungen für etwaige *unbedingte* Konvergenz des Kettenbruches (1). Soll dieser nämlich *unbedingt* konvergieren, so muß ja auch jeder der (gleichfalls rein periodischen) Kettenbrüche:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\lambda+1}^{\infty} \quad (\lambda = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

konvergieren.[2]) Dabei genügt es offenbar, mit Rücksicht auf die vorhandene Periodizität, für λ die Werte 1, 2, $\cdots$, $(p-1)$ in Betracht zu ziehen

Setzt man mit Benützung der in § 92, Nr 3, S. 698, Gl. (5), (6) eingeführten Bezeichnungen:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\lambda+1}^{\lambda+\varrho} = \frac{A^*_{\lambda,\, \lambda+\varrho}}{B_{\lambda,\, \lambda+\varrho}}$$

(sodaß also, wenn man auch den Fall $\lambda = 0$ in diese Bezeichnungsweise einbezieht: $A^*_{0,\, \lambda+\varrho} \equiv A_{\lambda+\varrho}$, $B_{0,\, \lambda+\varrho} \equiv B_{\lambda+\varrho}$ wird), so ergibt sich aus (A) als *notwendige* Bedingung für die *Konvergenz* des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\lambda+1}^{\infty}$:

$$| B_{\lambda,\, \lambda+p-1} | > 0.$$

Diese Beziehung muß dann, wenn der Kettenbruch (1) *unbedingt* konvergieren soll, außer der (für $\lambda = 0$ resultierenden) Bedingung (A)

1) Im Falle einer *ein*gliedrigen Periode, also für $p = 1$, hat man: $B_{p-1} \equiv B_0 = 1$, d. h. die Bedingung (A) ist alsdann *stets von selbst* erfüllt. Im Falle $p = 2$ reduziert sie sich, wegen: $B_{p-1} \equiv B_1 = b_1$, auf die folgende: $| b_1 | > 0$, deren *Notwendigkeit* für die *Konvergenz* des Kettenbruches schon daraus hervorgeht, daß ja im Falle: $b_1 = 0$ *alle* $b_{2\nu+1}$ den Wert *Null* haben würden, was ja stets *Divergenz* nach sich zieht (s. § 111, Nr. 1, *Zusatz*, S. 849). Aus diesem Grunde muß dann offenbar auch im Falle $p = 1$ die Beziehung $| b_1 | > 0$ als eine *notwendige* Konvergenzbedingung auftreten: s. die Fußnote auf der folgenden Seite.

2) Im Falle $p = 1$ ist jeder der Kettenbrüche $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\lambda+1}^{\infty}$ *identisch* mit dem gegebenen, hier existiert also überhaupt keine andere Konvergenz als eine *unbedingte*.

für $\lambda = 1, 2, \cdots, (p-1)$ erfüllt sein[1]) Schreibt man in diesem Zusammenhange noch $\lambda + 1$ statt λ und beachtet, daß nach Formel (7) des oben zitierten § 92, S. 698:

$$A^*_{\lambda,\,\lambda+p} = a_{\lambda+1} B_{\lambda+1,\,\lambda+p},$$

so ergibt sich:

Für die unbedingte Konvergenz des Kettenbruches (1) *ist notwendig, daß zu der Bedingung* (A) *noch die folgenden hinzutreten:*

(B) $|B_{\lambda+1,\,\lambda+p}| > 0$, *anders geschrieben:* $|A^*_{\lambda,\,\lambda+p}| > 0 \;(\lambda = 0, 1, \cdots, p-2)$.

3. Unter der Voraussetzung, daß die Bedingung (A) erfüllt ist, besitzt die quadratische Gleichung (I), S. 882, die beiden, im allgemeinen Falle $|D| > 0$ verschiedenen Wurzeln:

$$x = \frac{1}{2B_{p-1}}(A_{p-1} - B_p \pm \sqrt{D}), \tag{5a}$$

bzw. in dem besonderen Falle $D = 0$ die daraus hervorgehende Doppelwurzel:

$$x = \frac{1}{2B_{p-1}}(A_{p-1} - B_p) \tag{5b}$$

Dabei bedeutet D die *Diskriminante* jener quadratischen Gleichung (s. § 70, Nr. 5, S. 542), nämlich:

$$(6)\quad \begin{cases} D = (A_{p-1} - B_p)^2 + 4A_pB_{p-1} \\ = (A_{p-1} + B_p)^2 - 4(A_{p-1}B_p - A_pB_{p-1}) \\ = S^2 - 4P, \end{cases}$$

wenn gesetzt wird:

$$(7)\quad \begin{cases} S = A_{p-1} + B_p \\ P = A_{p-1}B_p - A_pB_{p-1} = (-1)^p \cdot a_1 \cdots a_p \text{ (§ 92, S. 696, Gl. (VI))}. \end{cases}$$

Es soll nun zunächst festgestellt werden, in welcher Beziehung die Bedingungen (B) zu den Wurzeln der quadratischen Gleichung (I) stehen.

---

1) Im Falle $p = 2$ reduzieren sich diese Bedingungen auf die einzige:

$$|B_{1,2}| \equiv |b_2| > 0,$$

während sie im Falle $p = 1$ auf Grund der in der vorigen Fußnote gemachten Bemerkung gänzlich wegfallen. Die in Fußnote 1 der vorigen Seite für $p = 1$ als *notwendig* erwähnte Konvergenzbedingung $|b_1| > 0$ fällt *nicht* unter (B), sondern ergibt sich in anderem Zusammenhange. s. S. 887, Fußnote 2 und S. 891, Fußnote 2.

Für $\lambda = 0$ nimmt die Bedingung (B), wegen: $A_{0,p}^* \equiv A_p$, die einfache Form an:

$$|A_p| > 0$$

und ist also gleichbedeutend damit, daß *keine* der Wurzeln x den Wert *Null* hat.

Um sodann den allgemeinen Fall $\lambda \geqq 1$ zu erledigen, werde angenommen, daß für irgendein $\lambda \geqq 1$ die Bedingung (B) *nicht* erfüllt sei, daß also:

$$A_{\lambda, \lambda+p}^* = 0. \tag{8}$$

Mit Hilfe der Formel (s. § 92, Nr. 3, (VIII′), S. 698):

$$A_{\lambda+p} B_\lambda - A_\lambda B_{\lambda+p} = (-1)^\lambda \cdot a_1 \cdots a_\lambda \cdot A_{\lambda, \lambda+p}^*$$

läßt sich diese Beziehung durch die folgende ersetzen:

$$A_\lambda B_{\lambda+p} - A_{\lambda+p} B_\lambda = 0$$

und, mit Benützung der aus (3) für $\mu = 1$, $\varrho = \lambda$ hervorgehenden Beziehungen:

$$\begin{cases} A_{\lambda+p} = B_\lambda A_p + A_\lambda A_{p-1} \\ B_{\lambda+p} = B_\lambda B_p + A_\lambda B_{p-1}, \end{cases} \tag{9}$$

auch durch die folgende:

$$A_\lambda (B_\lambda B_p + A_\lambda B_{p-1}) - B_\lambda (B_\lambda A_p + A_\lambda A_{p-1}) = 0, \tag{10}$$

anders geordnet und durch B_λ^2 dividiert[1]):

$$B_{p-1} \left(\frac{A_\lambda}{B_\lambda}\right)^2 - (A_{p-1} - B_p) \frac{A_\lambda}{B_\lambda} - A_p = 0, \tag{11}$$

d. h. die quadratische Gleichung (I) besitzt in diesem Falle die Wurzel $x = \frac{A_\lambda}{B_\lambda}$, sodaß also:

$$A_\lambda - B_\lambda x = 0. \tag{12}$$

Da man andererseits von der Gleichung (11) ausgehend durch Umkehrung der Schlußfolge (mit Berücksichtigung von: $|a_1 \cdots a_\lambda| > 0$) auch zu Gl. (8) gelangen kann, da ferner die auf den Fall $\lambda = 0$ be-

---

1) Unter der Voraussetzung (8) ist stets: $|B_\lambda| > 0$. Denn für $B_\lambda = 0$ würde Gl. (10) lauten:

$$A_\lambda^2 B_{p-1} = 0,$$

es müßte also, wegen $|B_{p-1}| > 0$,

$$A_\lambda = 0$$

sein, was unmöglich ist, da (wegen: $|a_\nu| > 0$) A_λ und B_λ niemals gleichzeitig *Null* sein können (vgl. § 93, Nr. 3, (III), S. 704).

zügliche Aussage, daß für $|A_p| > 0$ die Gleichung (I) *keine* Wurzel $x = 0$ besitzen sollte, sich in die Form setzen läßt:

$$|A_0 - B_0 x| > 0 \quad (\text{wegen: } A_0 = 0,\ B_0 = 1),$$

so findet man:

Die Bedingungen (B) *sind vollkommen äquivalent mit den folgenden:*

$$(\mathrm{B}') \qquad |A_\lambda - B_\lambda x| > 0 \quad \text{für: } \lambda = 0, 1, \cdots, p-2,$$

wo x jede Wurzel der quadratischen Gleichung (I) *bedeutet.*[1])

Hierzu sei noch bemerkt, daß eine Ungleichung von der Form (B′) auch noch für $\lambda = p - 1$ stets von selbst erfüllt ist. Denn aus Gl. (l) folgt:

$$(13) \qquad A_p - B_p x = -x(A_{p-1} - B_{p-1} x),$$

sodaß aus der Annahme:

$$A_{p-1} - B_{p-1} x = 0$$

folgen würde:

$$A_p - B_p x = 0$$

und daher:

$$A_p B_{p-1} - A_{p-1} B_p = (-1)^{p-1} \cdot a_1 \cdots a_p = 0,$$

was, wegen $|a_\nu| > 0$, unmöglich ist.

4. Um die für die Konvergenz des Kettenbruches (1), d. h. für die Existenz eines endlichen $\lim\limits_{\nu \to \infty} \frac{A_\nu}{B_\nu}$ oder, was auf dasselbe hinausläuft, eines von λ unabhängigen $\lim\limits_{\mu \to \infty} \frac{A_{\lambda+\mu p}}{B_{\lambda+\mu p}}$ $(\lambda = 0, 1, \cdots, p-1)$ *notwendigen* Bedingungen zu *hinreichenden* zu ergänzen, entwickeln wir zunächst eine hierfür zweckdienliche Rekursionsformel.

Aus den für jedes $\lambda \geqq 1$ geltenden Beziehungen (9) folgt, wenn $\lambda + p = \nu$ gesetzt wird:

$$(14) \qquad \begin{cases} A_\nu = B_{\nu-p} A_p + A_{\nu-p} A_{p-1} \\ B_\nu = B_{\nu-p} B_p + A_{\nu-p} B_{p-1} \end{cases} \quad (\text{für jedes } \nu \geqq p)$$

und daher für jedes beliebige x:

$$A_\nu - B_\nu x = B_{\nu-p}(A_p - B_p x) + A_{\nu-p}(A_{p-1} - B_{p-1} x),$$

also, wenn x wieder eine beliebige Wurzel der Gleichung (I) bedeutet, mit Benützung von Gl. (13):

$$(15) \qquad A_\nu - B_\nu x = (A_{p-1} - B_{p-1} x)(A_{\nu-p} - B_{\nu-p} x).$$

---

1) Im Falle $p = 2$ besteht (B′) nur aus der Beziehung: $|A_0 - B_0 x| \equiv |x| > 0$, d. h. schließlich: $|A_p| \equiv |A_2| \equiv |a_1 b_2| > 0$, also (da ja nach Voraussetzung $|a_1| > 0$) in Übereinstimmung mit Fußnote 1, S. 884: $|b_2| > 0$.

Setzt man hier: $\nu = \lambda + \mu p$ (wo jetzt: $\lambda = 0, 1, \cdots, p-1$; $\mu = 1, 2, 3, \cdots$), so ergibt sich die folgende für die weiteren Betrachtungen *grundlegende Rekursionsformel:*

$$\text{(II)}\quad A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p}x = (A_{p-1} - B_{p-1}x)(A_{\lambda+(\mu-1)p} - B_{\lambda+(\mu-1)p}x),$$

welche, wegen: $A_{p-1} - B_{p-1}x \neq 0$ (s. den Schluß von Nr. 3), zunächst mittelst vollständiger Induktion bereits erkennen läßt, daß allemal, wenn für irgendein λ aus der Reihe $0, 1, \cdots, p-2$: $A_\lambda - B_\lambda x \neq 0$ bzw. $= 0$, die entsprechende Beziehung auch für $A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p}x$ bei beliebigem $\mu = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ stattfindet.[1])

5. Um unnötige Komplikationen zu vermeiden, erledigen wir zunächst den besonderen Fall:

$$D = 0 \left\{ \begin{array}{c} \text{d. h.: } (A_{p-1} - B_p)^2 = -4A_pB_{p-1} \\ S^2 = 4P \neq 0, \end{array} \right\} {}^{2)},$$

in welchem also die quadratische Gleichung (I) die Doppelwurzel:

$$\text{(16)}\qquad x = \frac{1}{2B_{p-1}}(A_{p-1} - B_p)$$

besitzt. Da sodann:

$$\text{(17)}\qquad A_{p-1} - B_{p-1}x = A_{p-1} - \tfrac{1}{2}(A_{p-1} - B_p) = \tfrac{1}{2}S \neq 0,$$

so nimmt die mit der Rekursionsformel (II) äquivalente Beziehung (15) die Form an:

$$A_\nu - B_\nu x = \tfrac{1}{2}S(A_{\nu-p} - B_{\nu-p}x).$$

Ist $|A_\nu - B_\nu x| > 0$, so folgt weiter:

$$\frac{B_\nu}{A_\nu - B_\nu x} = \frac{2B_\nu}{S}\cdot\frac{1}{A_{\nu-p} - B_{\nu-p}x}$$

und daher:

$$\text{(18)}\qquad \frac{B_\nu}{A_\nu - B_\nu x} - \frac{B_{\nu-p}}{A_{\nu-p} - B_{\nu-p}x} = \frac{1}{S}(2B_\nu - SB_{\nu-p})\cdot\frac{1}{A_{\nu-p} - B_{\nu-p}x}.$$

---

1) Für $\lambda = 0$ läßt sich die betreffende Voraussetzung in die Form setzen:

$$x \neq 0 \text{ bzw. } = 0.$$

Für $\lambda = p-1$ hat man ja, wie bereits bemerkt, stets: $A_\lambda - B_\lambda x \neq 0$, also auch: $A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p} \neq 0$.

2) Im Falle $p = 1$ ist.

$$D = b_1^2 + 4a_1,$$

sodaß also: $b_1 = 2\sqrt{-a_1} \neq 0$, wenn $D = 0$

Da aber mit Benützung von Gl. (16) sich ergibt:

$$A_{\nu-p} - B_{\nu-p}x = \frac{1}{2B_{p-1}}(2A_{\nu-p}B_{p-1} - B_{\nu-p}A_{p-1} + B_{\nu-p}B_p)$$
$$= \frac{1}{2B_{p-1}}\left(2(B_{\nu-p}B_p + A_{\nu-p}B_{p-1}) - B_{\nu-p}(A_{p-1} + B_p)\right)$$
$$= \frac{1}{2B_{p-1}}(2B_\nu - SB_{\nu-p}) \quad \text{(s. Gl. (14) und (7))},$$

so geht die Gleichung (18) in die folgende über:

$$\frac{B_\nu}{A_\nu - B_\nu x} - \frac{B_{\nu-p}}{A_{\nu-p} - B_{\nu-p}x} = \frac{2B_{p-1}}{S}. \tag{19}$$

Setzt man hier wieder $\nu = \lambda + \mu p$, so ergibt sich die folgende Rekursionsformel als für den vorliegenden Sonderfall zweckmäßige Ergänzung zur Rekursionsformel (II):

$$\frac{B_{\lambda+\mu p}}{A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p}x} - \frac{B_{\lambda+(\mu-1)p}}{A_{\lambda+(\mu-1)p} - B_{\lambda+(\mu-1)p}x} = \frac{2B_{p-1}}{S}, \tag{IIa}$$

gültig unter der Voraussetzung, daß keiner der Nenner von der Form $A_\nu - B_\nu x$ den Wert *Null* hat, also, auf Grund der an die Rekursionsformel (II) geknüpften Bemerkung, für jedes λ, für welches: $|A_\lambda - B_\lambda x| > 0$.

Ersetzt man in (IIa) μ der Reihe nach durch $\mu - 1, \mu - 2, \cdots, 1$, so folgt durch Addition der so entstehenden Gleichungen zu Gl. (IIa):

$$\frac{B_{\lambda+\mu p}}{A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p}x} - \frac{B_\lambda}{A_\lambda - B_\lambda x} = \mu \cdot \frac{2B_{p-1}}{S}, \tag{20}$$

und daher (wegen $|B_{p-1}| > 0$ infolge der Voraussetzung (A), S. 883):

$$\lim_{\mu \to \infty} \frac{B_{\lambda+\mu p}}{A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p}x} = \infty. \tag{21}$$

Diese Beziehung lehrt insbesondere, daß, unter der Voraussetzung: $|A_\lambda - B_\lambda x| > 0$, $B_{\lambda+\mu p}$ keinesfalls für unendlich viele μ den Wert *Null* haben kann, da ja im Falle: $B_{\lambda+\mu p} = 0$ (nach S. 704, (III)) stets: $|A_{\lambda+\mu p}| > 0$ und somit der obige Quotient unendlich oft den Wert *Null* annehmen würde. Setzt man also wieder: $K_\nu = \frac{A_\nu}{B_\nu}$, so gestattet die Gleichung (21) die folgende Umformung:

$$\lim_{\mu \to \infty} \frac{1}{K_{\lambda+\mu p} - x} = \infty, \tag{22}$$

und man findet somit schließlich:

$$\lim_{\mu \to \infty} K_{\lambda+\mu p} = x \quad \left(\text{d. h.} = \frac{1}{2B_{p-1}}(A_{p-1} - B_p)\right) \tag{23}$$

für jedes λ, für welches: $|A_\lambda - B_\lambda x| > 0$. Ist diese Bedingung, die ja, wie am Schlusse von Nr. 3 bemerkt wurde, für $\lambda = p - 1$ unter

allen Umständen erfüllt ist, auch für jedes $\lambda = 0, 1, \cdots, p-2$ befriedigt, mit anderen Worten, bestehen *ausnahmslos* die Bedingungen (B′) oder auch die damit gleichwertigen Bedingungen (B), so folgt ja aus der Bemerkung zur Rekursionsformel (II), daß für *jedes* ν: $|A_\nu - B_\nu x| > 0$ Der Kettenbruch *konvergiert* also in diesem Falle gegen den Wert x, und zwar ist die Konvergenz eine *unbedingte*, da ja anderenfalls der Wert x des Kettenbruches irgendeinem Näherungsbruche $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ gleich sein müßte[1]), was wegen $|A_\nu - B_\nu x| > 0$ unmöglich ist.

Indessen bleibt die *Konvergenz* des Kettenbruches noch erhalten, wenn die Bedingungen (B′) bzw. (B) *nicht ausnahmslos* erfüllt sind. Ist nämlich für ein oder mehrere $\lambda = l$: $A_l - B_l x = 0$ [2]), so folgt zunächst aus der Rekursionsformel (II), daß dann auch: $A_{l+\mu p} - B_{l+\mu p} x = 0$ für jedes $\mu = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ sein muß. Da andererseits A_l und B_l bzw. $A_{l+\mu p}$ und $B_{l+\mu p}$ *nicht gleichzeitig* den Wert *Null* haben können, so sind diese Beziehungen nur möglich, wenn: $|B_{l+\mu p}| > 0$, und können daher auch durch die folgende ersetzt werden:

$$K_{l+\mu p} = x \quad (\mu = 0, 1, 2, \cdots\cdots), \tag{24a}$$

sodaß also auch:

$$\lim_{\mu \to \infty} K_{l+\mu p} = x. \tag{24b}$$

Das zuvor bezüglich der Konvergenz des Kettenbruches gefundene Ergebnis erleidet also nur insofern eine Änderung, als die Konvergenz mit Rücksicht auf Gl. (24a) nur noch eine *bedingte* ist. Dieser Fall *müßte* insbesondere eintreten und tritt auch wirklich ein, wenn der Kettenbruch gegen *Null* konvergieren soll, wenn also die quadratische Gleichung (I) die Doppelwurzel $x = 0$ besitzt und sich somit auf die folgende reduziert:

$$B_{p-1} x^2 = 0,$$

d. h. wenn:

$$A_{p-1} - B_p = 0, \quad A_p = 0. \tag{25}$$

In der Tat ist in diesem Falle die Bedingung (B′) für $\lambda = 0$ (wegen: $A_0 = 0$, $x = 0$) *nicht* erfüllt.

---

1) S. § 98, Nr 3, S. 787.

2) Diese Beziehung kann, wie kurz zuvor bemerkt wurde, *niemals* für $l = p-1$ bestehen. Ist sie ferner für irgendein von $p-1$ verschiedenes l erfüllt, so kann *keinesfalls* zugleich auch die Beziehung bestehen:

$$A_{l+1} - B_{l+1} x = 0,$$

da ja alsdann folgen würde:

$$A_l B_{l+1} - A_{l+1} B_l = 0,$$

was wieder, wegen $|a_\nu| > 0$, unmöglich ist.

Die auf den Fall $D=0$ bezüglichen Ergebnisse lassen sich also in folgender Weise zusammenfassen:

Ist $D=0$, so ist die Bedingung:

$$(A) \qquad |B_{p-1}|>0$$

notwendig und hinreichend für die Konvergenz des Kettenbruches $\left[\overline{\frac{a_1}{b_1}, \cdots \frac{a_p}{b_p}}\right]$, und sein Wert ist alsdann gleich der Doppelwurzel x der quadratischen Gleichung (I), *also.*

$$\left[\overline{\frac{a_1}{b_1}, \cdots \frac{a_p}{b_p}}\right]=x=\frac{1}{2B_{p-1}}(A_{p-1}-B_p).$$

Die Konvergenz ist dann und nur dann eine unbedingte, wenn die Bedingungen:

$$(B) \qquad |B_{\lambda+1,\lambda+p}|>0 \text{ (anders geschrieben: } |A^*_{\lambda,\lambda+p}|>0)$$

oder auch

$$(B') \qquad |A_\lambda-B_\lambda x|>0$$

für $\lambda=0,1,\cdots,p-2$ ausnahmslos erfüllt sind.

6. Zur Behandlung des allgemeinen Falles:

$$|D|>0$$

reduzieren wir in der Rekursionsformel (II) durch deren fortgesetzte Anwendung den letzten Faktor der rechten Seite auf $A_\lambda-B_\lambda x$, sodaß sich ergibt:

$$(26) \qquad A_{\lambda+\mu p}-B_{\lambda+\mu p}x=(A_{p-1}-B_{p-1}x)^\mu\cdot(A_\lambda-B_\lambda x),$$

und hieraus folgt, wenn man mit x_1, x_2 die beiden nunmehr verschiedenen Wurzeln der quadratischen Gleichung (I) bezeichnet, *unter der Voraussetzung*: $|A_\lambda-B_\lambda x|>0$, daß:

$$(27\text{a}) \qquad \frac{A_{\lambda+\mu p}-B_{\lambda+\mu p}x_1}{A_{\lambda+\mu p}-B_{\lambda+\mu p}x_2}=M^\mu\cdot\frac{A_\lambda-B_\lambda x_1}{A_\lambda-B_\lambda x_2},$$

wo:

$$(27\text{b}) \qquad M=\frac{A_{p-1}-B_{p-1}x_1}{A_{p-1}-B_{p-1}x_2}.\text{[1]}$$

---

1) Da aus (5a) folgt, daß:

$$A_{p-1}-B_p=B_{p-1}(x_1+x_2),$$

so kann man M auch in die Form setzen:

$$M=\frac{B_p+B_{p-1}x_2}{B_p+B_{p-1}x_1}.$$

Soll nun der Kettenbruch überhaupt *konvergieren*, so muß zum mindesten für hinlänglich große μ: $|B_{\lambda+\mu p}| > 0$ sein, also Gl. (27a) sich in die Form setzen lassen:

$$\frac{K_{\lambda+\mu p}-x_1}{K_{\lambda+\mu p}-x_2} = M^{\mu}\cdot\frac{A_\lambda - B_\lambda x_1}{A_\lambda - B_\lambda x_2} \tag{28}$$

und sodann einen bestimmten, von der Wahl des Index λ unabhängigen $\lim\limits_{\mu\to\infty} K_{\lambda+\mu p}$ liefern, was offenbar nur möglich ist, wenn:

$$\lim_{\mu\to\infty} M^{\mu} = 0 \text{ oder } = \infty\,^{1)},$$

d. h. wenn:

$$|M| = \left|\frac{A_{p-1}-B_{p-1}x_1}{A_{p-1}-B_{p-1}x_2}\right| \neq 1.^{2)} \tag{29}$$

Diese Bedingung ist also jedenfalls eine weitere *notwendige* für die *Konvergenz* des Kettenbruches. Sie läßt sich aber sofort ohne weitere Beschränkung der Allgemeinheit durch die folgende, nur scheinbar engere ersetzen:

$$|M| = \left|\frac{A_{p-1}-B_{p-1}x_1}{A_{p-1}-B_{p-1}x_2}\right| < 1, \tag{C'}$$

da es ja freisteht, sofern die Voraussetzung (29) erfüllt ist, unter x_1 ein für allemal diejenige Wurzel der Gleichung (I) zu verstehen, welche dann durch die Bedingung (C') eindeutig charakterisiert ist.

Es läßt sich nun zunächst zeigen, daß die soeben als *notwendig* für die *Konvergenz* des Kettenbruches erkannte Bedingung (29) bzw. (C') in Verbindung mit (A) und (B) bzw. (B') sich als *hinreichend* sogar für die *unbedingte* Konvergenz erweist. Unter den genannten Bedingungen folgt nämlich zunächst aus Gl. (27a):

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{A_{\lambda+\mu p}-B_{\lambda+\mu p}x_1}{A_{\lambda+\mu p}-B_{\lambda+\mu p}x_2} = 0 \quad \text{für: } \lambda = 0, 1, \cdots, p-1, \tag{30}$$

woraus wiederum hervorgeht, daß für hinlänglich große μ durchweg: $|B_{\lambda+\mu p}| > 0$. Denn wäre $B_{\lambda+\mu p} = 0$ für unendlich viele μ (wobei dann jedesmal: $|A_{\lambda+\mu p}| > 0$), so würde der obige Quotient unendlich oft

---

1) Für $|M| = 1$ — mit Ausschluß von $M = 1$, d. h. $x_1 = x_2$, welcher Fall ja bereits in Nr. 5 erledigt wurde — existiert kein bestimmter $\lim\limits_{\mu\to\infty} M^{\mu}$. Die *Divergenz* des Kettenbruches ist also in diesem Falle stets eine *wesentliche*.

2) Im Falle $p = 1$ lautet diese Bedingung: $\left|\frac{x_1}{x_2}\right| \neq 1$ und enthält also (da die quadratische Gleichung (I) hier die Form hat: $x^2 + b_1 x - a_1 = 0$) als *notwendige* (aber noch nicht hinreichende) Bedingung die Forderung: $|b_1| > 0$.

den Wert 1 annehmen, was der Beziehung (30) widerspricht. Hiernach läßt sich aber Gl. (30) in die Form setzen:

$$(31) \qquad \frac{K_{\lambda+\mu p}-x_1}{K_{\lambda+\mu p}-x_2} = q_{\lambda,\mu}, \text{ wo: } \lim_{\mu\to\infty} q_{\lambda,\mu} = 0 \quad (\lambda = 0, 1, \cdots, p-1),$$

sodaß sich ergibt:

$$K_{\lambda+\mu p}(1 - q_{\lambda,\mu}) = x_1 - x_2 q_{\lambda,\mu}$$

und daher:

$$(32) \qquad \lim_{\mu\to\infty} K_{\lambda+\mu p} = x_1 \quad (\lambda = 0, 1, \cdots, p-1),$$

d. h. schließlich:

$$(33) \qquad \left[\overline{\frac{a_1}{b_1}, \cdots, \frac{a_p}{b_p}}\right] = x_1.$$

Diese *Konvergenz* ist aber eine *unbedingte*, da ja auf Grund der Voraussetzung (B'): $|A_\lambda - B_\lambda x| > 0$ (für $x = x_1$ und $x = x_2$), und zwar für $\lambda = 0, 1, \cdots p-2$, ebenso, wie gezeigt wurde, für $\lambda = p-1$, und sodann im Anschluß an die Rekursionsformel (II) auch $|A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p} x_1| > 0$ für jedes μ, somit schließlich für jedes n: $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = x_1 \neq \frac{A_n}{B_n}$.

Diese letzte Bemerkung führt aber unmittelbar zu der Erkenntnis, daß die *Konvergenz* des Kettenbruches gegen den Wert x_1 noch als eine *bedingte* — ganz analog wie in dem zuvor betrachteten Falle $D = 0$ — erhalten bleibt, wenn für ein oder mehrere $\lambda = l$ die Beziehung besteht: $A_l - B_l x_1 = 0$. Denn aus dieser Voraussetzung folgt wieder mit Hilfe der Rekursionsformel (II), daß dann allgemein: $A_{l+\mu p} - B_{l+\mu p} x_1 = 0$, also: $K_{l+\mu p} = x_1$ für: $\mu = 0, 1, 2, \cdots$, während für alle von l verschiedenen λ das zuvor gefundene Ergebnis: $\lim_{\mu\to\infty} K_{\lambda+\mu p} = x_1$ gültig bleibt, sodaß also schließlich wieder: $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \lim_{\nu\to\infty} K_\nu = x_1$, die *Konvergenz* jedoch, wegen: $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = x_1 = K_{l+\mu p}$ nur eine *bedingte* ist.

Bestehen dagegen für gewisse $\lambda = l$ in *der* Weise Ausnahmen von den Bedingungen (B'), daß: $A_l - B_l x_2 = 0$, so besitzen alle Näherungsbrüche von der Form $K_{l+\mu p}$ $(\mu = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ den Wert x_2, also für $\mu \longrightarrow \infty$ den Grenzwert x_2, während alle übrigen den Grenzwert x_1 liefern. Der Kettenbruch *oszilliert* also in diesem Falle zwischen den beiden Werten x_1 und x_2.

Die vorstehenden Ergebnisse lassen sich also in folgender Weise zusammenfassen (wobei wir aus einem Grunde, der bald ersichtlich werden wird, von der Möglichkeit, die Bedingungen (B') durch die Bedingungen (B) zu ersetzen, vorläufig absehen):

Ist $|D| > 0$ *und werden mit* x_1, x_2 *die (in diesem Falle stets verschiedenen) Wurzeln der quadratischen Gleichung* (I) *bezeichnet, so sind für die unbedingte Konvergenz des Kettenbruches* $\left[\overline{\frac{a_1}{b_1}, \cdots \frac{a_p}{b_p}}\right]$ *die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:*

$$\text{(A)} \qquad |B_{p-1}| > 0$$

$$\text{(B')}\begin{cases}(1) & |A_\lambda - B_\lambda x_1| > 0 \\ (2) & |A_\lambda - B_\lambda x_2| > 0\end{cases} \quad (\lambda = 0, 1, \cdots, p-2)$$

$$\text{(C')} \qquad |A_{p-1} - B_{p-1}x_1| < |A_{p-1} - B_{p-1}x_2|.$$

Sein Wert ist gleich x_1.

Die Bedingungen (A), (B', 2), (C') *sind auch für bedingte Konvergenz notwendig und in dem Sinne hinreichend, daß wirklich nur bedingte Konvergenz, und zwar gleichfalls gegen den Wert* x_1 *stattfindet, wenn die Bedingungen* (B', 1) *nur teilweise*[1]) *erfüllt sind, wenn also für mindestens ein* $\lambda = l$ *die Beziehung besteht:* $A_l - B_l x_1 = 0$.

Besteht dagegen neben den Bedingungen (A) *und* (C') *für mindestens ein* $\lambda = l$ *die Beziehung:* $A_l - B_l x_2 = 0$, *so oszilliert der Kettenbruch zwischen den beiden Werten* x_1 *und* x_2 *(und zwar unabhängig davon, ob die Bedingungen* (B', 1) *ausnahmslos oder nur teilweise*[1]) *erfüllt sind).*[2])

---

1) Man bemerke, daß zum mindesten für $\lambda = p-1$ stets die *beiden* Bedingungen (B', 1) und (B', 2) erfüllt sind, wie aus dem Schlusse von Nr. 3 hervorgeht.

2) Im Falle $p = 1$ reduzieren sich die drei Bedingungen (A), (B'), (C'). auf die einzige:

$$\text{(C')} \qquad |x_1| < |x_2|,$$

wo x_1, x_2 die Wurzeln der Gleichung:

$$x^2 + b_1 x - a_1 = 0$$

sind.

Im Falle $p = 2$ nehmen sie die Form an:

$$\text{(A)} \qquad |b_1| > 0.$$

$$\text{(B')} \qquad |x_1| > 0, \ |x_2| > 0.$$

$$\text{(C')} \qquad |a_1 - b_1 x_1| < |a_1 - b_1 x_2|.$$

Die quadratische Gleichung (I) lautet in diesem Falle:

$$b_1 x^2 - (a_1 - a_2 - b_1 b_2) x - a_1 b_2 = 0.$$

Ist $b_2 = 0$, so geht sie in die folgende über:

$$b_1 x^2 - (a_1 - a_2) x = 0,$$

hat also die beiden Wurzeln 0 und $\frac{a_1 - a_2}{b_1}$. Ist daher $x_1 = 0$, d. h. besteht die Bedingung (C') in der Form:

$$|a_1| < |a_2|,$$

7. Die vorstehende, rein formal durchaus befriedigende Fassung der Konvergenzbedingungen leidet insofern an einer merklichen Unvollkommenheit, als die Bedingungen (B′), (C′) infolge ihrer Abhängigkeit von den im allgemeinen *irrationalen* Ausdrücken der Wurzeln x_1, x_2 noch ziemlich verwickelt sind und ihre praktische Anwendung sich recht umständlich gestaltet. Gilt dies schon von der Einzelbedingung (C′), so noch je nach der Anzahl der Periodenglieder in entsprechend erhöhtem Maße von dem System der Bedingungen (B′). Zwar läßt sich, wie in Nr 3 gezeigt wurde, jedes *Paar* von Bedingungen: $|A_\lambda - B_\lambda x_1| > 0$, $|A_\lambda - B_\lambda x_2| > 0$ durch die entsprechende, wesentlich einfachere Bedingung (B): $|A^*_{\lambda,\lambda+p}| > 0$ ersetzen. Ist nun aber für ein oder mehrere $\lambda = l$: $A^*_{l,l+p} = 0$, so bleibt noch die Frage offen, welche Zusatzbedingungen erforderlich sind, um sicherzustellen, daß in dem betreffenden Falle: $A_l - B_l x_1 = 0$ und *nicht*: $A_l - B_l x_2 = 0$, mithin noch *bedingte* Konvergenz gegen den Wert x_1 vorhanden ist.

8. Um zunächst die Bedingung (C′) in eine zweckmäßigere, nämlich nur *rationale* Verbindungen der Kettenbruchglieder enthaltende umzuformen, setzen wir:

$$(34)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2B_{p-1}}\left(A_{p-1} - B_p + \varepsilon\sqrt{D}\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{2B_{p-1}}\left(A_{p-1} - B_p - \varepsilon\sqrt{D}\right), \end{cases}$$

wo ε eine noch zu bestimmende der beiden Zahlen ± 1 und $\sqrt{D}$ den *Hauptwert* dieser Quadratwurzel vorstellt. Da hiernach:

$$2\left(B_{p-1}x_1 - A_{p-1}\right) = -\left(A_{p-1} + B_p - \varepsilon\sqrt{D}\right) = -\left(S - \varepsilon\sqrt{D}\right)$$

und analog:

$$2\left(B_{p-1}x_2 - A_{p-1}\right) = -\left(S + \varepsilon\sqrt{D}\right),$$

---

so konvergiert der Kettenbruch noch bedingt, und zwar gegen *Null*. Ist dagegen $x_2 = 0$ und $x_1 = \frac{a_1 - a_2}{b_1}$, also:

$$|a_2| < |a_1|,$$

so *oszilliert* der Kettenbruch in der Weise, daß die Näherungsbrüche mit ungeradem Index gegen den Wert $x_1 = \frac{a_1 - a_2}{b_1}$ konvergieren, diejenigen mit geradem Index durchweg den Wert $x_2 = 0$ haben.

In dem besonderen Falle $a_1 = a_2$ fallen die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung in die eine $x = 0$ zusammen, sodaß also nach dem Ergebnis von Nr. 5 der Kettenbruch (geradeso wie für $|a_1| < |a_2|$) nach *Null* konvergiert.

so geht die Bedingung (29) in die folgende über:

$$(35) \qquad |M| \equiv \left|\frac{S-\varepsilon\sqrt{D}}{S+\varepsilon\sqrt{D}}\right| = \left|\frac{1-\varepsilon\frac{S}{\sqrt{D}}}{1+\varepsilon\frac{S}{\sqrt{D}}}\right| \neq 1.$$

Da aber allgemein:

$$\left|\frac{1-\alpha-\beta i}{1+\alpha+\beta i}\right| = 1 \text{ *dann* und *nur* dann, wenn: } \alpha = 0,$$

so erkennt man, daß die Bedingung (35) gleichbedeutend ist mit der folgenden:

$$(36) \qquad \left|\Re\left(\frac{S}{\sqrt{D}}\right)\right| > 0.$$ [1]

Um hieraus die Irrationalität zu beseitigen, bemerke man, daß aus der auf Grund von (36) *auszuschließenden* Beziehung:

$$(37) \qquad \Re\left(\frac{S}{\sqrt{D}}\right) = 0$$

folgen würde, daß $\frac{S}{\sqrt{D}}$ *rein imaginar* oder *Null*, also $\frac{S^2}{D}$ *reell negativ* oder *Null*, etwa:

$$\frac{S^2}{D} = -\varrho, \quad \text{wo: } \varrho \geqq 0,$$

also, wegen: $D = S^2 - 4P$ (s. Gl. (6)):

$$S^2 = 4P \cdot \frac{\varrho}{1+\varrho}.$$

Da $\frac{\varrho}{1+\varrho}$ für: $0 \leqq \varrho < +\infty$ durchweg Werte ϑ von 0 (inkl.) bis 1 (exkl.) annimmt und umgekehrt, wenn gesetzt wird: $\vartheta = \frac{\varrho}{1+\varrho}$, also: $\varrho = \frac{\vartheta}{1-\vartheta}$, *jedem* Werte ϑ des Intervalls $0 \leqq \vartheta < 1$ ein Wert $\varrho \geqq 0$ entspricht, so gewinnt man als Ersatz für die Beziehung (37) die folgende:

$$\frac{S^2}{4P} = \vartheta, \quad \text{wo } \vartheta \text{ *reell* und: } 0 \leqq \vartheta < 1,$$

und es läßt sich somit die Bedingung (36) durch die folgende ersetzen:

$$(C) \qquad \frac{S^2}{4P} \neq \vartheta, \quad \text{wo } \vartheta \text{ *reell* und: } 0 \leqq \vartheta < 1.$$

Ist diese Bedingung und somit auch Ungl. (29) erfüllt, so läßt sich die in den Gleichungen (34) noch offen gebliebene Bestimmung von $\varepsilon = \pm 1$ so treffen, daß im Einklange mit der Bedingung (C'):

$$|A_{p-1} - B_{p-1}x_1| < |A_{p-1} - B_{p-1}x_2|$$

---

1) Sind S und D *reell*, was insbesondere stets der Fall ist, wenn die a_ν, b_ν durchweg *reell* sind, so besteht der Inhalt dieser Bedingungen offenbar in den beiden folgenden:

$$S \neq 0, \quad D > 0.$$

ausfällt. Um dieser Bestimmungsweise von x_1 noch einen etwas kürzeren und prägnanteren Ausdruck zu geben, setzen wir:

$$(38)\qquad \begin{cases} A_{p-1} - B_{p-1}x_1 = z_1 \\ A_{p-1} - B_{p-1}x_2 = z_2, \end{cases}$$

also:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= 2A_{p-1} - B_{p-1}(x_1 + x_2) \\ &= 2A_{p-1} - (A_{p-1} - B_p) = S \\ z_1 z_2 &= A_{p-1}^2 - A_{p-1}B_{p-1}(x_1 + x_2) + B_{p-1}^2 x_1 x_2 \\ &= A_{p-1}^2 - A_{p-1}(A_{p-1} - B_p) - B_{p-1}A_p \\ &= A_{p-1}B_p - A_p B_{p-1} = P \end{aligned}$$

und daher:

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - Sz + P,$$

d. h. z_1 und z_2 sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(\mathrm{III})\qquad z^2 - Sz + P = 0$$

(welche offenbar dieselbe Diskriminante: $D = S^2 - 4P$ besitzt wie die quadratische Gleichung (I)), und die Bedingung (C′) nimmt alsdann die einfache Form an: $|z_1| < |z_2|$, sie läßt sich also ersetzen durch die Bedingung (C) mit dem Zusatze:

$$(39)\qquad x_1 = \frac{A_{p-1} - z_1}{B_{p-1}},$$

wo z_1 die absolut genommen *kleinere* Wurzel der quadratischen Gleichung (III) bedeutet.[1])

9. Um jetzt festzustellen, welche Bedingungen (immer unter der Voraussetzung $|B_{p-1}| > 0$) im Falle: $A^*_{l,l+p} = 0$ noch erfüllt sein müssen, um die *ausnahmslose* Existenz der Bedingungen (B′, 2) und damit die Möglichkeit der *Konvergenz* des Kettenbruches zu sichern, wollen wir zunächst annehmen, es bestehe die obige Voraussetzung ausschließlich für den Spezialwert $l = 0$, sodaß also:

$$(40\mathrm{a})\quad A^*_{0,p} \equiv A_p = 0, \text{ dagegen: } |A^*_{\lambda,\lambda+p}| > 0 \text{ für: } \lambda = 1, 2, \cdots p-2.$$

Soll dann der Kettenbruch noch (bedingt) *konvergieren*, so muß:

$$A_0 - B_0 x_1 = 0 \ \ (\textit{nicht: } A_0 - B_0 x_2 = 0)$$

werden, d. h.:

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}}.$$

---

1) Daß die Wurzeln dieser Gleichung wirklich stets *ungleiche* Absolutwerte besitzen, wird ja durch die Bedingung (C) gesichert.

Die hierzu *notwendige und hinreichende* Bedingung: $|z_1| < |z_2|$ nimmt alsdann, wegen:

$$z_1 = A_{p-1} - B_{p-1}x_1 = A_{p-1},\ z_2 = A_{p-1} - B_{p-1}x_2 = B_p,$$

die Form an:

$$|A_{p-1}| < |B_p|.\text{[1]} \tag{41}$$

Man kann sich überdies leicht überzeugen, daß dann in der Tat der Kettenbruch gegen den Wert $x_1 = 0$ (und schon aus diesem Grunde nur *bedingt*) *konvergiert*.

Aus der Rekursionsformel (II) folgt nämlich für $x = x_1 = 0$ und $\lambda = 0$:

$$A_{\mu p} = A_{p-1}A_{(\mu-1)p} = \cdots = 0, \text{ wegen: } A_p = 0,$$

also auch:

$$K_{\mu p} = 0 \text{ für: } \mu = 1, 2, 3, \cdots\cdots,$$

während im übrigen, wegen: $|M| = \left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right| < 1$, sich wieder ergibt:

$$\lim_{\mu\to\infty} K_{\lambda+\mu p} = x_1 = 0 \text{ für: } \lambda = 1, 2, \cdots p-1.$$

Wird jetzt ferner angenommen, daß *außer der Voraussetzung* (40a) auch noch für ein oder mehrere $\lambda = l_\nu > 0$ die analoge Beziehung besteht:

$$A^*_{l_\nu, l_\nu+p} = 0 \text{ (etwa für: } \nu = 1, \cdots, n, \text{ wo: } n \geqq 1), \tag{40b}$$

so muß zunächst, wenn überhaupt Konvergenz gegen den Wert $x_1 = 0$ möglich sein soll, wieder die Bedingung (41) erfüllt sein; außerdem aber, damit die Voraussetzung (40b) die Beziehung: $A_{l_\nu} - B_{l_\nu}x_1 = 0$ (*nicht*: $A_{l_\nu} - B_{l_\nu}x_2 = 0$) zur Folge hat, wegen $x_1 = 0$ noch die folgende:

$$A_{l_\nu} = 0 \quad (\nu = 1, \cdots, n). \tag{42}$$

Auf Grund dieser Beziehung folgt dann wieder aus der Rekursionsformel (II), daß:

$$K_{l_\nu+\mu p} = 0 \text{ für: } \mu = 1, 2, 3, \cdots\cdots,$$

während für alle von 0 und l_ν verschiedenen λ, wie bisher:

$$\lim_{\mu\to\infty} K_{\lambda+\mu p} = 0,$$

der Kettenbruch also wieder gegen den Wert $x_1 = 0$ *konvergiert*.

Diese Ergebnisse lassen sich ohne Schwierigkeit auf den Fall übertragen, daß an die Stelle der Voraussetzung (40a) eine solche von der Form tritt:

$$A^*_{l, l+p} = 0, \tag{43a}$$

---

1) Da infolge dieser Bedingung: $|z_1| < |z_2|$ ausfällt, so ist die Bedingung (C), welche ja nur zu bewerkstelligen hat, daß $|z_1| \neq |z_2|$, schon darin enthalten

und zwar zunächst wieder für ein einziges $l > 0$. Soll dann die für eine der beiden Gleichungswurzeln x daraus folgende Beziehung:

$$A_l - B_l x = 0$$

durch den Wert $x = x_1$ befriedigt werden und sodann der Kettenbruch gegen den Wert x_1, d. h. gegen $\frac{A_l}{B_l}$ konvergieren, so ist dafür offenbar *notwendig und hinreichend*, daß der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{l+1}^{\infty}$ gegen *Null* konvergiert. Da die hierfür *notwendige* Bedingung: $A^*_{l,l+p} = 0$ (welche ja für *diesen* Kettenbruch genau dieselbe Rolle spielt wie zuvor die Bedingung: $A^*_{0,p} \equiv A_p = 0$ für den Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{\infty}$) bereits erfüllt ist, so zeigt die Vergleichung mit der Beziehung (41), daß als *notwendig und hinreichend* noch die (für $l = 0$ mit (41) zusammenfallende) Bedingung:

$$(44) \qquad |A^*_{l,l+p-1}| < |B_{l,l+p}|$$

hinzutreten muß, damit der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{l+1}^{\infty}$ gegen *Null*, also $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{\infty}$ gegen den Wert $x_1 = \frac{A_l}{B_l}$ (bedingt) *konvergiert*.

Wird jetzt wiederum angenommen, daß *außer der Voraussetzung* (43a) auch für ein oder mehrere $l_\nu > l$ die entsprechende Beziehung besteht, also:

$$(43\text{b}) \qquad A^*_{l_\nu, l_\nu+p} = 0 \text{ (etwa für: } \nu = 1, \cdot \cdot, n, \text{ wo: } n \geqq 1),$$

so tritt an die Stelle der im Falle $l = 0$ gefundenen Zusatzbedingung (42) (nämlich: $A_{l_\nu} \equiv A^*_{0,l_\nu} = 0$) offenbar die durch Vertauschung des Anfangsindex 0 mit der Zahl l daraus hervorgehende:

$$(45) \qquad A^*_{l,l_\nu} = 0,$$

als *notwendige und hinreichende* Bedingung dafür, daß für jedes $\mu = 1, 2, 3, \cdots\cdots$:

$$K^*_{l,l_\nu+\mu p} = 0^{1)}, \text{ also: } K_{l_\nu+\mu p} = \frac{A_l}{B_l} = x_1,$$

während wieder für alle von l und l_ν verschiedenen λ:

$$\lim_{\mu\to\infty} K^*_{\lambda,\lambda+\mu p} = 0, \text{ also: } \lim_{\mu\to\infty} K_{\lambda+\mu p} = \frac{A_l}{B_l} = x_1,$$

---

1) Dabei hat allgemein $K^*_{\mu,\nu}$ die Bedeutung von $\frac{A^*_{\mu,\nu}}{B_{\mu,\nu}}$ (vgl. § 92, Nr. 3, Gl (5), S. 698).

der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{l+1}^{\infty}$ also schließlich gegen *Null* und daher der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{1}^{\infty}$ gegen den Wert $\frac{A_l}{B_l} = x_1$ *konvergiert.*

Fassen wir endlich noch den Fall ins Auge, daß für ein *einziges* $l \geqq 0$ zwar wieder die Gleichung (40a) bzw. (43a) besteht, also:

$$A^*_{l,l+p} = 0 \quad (l \geqq 0),$$

dagegen an Stelle der Bedingung (41) bzw. (44) die *entgegengesetzte*, d. h.:

$$|A^*_{l,l+p-1}| > |B_{l,l+p}| \quad (l \geqq 0),$$

so hätte man:

$$A_l - B_l x_2 = 0,$$

und es muß also in diesem Falle die oben bereits beschriebene besondere Art der *Oszillation* des Kettenbruches zwischen den Werten x_1 und $x_2 = \frac{A_l}{B_l}$ eintreten.

Hieran wird nichts Wesentliches geändert, wenn auch noch für ein oder mehrere $l_\nu > l$:

$$A^*_{l_\nu, l_\nu+p} = 0,$$

und zwar selbst dann nicht, wenn:

$$|A^*_{l,l+p-1}| < |B_{l,l+p}|,$$

jedoch mindestens *eine* der Bedingungen (45) *nicht* erfüllt ist.

Somit läßt sich jetzt das am Schlusse von Nr 6, S. 893, ausgesprochene Resultat in folgender Weise umgestalten:

Ist:

$$|D| \equiv |(A_{p-1} - B_p)^2 + 4\, A_p B_{p-1}| > 0,$$

so sind für <u>*die unbedingte Konvergenz*</u> *des periodischen Kettenbruches* $\left[\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_p}{b_p}\right]$ (*wo durchweg:* $|a_\nu| > 0$) *die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:*

(A) $\quad |B_{p-1}| > 0$

(B) $\quad |A^*_{\lambda,\lambda+p}| > 0$ *für:* $\lambda = 0, 1, \cdots, p-2$

(C) $\quad \frac{S^2}{4P} \neq \vartheta$, wo: $\begin{cases} \vartheta \text{ reell und: } 0 \leqq \vartheta < 1, \\ S = A_{p-1} + B_p,\ P = (-1)^p a_1 \cdots a_p . \end{cases}$[1]

---

1) Für den Fall, daß S und D *reell*, ist die Bedingung (C) gleichwertig mit den beiden folgenden:

$$S \neq 0, \; D > 0$$

(vgl. Fußnote 1, S 895), die im Falle $p = 1$ die Form annehmen:

$$b_1 \neq 0, \; b_1^2 + 4a_1 > 0.$$

Daß der Kettenbruch mit der *reellen*, eingliedrigen Periode $\frac{a_1}{b_1}$, falls $b_1^2 + 4a_1 < 0$, *divergieren* muß, erkennt man schon unmittelbar aus dem Umstande, daß die

Sind dieselben erfüllt, so **konvergiert** *der Kettenbruch gegen den Wert:*

$$x_1 = \frac{A_{p-1} - z_1}{B_{p-1}},$$

wo z_1 die absolut genommen kleinere Wurzel der quadratischen Gleichung:

$$z^2 - Sz + P = 0$$

bedeutet.

Sind außer der Bedingung (A) *die Bedingungen* (B) *bis auf eine einzige erfüllt, etwa:*

$$A^*_{l,\,l+p} = 0 \quad (0 \leqq l \leqq p-2),$$

so **konvergiert** *der Kettenbruch noch* **bedingt** *gegen den Wert x_1, wenn an die Stelle der Bedingung* (C) *die folgende tritt:*

$$(\mathrm{C_1}) \qquad |A^*_{l,\,l+p-1}| < |B_{l,\,l+p}|.$$

Das gleiche findet statt, wenn auch noch für ein oder mehrere $l_\nu > l$:

$$A^*_{l_\nu,\,l_\nu+p} = 0 \quad (\textit{etwa für: } \nu = 1, \cdots, n, \text{ wo: } n \geqq 1),$$

sofern für **jedes** *solche l_ν die Beziehung besteht:*

$$(\mathrm{C_2}) \qquad A^*_{l,\,l_\nu} = 0.$$

Ist dagegen für ein einzelnes $l \geqq 0$:

$$(\mathrm{a}) \qquad A^*_{l,\,l+p} = 0 \quad \textit{und: } |A^*_{l,\,l+p-1}| > |B_{l,\,l+p}|,$$

so **oszilliert** *der Kettenbruch in* **der** *Weise zwischen den beiden Werten x_1 und x_2, daß:*

$$K_{l+\mu p} = x_2 \quad \textit{für: } \mu = 0, 1, 2, \cdots\cdots$$

$$\lim_{\mu \to \infty} K_{\lambda+\mu p} = x_1 \quad \textit{für: } \lambda \neq l.$$

An diesem Ergebnisse wird nichts geändert, wenn für ein oder mehrere $l_\nu > l$:

$$(\mathrm{b}) \qquad A^*_{l_\nu,\,l_\nu+p} = 0 \quad \textit{und: } A_{l,\,l_\nu} = 0 \quad (\text{vgl. } (\mathrm{C_2})).$$

Wurzeln der quadratischen Gleichung (I) in diesem Falle *nicht reell* sind, andererseits der lediglich aus *reellen* Elementen bestehende Kettenbruch, wenn er überhaupt *konvergiert*, gegen einen dieser beiden Wurzelwerte konvergieren müßte.

Dagegen findet im Falle $b_1^2 + 4a_1 = 0$ (also: $D = 0$) auf Grund des Ergebnisses von Nr. 5 noch *Konvergenz* statt (nämlich gegen den Wert $-\frac{b_1}{2}$ als Doppelwurzel der quadratischen Gleichung: $x^2 + b_1^2 x - a_1 = 0$ bzw. als negativ genommene Doppelwurzel von: $z^2 - b_1 z - a_1 = 0$).

Ist indessen für irgendein $v = m$:

(c) $$A^*_{\iota_m, \iota_m+p} = 0 \quad \textit{und:} \ |A^*_{\iota, \iota_m}| > 0,$$

so tritt nur insofern eine Änderung ein, als dann auch:

$$K_{\iota_m+\mu p} = x_2 \quad \textit{für:} \ \mu = 0, 1, 2, \cdots\cdots.$$

Und der Wert x_2 kommt ausschließlich in dieser letzteren Weise zum Vorschein, wenn an die Stelle der Bedingungen (a) *die folgenden treten:*

(d) $$A^*_{\iota, \iota+p} = 0 \quad \textit{und:} \ |A^*_{\iota, \iota+p-1}| < |B_{\iota, \iota+p}|.$$

In allen diesen letztgenannten, durch die Bedingungen (a) *bis* (d) *gekennzeichneten Fällen oszilliert also der Kettenbruch zwischen den beiden Werten x_1 und x_2 in der Weise, daß gewisse Näherungsbruchfolgen durchweg den Wert x_2, die übrigen den Wert oder Grenzwert x_1 liefern.*

10. Die vorstehenden Ergebnisse zeigen, daß ein rein periodischer Kettenbruch $\left[\overline{\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_p}{b_p}}\right]$ mit von Null verschiedenen Teilzählern *im Falle*: $|B_{p-1}| > 0$, sofern er *nicht konvergiert*, stets *oszilliert*, also *wesentlich divergiert.*[1]) Die Möglichkeit *außerwesentlicher Divergenz* ist daher von vornherein nur gegeben, wenn: $B_{p-1} = 0$. In der Tat lassen sich mit Zugrundelegung dieser Voraussetzung aus der allgemeinen Rekursionsformel (II), S. 887, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die *außerwesentliche Divergenz* leicht herleiten. Etwas rascher kann man dasselbe Ziel erreichen, wenn man von der Bemerkung ausgeht, daß gleichzeitig mit dem Kettenbruche: $\left[\overline{\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_p}{b_p}}\right]$ auch der folgende: $\left[b_p, \overline{\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_p}{b_p}}\right]$ *außerwesentlich divergiert* und somit der (rein periodische) Kettenbruch: $\left[\overline{\frac{a_p}{b_p}, \frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_{p-1}}{b_{p-1}}}\right]$ *nach Null konvergiert* und *umgekehrt.*[2]) Die in Nr. 5 und 9 dieses Paragraphen hierfür als notwendig und hinreichend erkannten Bedingungen sind dann also gleichzeitig diejenigen für die *außerwesentliche Divergenz* des vorliegenden Kettenbruches: $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ und lassen sich, wenn man etwa die Näherungsbruch-Zähler und

---

1) Bezüglich des Falles $|M| = 1$ (mit Ausschluß von $M = 1$), also desjenigen Falles, in welchem die Bedingung (C), S. 899, bzw. (C'), S. 893, *nicht* erfüllt ist, vgl. Fußnote 1, S. 891.

2) S. § 97, Nr. 1, S. 727, *I*

-Nenner des Kettenbruches: $\left[\frac{a_p}{b_p}, \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ mit $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ bezeichnet, vermittelst der Beziehung:

$$\frac{\mathfrak{A}_\nu}{\mathfrak{B}_\nu} = \frac{a_p}{b_p + \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}} = \frac{a_p B_{\nu-1}}{b_p B_{\nu-1} + A_{\nu-1}}$$

unmittelbar in die entsprechenden Bedingungen für die A_ν, B_ν umformen.

11. Tritt zu dem *rein* periodischen Kettenbruche $\left[\overline{\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_p}{b_p}}\right]$ noch ein additives Anfangsglied b_0, so sind die bisherigen Ergebnisse für die Feststellung der Konvergenz bzw. Wertbestimmung vollkommen ausreichend. Dabei macht es offenbar prinzipiell keinen Unterschied, ob $b_0 = b_p$ oder $\neq b_p$, der Kettenbruch also auf Grund der in Nr. 1 dieses Paragraphen gegebenen Terminologie noch als *rein* periodisch oder aber als *unrein* periodisch zu bezeichnen ist. Für die *Konvergenz* eines *unrein* periodischen Kettenbruches von der Form: $\left[b_0, \frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_k}{b_k}, \overline{\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}, \ldots \frac{a_{k+p}}{b_{k+p}}}\right]$ (wo $k \geqq 1$) ist offenbar *notwendig*, daß der *rein* periodische Kettenbruch: $\left[\overline{\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}, \ldots \frac{a_{k+p}}{b_{k+p}}}\right]$ *konvergiert* oder *außerwesentlich divergiert.* Ist er *konvergent* und wird sein Wert mit K' bezeichnet, so *konvergiert* auch der Gesamtkettenbruch, und zwar *gegen denselben Wert* wie der endliche Kettenbruch:

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{k-1}|}{|b_{k-1}} + \frac{a_k|}{|b_k + K'},$$

falls dieser einen Sinn hat[1]); anderenfalls *divergiert* er *außerwesentlich.*[2])

Ist jener *rein* periodische Kettenbruch *außerwesentlich divergent*, so *konvergiert* der Kettenbruch: $\left[\frac{a_k}{b_k}, \overline{\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}, \ldots, \frac{a_{k+p}}{b_{k+p}}}\right]$ *gegen Null*, und es ist der Gesamtkettenbruch *konvergent* und *gleichwertig* mit dem endlichen Kettenbruche[1]):

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{k-1}|}{|b_{k-1}},$$

falls dieser letztere einen Sinn hat (was für $k \leqq 2$ offenbar *stets* der Fall ist), während er anderenfalls wieder *außerwesentlich divergiert.*

---

1) S. § 99 den Schluß von Nr. 2, S. 744.

2) S. § 98, Nr. 5, S. 739.

§ 115. „Nahezu“ periodische und „limitär“ periodische Kettenbrüche.

1. Versteht man unter $\left[\frac{a_\nu'}{b_\nu'}\right]_1^\infty$ einen *rein periodischen* Kettenbruch, so soll der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *nahezu periodisch* heißen, wenn alle $|a_\nu' - a_\nu|$, $|b_\nu' - b_\nu|$ einen gewissen, nach Bedarf noch näher zu bestimmenden Kleinheitsgrad nicht überschreiten. Er soll ferner *limitär periodisch* heißen, wenn $\lim\limits_{\nu\to\infty} |a_\nu' - a_\nu| = 0$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} |b_\nu' - b_\nu| = 0$. Ein solcher Kettenbruch ist also in dem eben bezeichneten Sinne zum mindesten von einer gewissen Stelle ab *nahezu periodisch* und hat überdies die Eigenschaft, daß seine Glieder bei unbegrenzt wachsender Stellenzahl dem Zustande der Periodizität sich *unbegrenzt* nähern.

Wir wollen uns hier auf die Betrachtung derjenigen *nahezu* bzw. *limitär periodischen* Kettenbrüche beschränken, die zu einem *eingliedrig periodischen*, etwa $\frac{a'|}{|b'} + \frac{a'|}{|b'} + \cdots\cdots$ in der angedeuteten Beziehung stehen. Mit Rücksicht darauf, daß dieser letztere nur konvergieren kann, wenn $b' \neq 0$ (s. S 891, Fußnote 1), erscheint es von vornherein angezeigt, $b_\nu \neq 0$ bzw. $\lim\limits_{\nu\to\infty} b_\nu \neq 0$ anzunehmen. Und da unter dieser Voraussetzung die in Frage kommenden Kettenbrüche stets auf die *zweite Hauptform* gebracht werden können, so empfiehlt es sich, behufs möglichster Vereinfachung der folgenden Untersuchung zunächst von dieser besonderen Form auszugehen, zumal bei der schließlichen Übertragung auf limitär periodische Kettenbrüche von der allgemeineren Form $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ sogar ein etwas allgemeineres Resultat zum Vorschein kommt als bei direkter Behandlung dieses Falles.

2. Aus den Ergebnissen des vorigen Paragraphen[1]) folgt, daß der eingliedrig periodische Kettenbruch $\frac{a|}{|1} + \frac{a|}{|1} + \cdots\cdot$, ausgenommen den Fall, daß *a reell negativ und zugleich* $|a| \geqq \frac{1}{4}$, gegen den Wert $-z'$ *konvergiert*, wo z' die (allemal vorhandene) absolut genommen *kleinere* Wurzel der quadratischen Gleichung:

$$y^2 - y - a = 0 \tag{1}$$

1) S. insbesondere den Satz von Nr. 9, S 899. Dabei wird (wegen $p = 1$, $a_\nu = a$, $b_\nu = 1$):

$$S = A_0 + B_1 = 1$$
$$P = -a$$

bedeutet[1]) Dieses Resultat läßt sich unabhängig von den Betrachtungen des vorigen Paragraphen nach einer Methode ableiten, welche als Vorbild für die Behandlung eines „nahezu“ eingliedrig periodischen Kettenbruches dienen soll.

Nach § 95, Nr. 2, Gl. (8b), S. 714, hat man:

$$(2)\ \frac{1|}{|1} - \frac{q_1\ |}{|1+q_1} - \frac{q_2\ |}{|1+q_2} - \cdots - \frac{q_n\ |}{|1+q_n} = 1 + s_n,\ \text{wo:}\ s_n = \sum_1^n{}_\nu\, q_1 q_2 \cdots q_\nu$$

und daher, unter der Voraussetzung, daß $1 + s_n \neq 0$, durch Übergang zum reziproken Werte:

$$1 - \frac{q_1\ |}{|1+q_1} - \frac{q_2\ |}{|1+q_2} - \cdots - \frac{q_n\ |}{|1+q_n} = \frac{1}{1+s_n},$$

also schließlich:

$$(3)\qquad \left[\frac{q_1}{1+q_1},\ -\frac{q_{\nu+1}}{1+q_{\nu+1}}\right]_1^{n-1} = \frac{s_n}{1+s_n}.$$

Daraus folgt aber, daß dieser Kettenbruch für $n \longrightarrow \infty$ in einen *konvergenten* übergeht, wenn s_n für $n \longrightarrow \infty$ gegen einen Wert $s \neq -1$ *konvergiert* und daß sodann:

$$(4)\qquad \left[\frac{q_1}{1+q_1},\ -\frac{q_{\nu+1}}{1+q_{\nu+1}}\right]_1^{\infty} = \frac{s}{1+s},\ \text{wo:}\ s = \sum_1^\infty{}_\nu\, q_1 q_2 \cdots q_\nu,$$

während im Falle $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -1$ offenbar *außerwesentliche Divergenz* des Kettenbruches eintritt.[2])

Um dieses Ergebnis auf den Kettenbruch mit der eingliedrigen Periode $\frac{a}{1}$ anzuwenden, werde die *zweite* (also die absolut genommen *größere*) Wurzel der quadratischen Gleichung (1) mit z bezeichnet, sodaß also:

$$(5)\qquad z + z' = 1,\quad zz' = -a,\quad |z| > |z'| \geqq 0$$

und somit:

$$\frac{a|}{|1} + \frac{a|}{|1} + \cdots + \frac{a|}{|1} + \cdots\cdots = -\frac{zz'\ |}{|z+z'} - \frac{zz'\ |}{|z+z'} - \cdots - \frac{zz'\ |}{|z+z'} - \cdots\cdots.^{3)}$$

---

1) Dies paßt auch auf den nach den Festsetzungen des vorigen Paragraphen zunächst ausgeschlossenen Fall $a = 0$, in welchem der betreffende Kettenbruch offenbar gegen den Wert 0 konvergiert.

2) Der Kettenbruch ist auch noch *konvergent*, wenn die Reihe $\sum_1^\infty{}_\nu\, q_1 q_2 \cdots q_\nu$ *nach Unendlich* (im komplexen Sinne) *divergiert*, d. h. wenn $\lim\limits_{n\to\infty} |s_n| = +\infty$, insbesondere also, wenn sie *eigentlich* divergiert. Man findet in diesem Falle mit Benützung von Gl. (3):

$$\left[\frac{q_1}{1+q_1},\ -\frac{q_{\nu+1}}{1+q_{\nu+1}}\right]_1^{\infty} = 1.$$

3) Gilt auch für $a = 0$, in welchem Falle $z = 1$, $z' = 0$.

Setzt man sodann:

$$(6) \qquad \frac{z'}{z} = q, \quad \text{also: } |q| < 1,$$

so ergibt sich durch eine einfache Äquivalenz-Transformation:

$$\frac{a|}{|1} + \frac{a|}{|1} + \cdots + \frac{a|}{|1} + \cdots \cong -z\left(\frac{q\,|}{|1+q} - \frac{q\,|}{|1+q} - \cdots - \frac{q\,|}{|1+q} - \cdots\right),$$

und daher mit Benützung von Gl. (4), wobei jetzt $s = \sum_1^\infty {}^\nu q^\nu = \frac{q}{1-q}$ wird:

$$\frac{a|}{|1} + \frac{a|}{|1} + \cdots + \frac{a|}{|1} + \cdots = -zq = -z'.^{1)}$$

3. Jeder Kettenbruch von der Form $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^n$ läßt sich zunächst *rein formal* stets auf die Form (3) bringen (abgesehen von dem ersten Teilzähler, d. h. schließlich von einem dem Kettenbruche hinzuzufügenden Faktor). Setzt man nämlich für $\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots$:

$$(7) \qquad z_\nu + z'_\nu = 1, \quad z_\nu z'_{\nu+1} = -a_{\nu+1}, \quad \frac{z'_\nu}{z_\nu} = q_\nu,$$

so findet man zunächst unter der Voraussetzung $z'_1 \neq 0$:

$$(8) \qquad \left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^n = \frac{a_1}{z'_1} \cdot \left[\frac{z'_1}{z_1 + z'_1}, \; -\frac{z_\nu z'_{\nu+1}}{z_{\nu+1} + z'_{\nu+1}}\right]_1^{n-1}$$

und hieraus durch Äquivalenz-Transformation:

$$(9) \qquad \left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^n \simeq \frac{a_1}{z'_1} \cdot \left[\frac{q_1}{1+q_1}, \; -\frac{q_{\nu+1}}{1+q_{\nu+1}}\right]_1^{n-1}.$$

Damit diese Beziehung einen Sinn besitzt, ist nur erforderlich, daß die z_ν für $\nu = 1, 2, \cdots n$ aus den beiden ersten Bedingungen (7) als bestimmte, insbesondere auch von Null verschiedene Zahlen sich ergeben. Ist dies für jedes noch so große n der Fall, so findet man schließlich auf Grund der Beziehungen (3) und (4):

$$(10) \qquad \left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty = \frac{a_1}{z'_1} \cdot \frac{s}{1+s},$$

d. h. der Kettenbruch ist dann *konvergent*, wenn die Reihe $\sum_1^\infty {}^\nu q_1 q_2 \cdots q_\nu$ gegen einen von -1 verschiedenen Wert s konvergiert, während im Falle $s = -1$ wieder *außerwesentliche Divergenz* eintritt.

---

1) Zieht man den im Text ausgeschlossenen Fall $q = 1$, also $z = z' = \frac{1}{2}$, $a = -\frac{1}{4}$, in Betracht, so wird $\sum_1^\infty {}^\nu q^\nu = +\infty$ und der Kettenbruch *konvergiert* alsdann gegen den Wert $-\frac{1}{2}$. Vgl. hierzu den Schluß der Fußnote 1, S. 899/900.

4. Im Anschlusse an dieses Ergebnis beweisen wir jetzt den folgenden auf die Konvergenz eines „*nahezu*“ *eingliedrig periodischen* Kettenbruches bezüglichen Satz:

Es sei a eine beliebige Zahl mit Ausschluß der reellen negativen, deren Absolutwert $|a| \geqq \frac{1}{4}$. Ferner sollen z, z', q die durch die Gleichungen (5) *und* (6) *festgelegte Bedeutung haben und es werde gesetzt:*

$$(11) \qquad |z| - |z'| = \delta \quad \left(\text{also: } 0 < \delta \begin{cases} \leqq |z| \\ \leqq 1^{1)}, \end{cases} \quad \frac{\delta}{|z|} = 1 - |q|\right).$$

Genügt sodann die unbegrenzte Folge der im übrigen beliebigen Zahlen a_ν der Bedingung:

$$(\text{A}) \qquad |a - a_\nu| \leqq \frac{1}{4}\delta^2 \quad (\nu = 2, 3, 4, \cdots),$$

so konvergiert der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$, mit Ausnahme eines besonderen Falles, in welchem außerwesentliche Divergenz eintritt (bzw die Form $\frac{0}{0}$ zum Vorschein kommt, falls $a_1 = 0$ sein sollte).

Er konvergiert ausnahmslos und unbedingt unter der Voraussetzung (A), *wenn a einer der beiden folgenden Bedingungen genügt:*

$$(\text{A}_1) \qquad -\frac{1}{4} < a \leqq 0,$$

$$(\text{A}_2) \qquad |q| \leqq \frac{1}{3} \quad (\textit{anders geschrieben } 3|a| - |z|^2 \leqq 0);$$

desgleichen für beliebige a, wenn an die Stelle der Voraussetzung (A) *die folgende engere tritt:*

$$(\text{B}) \qquad |a - a_\nu| \leqq \frac{2|z|^2 - |a|\,\delta}{(2|z| + \delta^2)^2} \cdot \delta^3$$

oder die hieraus resultierende noch engere, aber merklich einfachere:

$$(\text{C}) \qquad |a - a_\nu| \leqq \frac{1}{8}(1 - |q|) \cdot \delta^2.$$

Beweis. Um die Bedingungsformen (A) und (B) soweit als möglich gleichzeitig zu behandeln, erweist es sich als zweckmäßig, von der (beide Formen umfassenden[2]) Voraussetzung auszugehen:

$$(\text{AB}) \qquad |a - a_\nu| \leqq \vartheta(1 - \vartheta)\delta^2, \quad \text{wo: } 0 < \vartheta \leqq 1 - \vartheta.$$

---

1) Man hat nämlich.

$$\delta = |z| - |z'| \leqq |z + z'| = 1$$

2) Die Bedingung (A) kommt zustande für $\vartheta = \frac{1}{2}$; die Bedingung (B) für:

$$\vartheta = \frac{|z| \cdot \delta}{2|z| + \delta^2} \quad (\text{vgl. S. 912, Gl. (30) bis (B)})$$

Wird sodann nach der Vorschrift von Gl. (7) gesetzt:

$$(7)\quad z_\nu + z'_\nu = 1,\quad z_\nu z'_{\nu+1} = -a_{\nu+1},\quad \frac{z'_\nu}{z_\nu} = q_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots),$$

so folgt zunächst, wenn man in der ersten dieser Gleichungen ν durch $\nu + 1$ ersetzt und hierauf den so resultierenden Wert $z'_{\nu+1} = 1 - z_{\nu+1}$ in die zweite Gleichung einführt:

$$z_\nu(1 - z_{\nu+1}) = -a_{\nu+1},$$

und man gewinnt daher die Rekursionsformel:

$$(12)\qquad z_{\nu+1} = \frac{1}{z_\nu}(z_\nu + a_{\nu+1}),$$

vermöge deren nach *willkürlicher* Annahme von z_1 die gesamte Folge der z_ν für $\nu \geqq 2$ eindeutig bestimmt ist, sofern es nur gelingt, jenen Anfangswert z_1 so auszuwählen, daß durchweg $z_\nu \neq 0$ ausfällt. Um dies zu erzielen, bilden wir aus Gl. (12):

$$z - z_{\nu+1} = \frac{1}{z_\nu}\left(z_\nu(z - 1) - a_{\nu+1}\right),$$

anders geschrieben, mit Berücksichtigung von: $z - 1 = -z'$, $zz' + a = 0$ (sodaß es also freisteht, innerhalb der äußeren Klammer den Summanden $zz' + a$ hinzuzufügen):

$$(13)\qquad z - z_{\nu+1} = \frac{1}{z_\nu}\left((z - z_\nu)z' + (a - a_{\nu+1})\right).$$

Wird jetzt $z_1 \neq 1$, im übrigen beliebig, so fixiert, daß:

$$(14)\qquad |z - z_1| \leqq \vartheta\delta,$$

so läßt sich zeigen, daß dann auch für jedes $\nu > 1$ die entsprechende Beziehung:

$$(15)\qquad |z - z_\nu| \leqq \vartheta\delta$$

besteht.

Aus (13) folgt nämlich zunächst (wegen: $z_\nu = z - (z - z_\nu)$):

$$(16)\qquad |z - z_{\nu+1}| \leqq \frac{|z - z_\nu|\;|z'| + |a - a_{\nu+1}|}{|z| - |z - z_\nu|},$$

und daher mit Berücksichtigung der Voraussetzung (AB), wenn Ungl. (15) für irgendein $\nu \geqq 1$ besteht:

$$|z - z_{\nu+1}| \leqq \frac{\vartheta\delta\,|z'| + \vartheta(1-\vartheta)\,\delta^2}{|z| - \vartheta\delta}$$
$$= \vartheta\delta\,\frac{|z'| + \delta - \vartheta\delta}{|z| - \vartheta\delta} = \vartheta\delta \quad (\text{wegen: } |z'| + \delta = |z|).$$

Daraus ergibt sich aber, daß die Beziehung (15) für *jedes* $\nu > 1$ gilt, da sie nach (14) für $\nu = 1$ tatsächlich erfüllt ist. Wegen $\vartheta\delta < \delta \leqq |z|$

folgt dann aus (14), daß $|z_1| > 0$, aus (15), daß $|z_{\nu+1}| > 0$ (für $\nu \geqq 1$), also allgemein:

(17) $$|z_\nu| > 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots).$$

Nun werde speziell gesetzt:

(18) $$\vartheta = \frac{1}{2},$$

sodaß der Ausdruck $\vartheta(1-\vartheta)$ den größten Wert $\left(\text{nämlich } \frac{1}{4}\right)$ annimmt, dessen er für $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ überhaupt fähig ist[1]), und die Bedingung (AB) in die oben mit (A) bezeichnete, den *weitesten* Spielraum bietende, nämlich:

(A) $$|a - a_\nu| \leqq \frac{1}{4}\delta^2$$

übergeht. Dann läßt sich zeigen, daß, von einem besonders zu behandelnden Einzelfall abgesehen, die $|q_\nu|$ einen gewissen positiven echten Bruch niemals übersteigen. Man hat zunächst für jedes $\nu \geqq 1$:

$$\begin{aligned} |q_\nu| \leqq |q| + |q_\nu - q| &= \left|\frac{z'}{z}\right| + \left|\frac{z_\nu'}{z_\nu} - \frac{z'}{z}\right| \\ &= \left|\frac{z'}{z}\right| + \left|\frac{1-z_\nu}{z_\nu} - \frac{1-z}{z}\right| \\ &= \left|\frac{z'}{z}\right| + \left|\frac{z-z_\nu}{z z_\nu}\right|, \end{aligned}$$

also mit Benützung von Ungl. (15) $\left(\text{für } \vartheta = \frac{1}{2}\right)$ und der Beziehung $|z_\nu| \geqq |z| - |z - z_\nu|$:

$$|q_\nu| \leqq \left|\frac{z'}{z}\right| + \frac{\frac{1}{2}\delta}{|z| \cdot \left(|z| - \frac{1}{2}\delta\right)} = \frac{|zz'| + (1 - |z'|) \cdot \frac{1}{2}\delta}{|z| \cdot \left(|z| - \frac{1}{2}\delta\right)}$$

und daher:

(19a) $$|q_\nu| \leqq \gamma < 1, \text{ wenn: } \gamma = \frac{|zz'| + (1-|z'|) \cdot \frac{1}{2}\delta}{|z| \cdot \left(|z| - \frac{1}{2}\delta\right)} < 1,$$

d. h. wenn:

$$|zz'| + (1 - |z'|) \cdot \frac{1}{2}\delta < |z|^2 - |z| \cdot \frac{\delta}{2}$$

$$(|z| + 1 - |z'|) \cdot \frac{1}{2}\delta < |z|(|z| - |z'|) = |z| \cdot \delta,$$

also schließlich:

(19b) $$|z| + |z'| > 1.$$

---

1) Man findet ja für $\vartheta = \frac{1}{2} \pm \varepsilon$:

$$\vartheta(1-\vartheta) = \frac{1}{4} - \varepsilon^2.$$

Diese Bedingung ist aber, wegen: $s + s' = 1$, stets erfüllt, außer wenn s und s' *gleichen Einheitsfaktor* haben, d. h. im vorliegenden Falle (wo ihre Summe *reell* und *positiv* ist) wenn s und s' selbst *reell* und *nicht-negativ* sind und (wegen $s + s' = 1$, $|s| > |s'|$) den Intervallen: $1 \geqq s > \frac{1}{2}$, $0 \leqq s' < \frac{1}{2}$ angehören, sodaß also:

$$a = -ss' = -s(1-s) \text{ nicht-positiv und: } 0 \leqq |a| < \tfrac{1}{4}.^{1)}$$

Schließt man diese Werte von a vorläufig aus (insbesondere also den Wert $a = 0$, also $s' = 0$, $s = 1$) und genügt der Bedingung (14) etwa durch die Wahl $s_1 = s$ (also: $s_1' = s' \neq 0$, $q_1 = q \neq 0$), so ergibt sich auf Grund der Beziehungen (19a), (19b) für jedes $\nu \geqq 1$:

$$|q_\nu| \leqq \alpha < 1$$

und daraus (vermittelst des Cauchyschen Fundamentalkriteriums zweiter Art) die (absolute) *Konvergenz* der Reihe $\sum q_1 q_2 \cdots q_\nu$. Setzt man dann wiederum:

$$\sum_1^\infty {}_\nu\, q_1 q_2 \cdots q_\nu = s,$$

so ist auf Grund des Ergebnisses von Nr. 3 der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ *konvergent*, und zwar (s. Gl. (10), S. 905):

$$\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty = \frac{a_1}{s'} \cdot \frac{s}{1+s}, \tag{20}$$

ausgenommen den einzigen Fall $s = -1$, in welchem er offenbar *außerwesentlich divergiert* (bzw. die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, falls $a_1 = 0$ ist).

In den hierbei zunächst ausgeschlossenen Fällen:

$$-\tfrac{1}{4} < a \leqq 0 \quad (\text{also: } 0 < 1 + 4a \leqq 1) \tag{21}$$

hat man:

$$s = \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+4a}\right) > 0, \quad s' = \tfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1+4a}\right) \geqq 0$$

und daher:

$$\delta = s - s' = \sqrt{1+4a},$$

sodaß die Bedingung (A) die Form annimmt:

$$|a - a_\nu| \leqq a + \tfrac{1}{4}. \tag{22}$$

Ist aber diese Bedingung erfüllt, so findet man weiter:

$$|a_\nu| \leqq |a| + |a_\nu - a| \leqq \tfrac{1}{4} \quad (\text{wegen: } |a| = -a),$$

1) Vgl. Fußnote 1 der vorigen Seite.

mithin ergibt sich auf Grund des Kriteriums (A) von § 112, Nr. 4, S. 869, die *unbedingte Konvergenz* des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$, übereinstimmend mit der an die Bedingungen (A), (A_1) geknüpften Behauptung.

Der an die Bedingungen (A), (A_2) geknüpfte Fall *unbedingter Konvergenz* ergibt sich in folgender Weise.

Trifft man für den Anfangswert der z_ν die bisher ausgeschlossene Wahl $z_1 = 1$ (sodaß also: $z_1' = 0$, $q_1 = 0$), so ist die Bedingung (14) bei $\vartheta = \frac{1}{2}$ dann und nur dann erfüllt, wenn:

$$| z - 1 | \leqq \frac{1}{2} \delta,$$

anders geschrieben:

$$| z' | \leqq \frac{1}{2} (| z | - | z' |), \text{ d. h. } 3 | z' | \leqq | z |,$$

also schließlich:

(23) $| q | \leqq \frac{1}{3}$ oder auch: $3 | a | - | z |^2 \leqq 0$ (wegen: $| z z' | = | a |$),

übereinstimmend mit der Bedingung (A_2) des ausgesprochenen Satzes.

Schließt man für a wieder die Werte $-\frac{1}{4} < a \leqq 0$ aus, für welche die unbedingte Konvergenz des Kettenbruches in dem behaupteten Umfange ja bereits feststeht, so hat man (neben $q_1 = 0$) wie oben $| q_\nu | \leqq \gamma < 1$ für jedes $\nu \geqq 2$ und somit die *Konvergenz* der Reihe $\sum q_2 q_3 \cdots q_\nu$. Zugleich findet man (wegen: $z_1 = 1$, $z_1' = 0$) mit Benützung der Gleichungen (7):

$$\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^n = \frac{a_1|}{|1} - \frac{z_2'\ |}{|z_2 + z_2'} - \frac{z_2 z_3'\ |}{|z_3 + z_3'} - \cdots - \frac{z_{n-1} z_n'\ |}{|z_n + z_n'}$$
$$\simeq a_1 \left(\frac{1|}{|1} - \frac{q_2\ |}{|1 + q_2} - \frac{q_3\ |}{|1 + q_3} - \cdots - \frac{q_n\ |}{|1 + q_n} \right)$$

und daher mit Hilfe der Formel (2), S. 902:

$$\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^n = a_1 (1 + \sum_2^n{}^\nu q_2 q_3 \cdots q_\nu),$$

woraus die *Konvergenz* des Kettenbruches mit der Wertbestimmung:

(24) $$\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty = a_1 (1 + \sum_2^\infty{}^\nu q_2 q_3 \cdots q_\nu)$$

hervorgeht. Die Konvergenz ist im übrigen eine *unbedingte*, da ja die Wirksamkeit der Voraussetzung $| q | \leqq \frac{1}{3}$ durch Weglassung von Anfangsgliedern des Kettenbruches in keiner Weise gemindert wird.

Es bleibt schließlich noch zu zeigen, daß auch für *beliebige* a die *unbedingte Konvergenz* des Kettenbruches gesichert ist, wenn die a_ν der engeren Bedingung (B) bzw (C) genügen, daß also unter dieser Voraussetzung stets $|1+s|>0$ ausfällt.

Nun ist:

$$|1+s| = \left|\frac{1}{1-q} + \left(s - \frac{q}{1-q}\right)\right| \geqq \frac{1}{1+|q|} - \left|s - \frac{q}{1-q}\right|$$

und daher:

$$(25) \qquad |1+s|>0, \text{ wenn: } \left|s-\frac{q}{1-q}\right| - \frac{1}{1+|q|} < 0.$$

Um diesen Ausdruck abzuschätzen, hat man wegen $|q|<1$:

$$(26) \quad \left|s - \frac{q}{1-q}\right| = \left|\sum_1^\infty{}^\nu (q_1 q_2 \cdots q_\nu - q^\nu)\right| \leqq \sum_1^\infty{}^\nu |q_1 q_2 \cdots q_\nu - q^\nu|.$$

Nun ist:

$$q_1 q_2 \cdots q_\nu - q^\nu = \prod_1^\nu{}^\lambda \{q - (q - q_\lambda)\} - q^\nu$$

und, da das Glied q^ν bei Ausführung der angedeuteten Multiplikation sich weghebt:

$$|q_1 q_2 \cdots q_\nu - q^\nu| \leqq \prod_1^\nu{}^\lambda \{|q| + |q - q_\lambda|\} - |q|^\nu.$$

Andererseits findet man mit Benützung von Gl. (15):

$$|s - s_\lambda| < \vartheta\delta \quad (\text{also: } |s_\lambda| \geqq |s| - |s - s_\lambda| > |s| - \vartheta\delta)$$

mit Ausschluß der Gleichheit, sofern nur s_1 so bestimmt wird, daß: $|s - s_1| < \vartheta\delta$ (mit Ausschluß der Gleichheit), was aber sicher der Fall ist, wenn man, wie oben geschehen ist, $s_1 = s$ annimmt. Hiernach ergibt sich:

$$|q - q_\lambda| = \left|\frac{1-s}{s} - \frac{1-s_\lambda}{s_\lambda}\right| = \left|\frac{s-s_\lambda}{s s_\lambda}\right| < \frac{\vartheta\delta}{|s|(|s|-\vartheta\delta)}$$

und daher:

$$|q_1 q_2 \cdots q_\nu - q^\nu| < \left(|q| + \frac{\vartheta\delta}{|s|(|s|-\vartheta\delta)}\right)^\nu - |q|^\nu,$$

also schließlich:

$$(27) \qquad \sum_1^\infty{}^\nu |q_1 q_2 \cdots q_\nu - q^\nu| < \frac{1}{1 - |q| - \dfrac{\vartheta\delta}{|s|(|s|-\vartheta\delta)}} - \frac{1}{1-|q|}$$

unter der Voraussetzung, daß ϑ klein genug angenommen wird, um

$$|q| + \frac{\vartheta\delta}{|s|(|s|-\vartheta\delta)} < 1$$

ausfallen zu lassen, d. h. wenn:

$$\frac{\vartheta\delta}{|z|-\vartheta\delta} < (1-|q|)\cdot|z| = \delta,$$

also:

$$\vartheta < \frac{|z|}{1+\delta}. \tag{28}$$

Es wird sich zeigen, daß bei der nunmehr vorzunehmenden Fixierung von ϑ dieser Bedingung wirklich genügt wird.

Durch Kombination der Ungleichungen (26), (27) ergibt sich:

$$\left|s-\frac{q}{1-q}\right| < \frac{1}{1-|q|-\frac{\vartheta\delta}{|z|(|z|-\vartheta\delta)}} - \frac{1}{1-|q|} \text{ (mit Ausschluß der Gleichheit),}$$

folglich ist die Bedingung (25) erfüllt, wenn gesetzt wird:

$$\frac{1}{1-|q|-\frac{\vartheta\delta}{|z|(|z|-\vartheta\delta)}} - \frac{2}{1-|q|^2} = 0, \tag{29}$$

wenn also ϑ aus der Gleichung bestimmt wird:

$$(1-|q|^2)|z|(|z|-\vartheta\delta) - 2(1-|q|)|z|(|z|-\vartheta\delta) + 2\vartheta\delta = 0,$$

kürzer geschrieben (nach Division mit $(1-|q|)\cdot|z| = \delta$):

$$(|q|-1)(|z|-\vartheta\delta) + 2\vartheta = 0.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\vartheta = \frac{\delta}{2+(1-|q|)\delta} = \frac{\delta|z|}{2|z|+\delta^2}, \tag{30}$$

und dieser Wert genügt in der Tat der Bedingung (28), da:

$$\vartheta = \frac{|z|}{2\left|\frac{z}{\delta}\right|+\delta} \leqq \frac{|z|}{2+\delta} < \frac{|z|}{1+\delta}.$$

Ferner findet man:

$$1-\vartheta = \frac{2|z|+\delta^2-\delta|z|}{2|z|+\delta^2} = \frac{2|z|-\delta|z'|}{2|z|+\delta^2},$$

sodaß also die Bedingung (AB) bei dieser Wahl von ϑ die Form (B) der Behauptung annimmt, nämlich:

$$\text{(B)} \qquad |a-a_\nu| \leqq \frac{|z|(2|z|-\delta|z'|)}{(2|z|+\delta^2)^2}\cdot\delta^3 = \frac{2|z|^2-|a|\delta}{(2|z|+\delta^2)^2}\cdot\delta^3,$$

die dann auf Grund der im Anschluß an die Bedingung (25) vorgenommenen Bestimmung von ϑ die *Konvergenz* des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ sicher stellt. Diese letztere ist dann wieder eine *unbedingte*, da ja die Wirksamkeit der Bedingung (B) durch Weglassung von Anfangsgliedern des Kettenbruches keine Einbuße erleidet.

Um schließlich diese Bedingung noch durch eine zwar engere, aber einfachere zu ersetzen, hat man:

$$\vartheta = \frac{\left|\frac{\vartheta}{z}\right|}{\left|\frac{2}{z}\right| + \left|\frac{\vartheta}{z}\right|^2} = \frac{1 - |q|}{\left|\frac{2}{z}\right| + (1 - |q|)^2}.$$

Nun ist.

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{z + z'}{z}\right| = |1 + q| \begin{cases} \leqq 1 + |q| \\ \geqq 1 - |q|, \end{cases}$$

also:

$$\vartheta \begin{cases} \geqq \dfrac{1 - |q|}{2(1 + |q|) + (1 - |q|)^2} = \dfrac{1 - |q|}{3 + |q|^2} > \dfrac{1 - |q|}{4} \\ \leqq \dfrac{1 - |q|}{2(1 - |q|) + (1 - |q|)^2} = \dfrac{1}{3 - |q|} < \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

und daher:

$$1 - \vartheta > \frac{1}{2},$$

sodaß die Bedingung (B) *a fortiori* erfüllt ist, wenn:

$$|a - a_\nu| \leqq \frac{1}{8}(1 - |q|) \cdot \delta^2 \text{ [1]}$$

entsprechend der Behauptung (C) des ausgesprochenen Satzes.

5. Der soeben bewiesene Satz verlangt nur, daß die a_ν für $\nu \geqq 2$ in einer gewissen, durch die Bedingung (A) bzw. (B) oder (C) gekennzeichneten *Nähe* einer bis auf die angegebenen Ausnahmen beliebigen Zahl a liegen. Wird statt dessen jetzt angenommen, daß $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu = a$, so wird $|a - a_\nu|$ für hinlänglich große ν *beliebig* klein, also von einem gewissen ν ab, etwa für $\nu \geqq m$, jedenfalls klein genug, daß die Bedingung (B) (oder sogar (C)) des vorigen Satzes für $\nu \geqq m$ erfüllt ist. Daraus folgt dann aber, daß der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_m^\infty$ *unbedingt konvergiert* und somit $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ *höchstens außerwesentlich divergiert.* Somit ergibt sich der folgende Satz:

Ist $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu = a$, *wo a jede beliebige Zahl sein kann, mit Ausschluß der reellen negativen, die absolut genommen* $\geqq \frac{1}{4}$ *sind, so ist der (eingliedrig limitär periodische) Kettenbruch* $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ *höchstens außerwesentlich divergent und zum mindesten von einer gewissen Stelle ab unbedingt konvergent.*

---

1) Mit Hilfe einer etwas umständlicheren, auf gewissen üblichen Hilfsmitteln der Differentialrechnung beruhenden Abschätzung läßt sich der in obiger Ungleichung auftretende Faktor $\frac{1}{8}$ durch den vorteilhafteren $\frac{1}{4}$ ersetzen.

6. Da für einen Kettenbruch von der allgemeineren Form $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, wo $|b_\nu| > 0$, die Äquivalenz besteht (§ 94, Nr. 4, Gl. (24), (25), S. 711):

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \simeq \left[\frac{a'_\nu}{1}\right]_1^\infty, \text{ wo: } a'_1 = \frac{a_1}{b_1}, \; a'_\nu = \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} \text{ für } \nu \geqq 2, \tag{31}$$

so folgt, daß ein solcher Kettenbruch schon den *Charakter eines limitar periodischen* besitzt, falls:

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} = a', \tag{32}$$

wo a' nur den zuvor der Zahl a auferlegten Beschränkungen zu genügen hat, damit der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ zum mindesten von einer bestimmten Stelle ab *unbedingt konvergiert.* Hierzu wäre offenbar *hinreichend,* daß der Kettenbruch *limitar periodisch* in dem ursprünglichen Sinne von Nr. 1 dieses Paragraphen, daß also:

$$\lim_{\nu \to \infty} a_\nu = a, \quad \lim_{\nu \to \infty} b_\nu = b \neq 0 \tag{33}$$

(wo $\frac{a}{b^2}$ nicht reell negativ und zugleich numerisch $\geqq \frac{1}{4}$). Aber die Bedingung (32) verlangt offenbar *erheblich weniger* Bezeichnet man z. B. mit (ω_ν), (ε_ν) zwei Folgen positiver Zahlen, die den Bedingungen genügen:

$$\lim_{\nu \to \infty} \omega_\nu = +\infty, \quad \lim_{\nu \to \infty} \varepsilon_\nu = 0, \quad \lim_{\nu \to \infty} \frac{\omega_\nu}{\omega_{\nu-1}} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{\varepsilon_\nu}{\varepsilon_{\nu-1}} = 1,$$

mit (a_ν), (b_ν) wieder zwei durch die Bedingungen (33) charakterisierten Zahlenfolgen, so haben offenbar auf Grund der Äquivalenzbeziehung (31) auch die beiden Kettenbrüche $\left[\frac{\omega_\nu^2 a_\nu}{\omega_\nu b_\nu}\right]_1^\infty$, $\left[\frac{\varepsilon_\nu^2 a_\nu}{\varepsilon_\nu b_\nu}\right]_1^\infty$ *limitär periodischen* Charakter, obschon die Teilzähler und -nenner des *ersten* den Grenzwert ∞ besitzen, diejenigen des *zweiten* (insbesondere also die Teil*nenner* entgegen der zweiten Bedingung (33)) gegen 0 konvergieren.

Hat man ferner zwar: $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu = a$, dagegen: $\lim\limits_{\mu \to \infty} b_{2\mu-1} = b' \neq 0$, $\lim\limits_{\mu \to \infty} b_{2\mu} = b'' \neq 0$, so folgt: $\lim\limits_{\nu \to \infty} \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} = \frac{a}{b' b''}$, sodaß also auch in diesem Falle der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ den Charakter eines *eingliedrig limitär periodischen* besitzt, obschon die $b_{2\mu-1}$, $b_{2\mu}$ *verschiedenen* Grenzwerten zustreben.

7. Der Wert $a = -\frac{1}{4}$ gehörte bei der Aussage von Nr. 5 über den Konvergenzcharakter des limitär periodischen Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ (wo: $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = a$) schon zu den ausdrücklich ausgeschlossenen. Aber, gleichwie die Annahme $a = -\frac{1}{4}$ für den schlechthin periodischen Kettenbruch $\frac{a|}{|1} + \frac{a|}{|1} + \cdots\cdots$ einen besonderen Fall von *Konvergenz* liefert[1]), so kann auch der limitär periodische Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ zum mindesten von einer gewissen Stelle ab noch (unbedingt) *konvergieren*, wenn $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = -\frac{1}{4}$. Es liegt die Vermutung nahe, daß dies insbesondere der Fall sein wird, wenn von einer gewissen Stelle ab durchweg: $|a_\nu| \leqq \frac{1}{4}$, und die Richtigkeit dieser Vermutung wird in der Tat durch das Kriterium (A) des § 112, Nr. 4, S. 869, bestätigt.

Als einigermaßen überraschend mag es dagegen erscheinen, daß auch im Falle $|a_\nu| > \frac{1}{4}$ (für jedes einzelne ν) bei $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = -\frac{1}{4}$ noch *Konvergenz* stattfinden kann, wie aus dem Kriterium (B) der eben angeführten Stelle unmittelbar hervorgeht. Danach ist insbesondere der Kettenbruch:

$$\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty \equiv \left[\frac{-\frac{\nu^2}{4\nu^2-1}}{1}\right]_1^\infty$$

$\left(\text{bzw. der damit äquivalente: } \left[\frac{-\nu^2}{2\nu+1}\right]_1^\infty\right)$ noch (unbedingt) *konvergent*, obschon ja jeder Teilzähler numerisch *oberhalb* $\frac{1}{4}$ liegt und $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = -\frac{1}{4}$ ist.

Es erscheint ganz lehrreich, dieses Ergebnis noch mit Hilfe der in Nr. 3 dieses Paragraphen auseinandergesetzten Methode zu bestätigen und auf diese Weise den Wert des betreffenden Kettenbruches zu bestimmen. Wegen $a = -\frac{1}{4}$ hat jetzt die quadratische Gleichung (1) die Doppelwurzel $\frac{1}{2}$ und man hat daher zu setzen (s. Gl. (5)):

$$z = z' = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{z'}{z} = 1$$

und sodann (s. Gl. (7)):

$$z_\nu + z'_\nu = 1, \quad z_\nu z'_{\nu+1} = \frac{(\nu+1)^2}{4(\nu+1)^2-1} = \frac{\nu+1}{2\nu+1} \cdot \frac{\nu+1}{2\nu+3} \, (\nu \geqq 1).$$

Wird jetzt z_1 so fixiert, daß:

$$z_1 = \left(\frac{\nu+1}{2\nu+1}\right)_{\nu=1} = \frac{2}{3},$$

---

1) Vgl. S. 905, Fußnote 1.

so folgt allgemein für $\nu \geqq 1$:

$$z'_\nu = \frac{\nu+1}{2\nu+1}, \quad z'_{\nu+1} = \frac{\nu+1}{2\nu+3}, \quad \text{also:}\ z'_\nu = \frac{\nu}{2\nu+1}, \quad q_\nu = \frac{\nu}{\nu+1}$$

und daher auf Grund der Beziehungen (8) und (3):

$$\left[\frac{-\frac{\nu^2}{4\nu^2-1}}{1}\right]_1^n = -\frac{s_n}{1+s_n}, \quad \text{wo:}\ s_n = \sum_1^n q_1 \cdots q_\nu = \sum_1^n \frac{1}{\nu+1},$$

somit $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \infty$ und schließlich:

$$\left[\frac{-\frac{\nu^2}{4\nu^2-1}}{1}\right]_1^\infty = -1.$$

Die *Konvergenz* des *Kettenbruches* beruht also in diesem besonderen Falle (ganz analog wie im Falle des rein periodischen Kettenbruches $\frac{-\frac{1}{4}|}{|1} - \frac{\frac{1}{4}|}{|1} - \cdots$, vgl. S. 905, Fußnote 1) auf der *Divergenz* der *Reihe* $\sum q_1 \cdots q_\nu$.

Anhang.

Literaturnachweise, Anmerkungen und Ergänzungen.

Die wesentliche Grundlage für den Inhalt des vorliegendes Bandes wird außer durch die in der Vorrede erwähnten Vorlesungen, in denen ich selbstverständlich die ältere Literatur reichlich benutzt habe, durch eine Reihe von Arbeiten gebildet, die zumeist aus Anlaß dieser Vorlesungen bzw. zu deren literarischer Vervollständigung entstanden sind. Es sind dies die folgenden:

In den Mathematischen Annalen:

[1] Über die Multiplikation bedingt konvergenter Reihen. 21 (1882), S. 327—378.

[2] Über die Wertveränderungen bedingt konvergenter Reihen und Produkte. 22 (1883), S. 455—503.

[3] Über die Konvergenz unendlicher Produkte. 33 (1889), S. 119—154. Mit Nachtrag: 42 (1893), S. 183.

[4] Allgemeine Theorie der Divergenz und Konvergenz von Reihen mit positiven Gliedern. 35 (1890), S. 297—394.

[5] Zur Theorie der Dirichletschen Reihen. 37 (1890), S. 38—60.

[6] Zur Theorie der bestimmten Integrale und der unendlichen Reihen. 37 (1890), S. 591—604.

[7] Über analytische Darstellung unendlicher Reihen, die durch Gliederinversion aus einer gegebenen hervorgehen. 38 (1891), S. 153—160

[8] Zur Theorie der Konvergenzkriterien zweiter Art. 39 (1891), S. 125—129.

[9] Über bedingte Konvergenz unendlicher Produkte. 44 (1894), S. 413—416.

[10] Zur Theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen. 53 (1900), S. 289—321.

In den Sitzungsberichten der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Physikalische Klasse:

[11] Über die sogenannte Grenze und die Grenzgebiete zwischen Konvergenz und Divergenz. 1896, S. 605—624.

[12] Elementare Theorie der unendlichen Doppelreihen. 1897, S. 101—152.

[13] Über die Du Bois Reymondsche Konvergenzgrenze und eine besondere Form der Konvergenzbedingung für unendliche Reihen. 1897, S. 303—334.

[14] Über die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche. 1898, S. 295—324.

[15] Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und π. 1898, S 325—337.

[16] Über ein Konvergenzkriterium für Kettenbrüche mit positiven Gliedern. 1899, S. 261—268.

[17] Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise. 1900, S. 37—100.

[18] Über die Konvergenz periodischer Kettenbrüche. 1900, S. 463—488.

[19] Über die Divergenz gewisser Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. 1901, S. 505—524.

[20] Über einige Konvergenzkriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern. 1905, S. 359—380.

[21] Über Konvergenz- und Divergenzkriterien für zwei- und mehrfach unendliche Reihen. 1908, S. 41—54.

[22] Über Konvergenz und funktionentheoretischen Charakter gewisser limitär-periodischer Kettenbrüche. 1910, S. 3—52.

[23] Über die Äquivalenz der sogenannten Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte und die Verallgemeinerung eines beim Beweise benützten Grenzwertsatzes. 1916, S. 209—224. — Nachtrag: 1918, S. 89—92.

[24] Über die Konvergenz periodischer und gewisser nicht-periodischer Kettenbrüche mit komplexen Gliedern. 1917, S. 221—250.

[25] Zur Theorie der unendlichen Kettenbrüche. 1918, S. 65—89.

[26] Über eine Konvergenzbedingung für unendliche Reihen, die durch iterierte Mittelbildung reduzibel sind. 1920, S. 275—284.

Ferner:

[27] Allgemeine Theorie der Divergenz und Konvergenz von Reihen mit positiven Gliedern. Math. Congress papers Chicago 1893. New-York, 1896, S. 305—329.

[28] Über den Zahl- und Grenzbegriff im Unterricht. Jahresb. d. D M. V. 6 (1898), S. 73—83.

[29] Über Konvergenzkriterien für Reihen mit komplexen Gliedern. Archiv f. Math. u. Phys. (3) 4 (1902), S. 1—19.

Abgesehen von den zahlreichen in den genannten Arbeiten enthaltenen Literaturangaben habe ich die hauptsächlichste dem Stoffgebiete dieses Bandes angehörige Literatur in zwei Artikeln der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften und merklich vervollständigt in den entsprechenden drei Artikeln der (von J Molk redigierten und teilweise durch Zusätze vermehrten) französischen Ausgabe zusammengestellt, nämlich:

In der deutschen Ausgabe — I A 3 (1898), S. 47—146. Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse.

I G 3 (1904), S. 1121—1128. Unendliche Prozesse mit komplexen Termen.

In der französischen Ausgabe — I 3 (1907), S. 133—208 Nombres irrationels et notion de limite.

I 4 (1907), S. 210—328. Algorithmes illimités.

I 6 (1908), S. 470—488. Algorithmes illimités de nombres complexes.

Da ich den Umfang dieses Anhanges nicht unverhältnismäßig ausdehnen möchte und es mir daher nicht angebracht erscheint, einen erheblichen Teil der in diesen Artikeln und den genannten Spezialarbeiten enthaltenen, überaus zahlreichen Literaturangaben hier zu wiederholen, so begnüge ich mich zunächst mit dem generellen Hinweis auf deren Existenz und werde mich im übrigen in bezug auf Literaturangaben auf eine Anzahl einzelner Fälle, zum Teil unter speziellerem Hinweis auf die obigen Publikationen[1]) und insbesondere auf die Erwähnung solcher hier benützter Arbeiten beschränken, die *nach* dem Erscheinen der französischen Encyklopädie veröffentlicht worden sind oder mit solchen in historischem Zusammenhange stehen. Hiernach wollen also die weiterhin gegebenen Literaturnachweise nicht im entferntesten irgendwelchen Anspruch auf Vollständigkeit machen, und ich bitte ausdrücklich, es entschuldigen zu wollen, wenn bei dieser Sachlage irgendwelche Prioritätsansprüche dieses oder jenes Autors nicht in das gehörige Licht gestellt werden sollten, um so mehr, als ich auch schon im Text mit dem Gebrauche von Eigennamen zur Kennzeichnung von Sätzen oder Methoden verhältnismäßig sparsam umgegangen bin. Und da ich in einer Besprechung von Abteilung II aus diesem Grunde bereits entschiedenen Tadel erfahren habe, so möchte ich mit

1) Dabei werden die angeführten Spezialarbeiten unter den betreffenden Nummern (in eckigen Klammern), die deutsche bzw. französische Ausgabe der Encyklopädie als *D. Enc.* bzw. *Enc. fr.* zitiert.

dem Bekenntnisse nicht zurückhalten, daß jener Gepflogenheit sogar eine gewisse Absicht zugrunde liegt Ich habe nämlich eine ausgesprochene Abneigung gegen die immer mehr um sich greifende Mode, jedes neue Sätzchen oder Methödchen sofort mit der Schutzmarke des Erfinders zu versehen und sodann von dem X-schen Satze oder der Y-schen Methode mit der gleichen Selbstverständlichkeit zu sprechen, wie etwa von dem Cauchyschen Integralsatze oder einer Riemannschen Fläche, dem Abelschen Theorem oder der Weierstraßischen $\wp$-Funktion. Es mag dann wohl sein, daß ich in berechtigter Opposition gegen diese fortschreitende Entwertung der mathematischen Unsterblichkeitsvaluta vielleicht etwas zu weit gehe, wenn ich mich bei derartigen Namengebungen vorwiegend auf solche beschränke, die bereits Anspruch auf die Bezeichnung „klassisch" gewonnen haben.

Abschnitt I.

Zur Einleitung und zu § 1 (S. 1—8).

Die Grundlagen für den hier durchgeführten Aufbau der Zahlenlehre entnahm ich den Arbeiten von Heine: Die Elemente der Funktionenlehre (Journ. f. Math. 74 [1872], S. 173ff.) und Helmholtz: Zählen und Messen erkenntnistheoretisch betrachtet (Philosophische Aufsätze, Ed. Zeller gewidmet, Leipzig 1887; wieder abgedruckt: Wissensch. Abhandlungen, Bd. 3 [1895], S. 359ff.). Bei Helmholtz (a. a. O. S. 362) findet sich insbesondere schon der Hinweis auf die dekadische Ziffernschrift als eines Mittels, „um durch Kombination von nur zehn verschiedenen Zahlzeichen in einfacher und leicht verständlicher Weise die Reihe (sc. der Zahlzeichen) unbegrenzt fortzusetzen, ohne je ein Zeichen zu wiederholen"; ferner die Definition der Beziehungen $a \lessgtr b$ und $a = b$ gerade so, wie in Nr. 1 der Einleitung angegeben wird. M. Pasch (Grundlagen der Analysis, Berlin u. Leipzig 1909) führt die natürlichen Zahlen (a. a. O. § 10) unabhängig von der dekadischen Ziffernschrift ein und benützt diese letztere nur als Mittel zur Namengebung (a. a. O. § 15; vgl. auch desselben Verfassers: Veränderliche und Funktion, Leipzig u. Berlin 1914, § 24).

Die von mir bereits im Vorwort zur ersten Abteilung (S. VIII) ausgesprochene Vermutung, daß die hier gegebene Einführung der geordneten und unbegrenzt fortsetzbaren Folge der natürlichen Zahlen vom Standpunkte der reinen Logik aus als unzureichend angesehen werden würde, hat sich gelegentlich einer (übrigens sehr eingehenden

und außerordentlich anerkennenden) Besprechung der beiden ersten Abteilungen[1]) durchaus bewahrheitet. Immerhin gibt der Verfasser jener Kritik selbst zu, daß zurzeit weder die *Mengenlehre*, noch die Peanosche *Axiomatik*[2]) als eine *in jeder Beziehung* ausreichende logische Grundlage der Mathematik gelten könne und daß man andererseits, zumal bei einer mathematischen Darstellung elementareren Charakters, „notgedrungen darauf verzichten müsse, in der logischen Grundlegung usque ad initium, bis zum bitteren Anfang, zurückzugehen"; daß man ferner denjenigen Einwand, der gegen die angebliche *Existenz* der erforderlichen Grundeigenschaften bei dem beschriebenen Zeichensystem zu erheben sei, beseitigen könne, indem man dieselbe als *unbewiesenen Grundsatz* hinnehme. Mit diesem Auskunftsmittel könnte ich mich allenfalls abfinden, wenn es meiner Denkweise auch mehr entspricht, die fragliche Gewißheit der inneren Anschauung zu entnehmen. Ob vielleicht durch eine im Peanoschen Sinne *axiomatische* oder an den Begriff der *Kardinalzahl* anknüpfende *mengentheoretische* Einführung der *natürlichen* Zahlen dem Bedürfnisse der Anfänger besser gedient werde, halte ich für mehr als zweifelhaft. Im übrigen wäre damit doch immer nur ein *erster* Schritt getan, der nach meinem Dafürhalten für ein weiteres Fortschreiten zum *allgemeineren* Begriffe der *reellen* Zahlen noch keinerlei Direktive gibt. Will man überhaupt zu einem brauchbaren *allgemeinen Zahlbegriff* gelangen, so muß doch, wie ich dies bereits bei früherer Gelegenheit (s. [28], S. 78) ausgesprochen habe, vor allen Dingen ein Mittel gefunden werden, um *erstens* alle möglichen als *Zahlen* bezeichneten *Objekte* und *zweitens* die zwischen ihnen bestehenden sogenannten *Größenbeziehungen* unter einen *gemeinsamen* Gesichtspunkt zu bringen. In dieser Beziehung scheint mir die von mir befolgte und (wie ich glaube, zum ersten Male) in allen Einzelheiten konsequent durchgeführte Methode gegenüber den mir bekannten elementaren Darstellungen dieses Gegenstandes immerhin einen merklichen Fortschritt zu bedeuten.

Ausführliche Literaturangaben betreffs der verschiedenen Methoden zur Einführung des Zahlbegriffs gibt die Enc. fr. I 1 (J. Tannery et J Molk d'après H. Schubert: Principes fondamentaux de l'arithmétique, Nos 1—7). Hinzuzufügen: E. V. Huntington, Complete sets of postulates for the theory of positive integral and positive rational numbers (Transact. Am. Math. Soc. 3 [1902], p. 280). — O. Hölder, Die Arithmetik in strenger Begründung (Programmabh. Leipzig 1914).

---

1) Gött. gel. Anzeigen, 1919, S. 321—347.

2) Arithmetices principia nova methodo exposita. Torino 1889.

Zu § 2 (S. 9ff.) und § 4 (S. 24ff.).

Die rekursorische Definition der Addition und Multiplikation sowie die Beweise für deren Grundeigenschaften vermittelst vollständiger Induktion rühren von Hermann Graßmann her (Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten, Berlin 1861).[1]) Doch weicht Graßmanns Darstellung von der hier gegebenen insofern wesentlich ab, als er neben den *natürlichen*, also *positiven ganzen* Zahlen *von vornherein* auch die *negativen* und die *Null* einführt. Die vorliegende Darstellung nähert sich mehr derjenigen, welche R. Dedekind, wohl unabhängig von Graßmann, in seiner Schrift: „Was sind und was sollen die Zahlen?“ Braunschweig 1887 (S. 44—49) gegeben hat.

Zu § 8, Nr. 1 (S. 41/43).

Es werden daselbst die Brüche $\frac{b}{a}$ (bei beliebigen ganzzahligen $a > 0$, $b > 0$) in der Weise eingeführt, daß die für die „uneigentlichen“ Brüche bereits als *notwendig* erkannten Ordnungs- und Rechnungsregeln auf Grund einer *„gewissen logischen Notwendigkeit“* (wie es auf S. VII des Vorworts, vorletzte Zeile heißt) nunmehr *definitionsweise* auf die Gesamtheit aller möglichen $\frac{b}{a}$ ausgedehnt werden. Der Verfasser der bereits oben erwähnten Besprechung in den Göttinger gelehrten Anzeigen macht dazu die Bemerkung, man täte besser, diese *„gewisse“* logische Notwendigkeit durch eine *vollständige* zu ersetzen, indem man zunächst $\frac{b}{a}$ durch die Beziehung:

$$\frac{b}{a} \cdot a = b$$

definiert, aus der sich dann alles weitere ohne jede Willkürlichkeit einwandfrei ergibt. In der Tat habe ich diesen Weg in meinen Vorlesungen früher eingeschlagen, habe ihn aber neuerdings verlassen, weil er — bezüglich der *negativen* Zahlen zwar noch gangbar — bei der Einführung der *Irrationalzahlen* gänzlich versagt. Gerade für diese Krönung des ganzen Aufbaus der reellen Zahlen eine dem Anfänger möglichst zwanglos einleuchtende Form zu finden, habe ich für eine Hauptaufgabe meiner ganzen Darstellung gehalten. Der Eindruck einer erheblichen Willkürlichkeit scheint mir aber bei der Einführung der *irrationalen* bzw. der *allgemeinen reellen* Zahlen unvermeidlich, wenn die hierzu dienliche Methode nicht schon *da* hinlänglich *vorbereitet* wird,

1) Das längst vergriffene, auch auf den hiesigen öffentlichen Bibliotheken fehlende Buch ist wenigstens teilweise (es sind die ersten 56 Seiten) in Graßmanns gesammelten Werken, Bd. II, 1, S. 295—348 wieder abgedruckt worden.

wo es sich zunächst nur um eine systematische Bestätigung von Regeln handelt, deren Gebrauch dem Anfänger bereits vollständig in Fleisch und Blut übergegangen ist. Das dürfte aber sicher bei den *positiven Brüchen* zutreffen, und zwar *nur* bei diesen, da schon bezüglich des Rechnens mit *negativen* Zahlen die Schultradition zumeist wenig geeignet ist, die hierbei naturgemäß auftretenden Zweifel zu beseitigen. Für den Anfänger, der die Brauchbarkeit der fraglichen Methode bei ihrer Anwendung auf die positiven Brüche mühelos kennen gelernt und bei der Begründung der Regeln für die negativen Zahlen bewährt gefunden hat, muß nach meinem Dafürhalten der analoge Schritt bei Einführung der allgemeinen *reellen* Zahlen, nämlich die Art des Überganges von den rational konvergenten zu den schlechthin konvergenten Zahlenfolgen, geradezu den Charakter der Selbstverständlichkeit besitzen. Nach alledem scheint mir aber der didaktische Gewinn des von mir eingeschlagenen Weges so erheblich, daß die dabei erlittene Einbuße an „zwingender Notwendigkeit" nicht als ausschlaggebend in Betracht kommen dürfte.[1])

Zu § 19, Nr. 3 (S. 115).

In der Fußnote 2 finden sich im Anschluß an die im Texte Gl. (4) gegebene Definition der *Schreibweise* $\{A_\nu\} = 0$ die beiden Bemerkungen, daß aus: $\{A_\nu\} = 0$ (zur Bezeichnung der *Null-Konvergenz* der Folge $\{A_\nu\}$) stets folgt: $\{C_\nu A_\nu\} = 0$, wenn die $|C_\nu|$ *unterhalb* einer positiven Zahl bleiben; und daß umgekehrt: $\{A_\nu\} = 0$ aus: $\{C_\nu A_\nu\} = 0$ hervorgeht, wenn die $|C_\nu|$ *oberhalb* einer positiven Zahl bleiben. Ich glaubte die Verstandeskräfte meiner präsumtiven Leser weder zu überschätzen, noch zu überlasten, wenn ich ihnen zumutete, die nach meinem Dafürhalten aus dem ganzen Zusammenhange hervorgehende Richtigkeit dieser beiden Bemerkungen ohne weitere Erläuterung einzusehen. Leider hat mir dieser vielleicht etwas allzu leichtfertige Optimismus den folgenden scharfen Verweis des am Anfang der letzten Fuß-

1) Nach Angabe des Referenten einer angesehenen mathematischen Zeitschrift soll die obige Methode in *Vorlesungen* schon *vielfach* benützt worden sein. Es liegt mir fern, diese angebliche Tatsache bestreiten zu wollen; immerhin wäre es vielleicht nicht ganz unpassend gewesen, wenn der Herr Kritiker zur Unterstützung seiner etwas vagen Behauptung einige jener zahlreichen Vorlesungen namhaft gemacht hätte.

Wenn ferner in einer anderen Besprechung dieses ersten Abschnitts gesagt wird, die Einführung der rationalen und irrationalen Zahlen, des Grenzwertbegriffs usw werde von mir zum großen Teil ähnlich dargestellt wie in der Arithmetik von C. Färber (Leipzig 1911), so muß ich dieses Lob bescheiden ablehnen, da mein Standpunkt dem Färberschen genau entgegengesetzt ist.

note erwähnten Kritikers zugezogen: „S. 115 werden Grenzwertsätze, die, wenn auch einfach, doch von hervorragender Wichtigkeit sind, in Fußnote 2 nur flüchtig abgetan.[1]) Die Sätze selbst werden alsbald im Text häufig gebraucht." Da ich von der *ersten* der oben angeführten Bemerkungen nur *ein einziges Mal* (auf S. 139 — übrigens unter gewissenhaftem Hinweis auf jene Fußnote), von der *zweiten* im ganzen Buche *niemals* Gebrauch gemacht habe, so beanspruche ich kein maßgebendes Urteil darüber, bis zu welchem Grade jene zwei Bemerkungen als *Grenzwertsätze von hervorragender Wichtigkeit* anzusprechen sind. Dagegen muß ich die Bezeichnung ihrer *im Mittel* $\frac{1}{2}$*maligen* Verwendung als einer *häufigen* für etwas übertrieben erklären.

Zu § 22, Nr. 1 (S. 125).

Die hier als *konvergente Zahlenfolgen* (c_ν) bezeichneten, durch eine Bedingung von der Form $|c_{n+\varrho} - c_n| \leqq \varepsilon$ $(\varrho = 1, 2, 3, \cdots)$ charakterisierten unbegrenzten Folgen rationaler Zahlen werden von Heine (Journ. f. Math. 74 [1872], S. 174) schlechthin als *Zahlenreihen*, von G. Cantor (Math. Ann. 21 [1883], S. 567) als *Fundamentalreihen*, von J. Thomae (Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, 2. Aufl., Halle 1898) als *reguläre Reihen* bezeichnet. Die Benützung des Ausdrucks *„konvergent"* in dem oben

1) Der betreffende Kritiker scheint überhaupt Fußnoten als etwas ungemein Verächtliches anzusehen, wie aus dem folgenden (der gleichen Besprechung entnommenen) Satze hervorgeht: „Die Originalabhandlungen des Verfassers sind häufig durch sorgfältig ausgewählte Beispiele und Gegenbeispiele besonders instruktiv; im jetzigen Buch sind, vom letzten Kapitel abgesehen, die Beispiele meist zu Fußnoten degradiert." „Degradiert" finde ich schon recht hart. Aber hiervon abgesehen· es hat mich äußerst peinlich überrascht, daß mit dieser „Degradation" auch der gänzliche Verlust der instruktiven Qualitäten verbunden sein soll! Übrigens habe ich in wohlerwogener Absicht *einfache und kurze* Beispiele *nur dann* in Fußnoten untergebracht, wenn es mir zweckmäßig schien, sie, ohne den Zusammenhang des Textes zu unterbrechen, *ganz unmittelbar* an ein bestimmtes *Schlagwort* oder eine *kurze Bemerkung* deutlich sichtbar *anzuschließen*, statt sie (nach meiner Meinung *weniger* instruktiv) erst am Schlusse eines Absatzes nachhinken zu lassen. Ausführlichere Beispiele, die zur Erläuterung einer längeren Betrachtung, eines Lehrsatzes oder einer Methode dienen sollen, haben stets im Text Platz gefunden. Wenn weiterhin derselbe Herr Kritiker in seiner Besprechung des zweiten Abschnitts es bemängelt, daß ich Reihen wie $\sum \frac{1}{n^2}$ und *tausend* (!) andere zur Verfügung stehende nicht als Beispiele für Reihen-Summation ausgenützt hätte, so kann ich nur lebhaft bedauern, daß er weder Proben aus seinem üppigen Vorrate geeigneter Beispiele mitgeteilt, noch verraten hat, wie ich es hätte machen sollen, um wenigstens die (auf S. 447, Fußnote 1 ausdrücklich von mir erwähnte) Formel $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ohne jedes Hilfsmittel der Funktionenlehre *abzuleiten*.

angegebenen Sinne[1]) (also unabhängig von dem Begriff des *Grenzwerts*) dürfte von Ch. Méray (Nouveau précis d'analyse infinitésimale, Paris 1872, p. 2) herrühren, der mit *variante convergente* bezeichnet, was hier *konvergente Zahlenfolge* genannt wird. *Suite convergente* findet sich wohl zuerst bei Jules Tannery, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable (Paris 1886), p. 25.

Zu § 23 (S. 184 ff.).

Die im Text gegebene, im Gegensatz zu dem älteren, wesentlich *geometrischen* Betrachtungen entnommenen *Irrationalzahl*begriff, rein *arithmetische* Einführungsart der allgemeinen *reellen*, insbesondere der *irrationalen* Zahlen mit Hilfe der konvergenten Zahlenfolgen rührt von Ch. Meray und G. Cantor her, welche diese Methode unabhängig voneinander aufgefunden haben. Méray hat die Grundzüge seiner Theorie bereits im Jahre 1869 veröffentlicht (Revue des sociétés savantes: sc. math. (2), 4, p. 284) und in seinem 1872 erschienenen: Nouveau précis d'Analyse infinitésimale wiederholt. In demselben Jahre erschien auch Cantors erste Publikation über diesen Gegenstand (Math. Ann. 5 [1872], S. 128) und eine (zum Teil auf mündlichen Mitteilungen Cantors beruhende) ausführlichere Darstellung von E. Heine (Journ. f. Math. 74 [1872], S. 173). Letzterer bezeichnet dabei diese Theorie nicht unpassend als eine glückliche Fortbildung einer anderen, gleichfalls *rein arithmetischen* Einführungsart der Irrationalzahlen, deren sich bereits seit längerer Zeit K. Weierstraß in seinen Vorlesungen über analytische Funktionen bedient hatte. Einen kurzen Abriß ihrer Grundprinzipien hat zuerst H. Kossak veröffentlicht (Progr. des Werderschen Gymnasiums, Berlin 1872), ausführliche Darstellungen findet man in V. von Dantschers „Vorlesungen über die Weierstraßische Theorie der irrationalen Zahlen“ (Leipzig und Berlin 1908) und in G. Mittag-Lefflers Abhandlung „Die Zahl: Einleitung zur Theorie der analytischen Funktionen“ (Tôhoku Math. Journal 17 [1920], p. 158—209. Das in dem vorliegenden Zusammenhange beständig auftauchende Jahr 1872 hat noch eine dritte *arithmetische* Theorie der Irrationalzahlen an das Licht der Öffentlichkeit gebracht, diejenige von R. Dedekind (Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig 1872). Sie beruht, im Gegensatz zu der Weierstraßschen und Méray-Cantorschen Theorie, nicht auf der Benützung irgendeines arithmetischen Formalismus, sondern auf dem Prinzip des sogenannten (Dedekindschen) „*Schnittes*“, wovon im zweiten Bande dieser Vorlesungen noch die Rede sein soll. Für eine allgemeine Orientierung über die Entwicklung des Irrational-

1) Vgl. dagegen die Anmerkung zu §§ 26, 44 S. 927, Absatz II.

zahlbegriffs und der hierauf bezüglichen Theorien dürften die entsprechenden Paragraphen der beiden Encyklopädie-Ausgaben gute Dienste leisten (D. Enc I A 3, S 49—62; merklich vervollständigt: Enc. fr. I 3, p. 133—174).

Zu S. 143, am Schlusse von Nr. 7, ist hinzuzufügen: „Die früher (S. 74/6) über den *absoluten Betrag* von Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten rationaler Zahlen bewiesenen Sätze lassen sich ohne weiteres auch auf beliebige reelle Zahlen übertragen."

Zu § 25 (S. 148ff.).

Die grundlegenden Begriffe und Sätze dieses Paragraphen stammen aus G. Cantors ersten mengentheoretischen Arbeiten: „Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen" (Journ f. Math. 77 [1874], S. 258) und „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre" (ebendas. 84 [1877], S. 242). Den sehr einfachen (auf dem sogenannten Diagonalverfahren beruhenden) Beweis des Satzes auf S. 158 hat Cantor in der Note: „Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre" (Jahresb. d. Deutschen Math.Ver. 1 [1892], S. 75) mitgeteilt, nachdem er bereits in der ersten der oben angeführten Arbeiten den fraglichen Satz weniger einfach bewiesen hatte.

Zu § 26, Nr. 4 (S. 161) und § 44, Nr. 1 (S. 293).

Über zweckmäßige Begrenzung des Inhalts und Umfangs der Bezeichnungen *Grenzwertexistenz, Konvergenz* und *Divergenz* bestehen unter den Mathematikern leider noch erhebliche Meinungsverschiedenheiten.

Daß die Aussage, A_ν habe für $\nu \to \infty$ unter den auf S. 164 des Textes angegebenen Bedingungen den *Grenzwert* $+\infty$ bzw. $-\infty$, im Grunde genommen einen offenbaren Widerspruch enthält, wurde a. a. O. bereits hervorgehoben. Andererseits hat sich die *Schreibweise:*

$$(1) \qquad \lim_{\nu \to \infty} A_\nu = +\infty \text{ bzw. } = -\infty$$

zur Kennzeichnung des in Frage stehenden Falles als durchaus nützlich erwiesen und ist so allgemein üblich geworden, daß sie schwerlich in absehbarer Zeit wieder verschwinden dürfte, keinesfalls aber einfach ignoriert oder gewissermaßen verheimlicht werden kann. Es muß also doch irgendeine Möglichkeit bestehen, den Inhalt der Formel (1) auch mündlich zu verbreiten und da dies wohl kaum wesentlich anders geschehen kann, als mit den Worten: „Der *Limes* von A_ν für unbegrenzt wachsendes ν ist positiv bzw. negativ *unendlich*", so scheint mir kein anderer Ausweg übrig zu bleiben, als diesem *Limes*, auf deutsch: *Grenzwert „Unendlich"*, irgendeine Art von *Existenz* zuzu-

erkennen. Hiernach erscheint es mir höchst inkonsequent und daher irreführend, wenn manche Autoren[1]) trotz gleichzeitiger Benützung der Schreibweise (1) unter der bloßen „*Existenz eines Grenzwerts*" (ohne jeden weiteren Zusatz) allemal und ausschließlich die Existenz eines *endlichen* Grenzwertes verstanden wissen wollen. Um in dieser Hinsicht jedes Mißverständnis zu beseitigen, schien es mir zweckmäßig, die *Existenz eines Grenzwertes* mit *Einbeziehung* des Falles von Gl. (1) durch den Zusatz „*im weiteren Sinne*" zu charakterisieren, dagegen bei *Ausschließung* dieses Falles sie ausdrücklich als Existenz eines *endlichen* Grenzwertes, gelegentlich auch als Existenz im *engeren* Sinne zu bezeichnen.

Die *Konvergenz* einer Zahlenfolge wird, statt durch die von uns zur Definition benützten *Ungleichungen* (s. S. 125 und 161—162), häufig durch die Forderung der *Existenz eines Grenzwerts* definiert. Dabei gehen, im Gegensatz zu der übergroßen Majorität, einzelne Mathematiker[2]) so weit, diese Forderung in dem oben bezeichneten *weiteren* Sinne zu verstehen: sie bezeichnen demnach auch Zahlenfolgen mit dem Grenzwert $+\infty$ bzw. $-\infty$ (in offenbarem Gegensatz zur etymologischen Bedeutung des Wortes) zunächst als *konvergent*, sehen sich dann aber zur Vermeidung von anderweitigen Unstimmigkeiten genötigt, unendliche *Reihen*, deren Partialsummen nach $+\infty$ bzw. $-\infty$ „*konvergieren*", als *divergent* zu bezeichnen und demgemäß den Begriff der *Reihenkonvergenz*, wie sonst allgemein üblich, auf die Existenz eines *endlichen* Grenzwertes zu beschränken.[3])

Scheint hiernach zum mindesten in bezug auf den Begriff der *Konvergenz* unendlicher *Reihen* bei den verschiedensten Autoren vollständige Übereinstimmung zu herrschen, so zeigen sich bei der Begriffsbestimmung der *Divergenz* und ihrer besonderen Abarten erhebliche Differenzen.

1) Siehe z. B. die ausdrückliche Bemerkung von E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, I (Leipzig und Berlin 1909), S. 17, Fußnote 2. — Ähnlich Jules Tannery, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable réelle, 2ième éd., I (Paris 1904), p. 85. Übrigens fügt T. die Bemerkung hinzu, es sei „assez singulier de ne pas oser *dire* que u_n a une limite infinie, ou a l'infini pour limite, quand on écrit $\lim_{n=\infty} u_n = +\infty$". Ich bin der Meinung, daß jeder, der sich dieser Schreibweise bedient, auch den kühnen Wagemut besitzen sollte, sie im Bedarfsfalle in Worte zu fassen.

2) Siehe z. B. E. Cesàro, Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung. Deutsch von G. Kowalewski (Leipzig 1904), S. 89. — C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen (Leipzig und Berlin 1918), S 88/89.

3) Cesàro, a. a. O. S. 118. — Carathéodory, a. a. O. S. 102, Fußnote. (Man könnte diese Inkonsequenz allenfalls in ähnlicher Weise rechtfertigen wie die Bezeichnung eines unendlichen *Produkts* mit dem Grenzwert *Null* als eines [illegible]

Nach dem Vorgange von Cauchy (Analyse algébrique, Paris 1823, p. 123 = Oeuvres, 2e Série, III, p. 114) bezeichnen viele Mathematiker, wie auch auf S. 294 unseres Textes geschehen, *jede* Reihe, die *nicht konvergiert*, als *divergent*. Demgegenüber nennt Catalan in seinem Traité élémentaire des séries (Paris 1860), p. 1/2 *nur* solche Reihen *divergent*, deren Partialsummen s_n *absolut genommen* mit n *ins Unendliche* wachsen, bezeichnet dagegen solche Reihen, deren Partialsummen, *ohne (numerisch) ins Unendliche zu wachsen, keinen bestimmten Grenzwert* haben, als *weder konvergent, noch divergent* und demgemäß als *unbestimmt* [„séries indéterminées“[1])]. Da der zweite Teil dieser Aussage ganz unzweideutig nur diejenigen Reihen umfaßt, die nach unserer Terminologie innerhalb *endlicher* Grenzen *oszillieren*, so hätte man nicht nur, wie die Catalansche Fassung zunächst vermuten läßt, zu den *divergenten* Reihen ausschließlich diejenigen zu rechnen, für welche $\lim_{n\to\infty} |s_n| = +\infty$, sondern auch diejenigen, für welche nur $\overline{\lim_{n\to\infty}} |s_n| = +\infty$. Im übrigen macht Catalan bezüglich der „*unbestimmten*“ Reihen in einer Fußnote den folgenden Zusatz: „La plupart des auteurs font rentrer cette troisième espèce de série dans la catégorie des *séries divergentes*. Cette classification nous paraît contraire à l'étymologie et à la signification habituelle du mot *divergent*.“ Seit Catalan dieses schrieb, scheinen sich die Ansichten über die vorliegende Frage so außerordentlich verschoben zu haben, daß es als recht zweifelhaft angesehen werden muß, ob heutzutage noch die *Mehrzahl* der Autoren die „*unbestimmten*“ Reihen zu den *divergenten* zählen. Insbesondere haben zahlreiche und vielfach verbreitete Lehrbücher, in denen die Einführung in die Reihenlehre eine maßgebende Stelle einnimmt, sich der Catalanschen Terminologie vollständig angeschlossen oder gehen sogar noch darüber hinaus, indem sie alle Reihen *mit zwei verschiedenen Hauptlimites*, auch wenn einer oder beide *unendlich, nicht* als *divergent* bezeichnen. Man vergleiche z. B.: M. A. Stern, Lehrbuch der algebraischen Analysis (Leipzig und Heidelberg 1860), S. 60. — K. Hattendorff, Algebraische Analysis (Hannover 1877), S. 27. — Weber-Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik, I (3. Aufl., Leipzig 1909), S. 389, 410. — Stegemann-Kiepert, Grundriß der Differential- und Integralrechnung, I (11. Aufl., Hannover 1910), S. 222. — E. Cesàro, Corso di analisi algebrica (Torino 1894), p. 116. Auch in der deutschen Bearbeitung Cesàro-Kowalewski (vollst. Titel s. Fußnote 2 auf S. 927), S. 118. — Francesco d'Arcais, Corso di calcolo infinitesimale, I (Padova 1899), p. 235. — Salvatore Pincherle, Lezioni di algebra complementare:

1) Nach dem Vorgange von L. Olivier (Journ. f. Math. 2 [1827], S. 31).

Analisi algebrica (Bologna 1906), p. 181. — A. Capelli, Istituzioni di analisi algebrica (Napoli 1909), p 416. — Maurice Godefroy, Théorie élémentaire des séries (Paris 1903), p. 26/27. — E. W. Hobson, The theory of functions of a real variable etc. (Cambridge 1907), p. 455. — T J. J'a. Bromwich, Introduction to the theory of infinite series (London 1908), p. 2, 15, 261.

Die Zusammenstellung der vorstehenden, auf annähernde Vollständigkeit keinerlei Anspruch machenden Liste erschien mir einigermaßen nützlich, da ich in der bereits oben angefochtenen Besprechung von Abteilung I dieses Buches die nach dem Gesagten völlig haltlose Aussage gefunden habe, für die nach $+\infty$ bzw. $-\infty$ *divergierenden* und *alle möglichen oszillierenden* Zahlenfolgen sei die *gemeinsame* Bezeichnung *divergent „so eingebürgert“*, daß daran nicht gerüttelt werden dürfe. Derartige kategorische Behauptungen sollten eben nicht kurzerhand aus der Tiefe eines Kritikergemütes geschöpft, sondern nur auf Grund ausreichender Literaturkenntnis ausgesprochen werden, zumal wenn sie dazu bestimmt sind, kritischen Bemerkungen zur Grundlage zu dienen Damit hat es nämlich die folgende Bewandtnis. Da ich mich von jeher der angeblich „so allgemein eingebürgerten“ (Cauchyschen) Anwendung der Bezeichnung *„divergent“* im Sinne von *„nicht-konvergent“* angeschlossen habe, so ergab sich mir das unabweisliche Bedürfnis, die besonderen nach $+\infty$ oder $-\infty$ divergierenden Zahlenfolgen bzw. Reihen durch ein geeignetes Beiwort aus der Menge der übrigen gleichfalls als divergent bezeichneten herauszuheben. Und da andererseits bei den oben geschilderten großen Meinungsdifferenzen in bezug auf die Abgrenzung des Begriffes *„divergent“* tatsächlich nur in dem *einen* Punkte bei *allen* Mathematikern vollständige Einstimmigkeit herrscht, die Reihen mit dem Grenzwerte $+\infty$ oder $-\infty$ *divergent* zu nennen, einzelne Autoren sogar *nur* diese Gattung als *divergent* bezeichnen[1]), so erschien es mir angemessen, Zahlenfolgen bzw. Reihen dieser Art als die *„eigentlich divergenten“* anzusehen und als solche zu bezeichnen. Diesen Ausdruck habe ich bereits im Jahre 1899 in meinem Encyklopädieartikel (D. Enc. I A 3, S. 68) eingeführt, und er ist inzwischen, soviel mir bekannt ist, auch von anderen Mathematikern als zweckmäßig befunden und übernommen worden. Dagegen findet der Verfasser der fraglichen Besprechung „bei der populären Bedeutung des Wortes *eigentlich*“ darin *„geradezu eine Ungereimtheit“*, daß eine *divergente* und nun gar eine *eigentlich divergente* Folge mit einer *konvergenten* die Existenz eines *Grenz-*

1) Siehe z. B. Bromwich, a. a. O. S. 2, Fußnote.

wertes (sc. im weiteren Sinne) *gemein haben* soll.[1]) Es scheint ihm dabei entgangen zu sein, daß das gleichfalls populäre Sprichwort: „Les extrêmes se touchent" (das übrigens in mannigfachen Variationen bis auf Aristoteles zurückgeht) eine tiefe Wahrheit enthält (vgl. $+\infty$ und $-\infty$, Unendlichgroßes und Unendlichkleines, Nordpol und Südpol, Schwarz und Weiß usf.). Aber hiervon ganz abgesehen: es ist noch lange kein Beweis für die „*Ungereimtheit*" eines mathematischen Kunstausdrucks, wenn sein Wortlaut mit dessen „*popularer*" Bedeutung im Widerspruch steht. Oder hat sich vielleicht ein so vorbildlich exakter Mathematiker wie Weierstraß einer „Ungereimtheit" schuldig gemacht, wenn er von einer „*Stelle* $x = \infty$" spricht? Und entspricht es vielleicht der „populären" Bedeutung des Wortes „*äquivalent*", wenn man die Reihe der *geraden* Zahlen als *äquivalent* mit der Reihe der *ganzen* und sogar mit der Menge der *rationalen* bezeichnet? Steht es nicht auch in schroffstem Widerspruch zu „populärer" Ausdrucksweise, wenn man die Reihe $\sum_1^\infty \frac{1}{\nu!} \cdot 100^\nu$ „*wesentlich starker konvergent*" nennt als die Reihe $\sum_1^\infty \left(\frac{1}{\nu+1}\right)^{100}$, obschon ihre Glieder bis zum 100^{ten} beständig, und zwar zu ungeheuerlicher Größe anwachsen, während bei der zweiten Reihe das Anfangsglied *allein* die Summe der Reihe schon auf mehr als 30 Dezimalstellen genau liefert?

In der französischen Ausgabe der Encyklopädie habe ich übrigens die Bezeichnung „*eigentlich divergent*" durch „*simplement divergent*" ersetzt (Enc. fr. I, 1, p. 184), da „*proprement divergent*" von dem damaligen Redakteur J. Molk als unfranzösisch beanstandet wurde. Da andererseits der fragliche Divergenztypus wohl unbestritten als der *einfachste* gelten dürfte (wie er ja auch für die *einfachste* Gattung von Zahlenfolgen, die *monotonen*, als der einzig mögliche in Betracht kommt), so bedarf wohl die Bezeichnung „*einfache Divergenz*" keiner weiteren Rechtfertigung und mag vielleicht, zumal wenn man den historischen Zusammenhang nicht kennt, unmittelbarer einleuchtend erscheinen, als

1) Will man hierin überhaupt einen Mißstand erblicken, so liegt seine Quelle keineswegs in der Bezeichnung „*eigentlich divergent*", sondern in dem Umstande, daß es sich wirklich „*eingebürgert*" hat, von einem *Grenzwert* $+\infty$ bzw. $-\infty$ zu sprechen, ihn also als „*existierend*" anzusehen. Es dürfte aber sehr viel zweckmäßiger sein, sich damit ein für allemal abzufinden, als in bezug auf die allgemein üblich gewordene Schreibweise $\lim\limits_{\nu\to\infty} A_\nu = \pm\infty$ eine Art Vogel-Strauß-Politik zu beobachten und „*Existenz eines Grenzwertes*" ohne jeden Zusatz als völlig gleichbedeutend mit „*Konvergenz*", d. h. Existenz eines *endlichen* Grenzwertes anzusehen.

der Ausdruck *„eigentliche Divergenz“*. Nichtsdestoweniger habe ich vorgezogen, diesen letzteren hier beizubehalten, da er durch die deutsche Encyklopädie schon eine gewisse Verbreitung erlangt hat. Auch habe ich, um mit Neubildungen möglichst sparsam zu sein, die Bezeichnungen *„unbestimmt“* und *„oszillierend“* in dem vorliegenden Zusammenhange unverändert übernommen, obschon sie mir besonders wenig glücklich gewählt scheinen. Eine Zahlenfolge bzw. unendliche Reihe ist ja vollständig *bestimmt*, wenn jedes ihrer *Glieder* bestimmt ist. Es ist also doch eigentlich widersinnig, sie eventuell gleichzeitig auch als *unbestimmt* zu bezeichnen. Ferner: eine Zahlenfolge bzw. Reihe kann doch nur als *oszillierend* bezeichnet werden, sobald die *Glieder der Folge* bzw. die *Partialsummen der Reihe*, als Funktionen des Index betrachtet, *oszillieren*[1]), d. h. wenn sie *keine* (zum mindesten von einer gewissen Stelle an) *monotone* Folge bilden. Aber eine solche Zahlenfolge bzw. Reihe kann ja trotzdem sehr wohl auch *konvergieren.*[2]) So *oszillieren* z. B. die Partialsummen der Reihe $\sum_{1}^{\infty}\nu\,(-1)^{\nu-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu}$ beständig um den Wert $\frac{2}{8}$, gegen welchen die Reihe schließlich *konvergiert.* Man legt also bei der fraglichen Anwendung der Bezeichnung *„oszillierend“* im Gegensatz zu der sonst üblichen Praxis[3]) in diese etwas hinein, was an und für sich gar nicht darin enthalten ist: nämlich die Forderung, daß die *„Amplituden“* der betreffenden „Oszillationen“ nicht schließlich gegen Null konvergieren sollen. Ich habe, um diese Forderung zum Ausdruck zu bringen, für die französische Encyklopädie statt „oscillant“ die Bezeichnung „discrépant“ eingeführt (a. a. O. S. 188).

Bei der zurzeit herrschenden Tendenz, selbst einwandfreie und altbewährte Fremdwörter durch sogenannte Verdeutschungen oft recht fragwürdiger Natur zu ersetzen, habe ich indessen darauf verzichtet, von dem sicherlich höchst anstößigen neuen Fremdworte „diskrepant“ Gebrauch zu machen.

Übrigens sei bei dieser Gelegenheit noch auf folgendes hingewiesen. Man pflegt doch wohl allgemein von einer Reihe mit den beiden Haupt-

1) Was sollte denn sonst *„oszillieren“*? Der *„Grenzwert“* der Folge oder die *„Summe“* der Reihe doch sicherlich nicht, da ja beide gar nicht existieren.

2) Analog nennt man ja auch die Funktion $x\cdot\sin\frac{1}{x}$ in der Umgebung von $x=0$ gerade so gut *oszillierend,* wie z. B. $\sin\frac{1}{x}$ oder $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$, obschon sie doch für $x\longrightarrow 0$ gegen 0 *konvergiert* und, wenn man ihr noch für $x=0$ den Wert 0 beilegt, für $x=0$ *stetig* ist.

3) Siehe die vorige Fußnote.

limites s und S zu sagen, sie *oszilliere zwischen* s und S oder *innerhalb der Grenzen* s und S (vgl. § 44, Nr. 1, S. 294). Diese Ausdrucksweise legt die (falsche) Vorstellung nahe, daß die Partialsummen zum mindesten für hinlänglich große Indizes oder, wenn man seine Ansprüche noch etwas heruntersetzt, wenigstens in unbegrenzter Zahl sich *innerhalb* der Grenzen s und S bewegen. In Wahrheit steht aber auf Grund der Bedeutung der beiden Hauptlimites (vgl. § 36, Nr. 2, S. 217) nur so viel fest, daß alle Partialsummen mit etwaiger Ausnahme einer endlichen Anzahl zwischen $s - \varepsilon$ und $S + \varepsilon$ liegen, sodaß also insbesondere *keine einzige* Partialsumme *zwischen* s und S zu liegen braucht und daher die oben angeführte Ausdrucksweise als recht ungeeignet und ohne Warnungstafel geradezu irreführend erscheint.

(Beispiel: Es sei $\alpha_\nu > 0$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$, $\lim\limits_{\nu \to \infty} \alpha_\nu = 0$ und es werde gesetzt:

$$s_n = 1 + \alpha_0 + \sum_1^n{}^{\nu} (-1)^\nu \cdot (1 + \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu).$$

Alsdann hat man:

$$\begin{aligned} s_{2\mu-1} &= -\alpha_{2\mu-1} < 0 \\ s_{2\mu} &= 1 + \alpha_{2\mu} > 1 \end{aligned}$$

und daher:

$$\varliminf_{\nu \to \infty} s_\nu = 0, \quad \varlimsup_{\nu \to \infty} s_\nu = 1.$$

Die Reihe $1 + \alpha_0 + \sum_1^\infty{}^{\nu} (-1)^\nu \cdot (1 + \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu)$ *oszilliert* also nach jener üblichen Terminologie *zwischen* 0 und 1, obschon *keine einzige* ihrer Partialsummen *zwischen* 0 und 1 liegt.)

Zu § 37, Nr. 3 (S. 229 233).

Der „*Hauptsatz*" Gl. (13) auf S. 230, wonach:

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{a_\nu}{M_\nu} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}},$$

falls der Grenzwert *rechts* (im weiteren Sinne) *existiert*, rührt von Stolz her („Stolzscher Grenzwertsatz": Math. Annalen 14 [1879], S. 332; auch Allg. Arithmetik 1 [1885], S. 173, Nr. 11), die Verallgemeinerung Gl. (18) auf S. 231 von J. L. W. V. Jensen (Par. C. R. 106 [1888], S. 834). Weitere Literatur s. Enc. fr. I 3, S. 200/1, Fußnote 253.

Als nützliches Beispiel für die Anwendung dieses Satzes sei das folgende angeführt. Es werde gesetzt:

$$a_\nu = (\nu + 1)^{\alpha+1}, \quad M_\nu = 1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + \nu^\alpha,$$

wo α eine *beliebige reelle Zahl* > -1 bedeutet. Nach dem obigen Satze ergibt sich alsdann:

$$\begin{aligned}\lim_{\nu\to\infty}\frac{(\nu+1)^{\alpha+1}}{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+\nu^\alpha} &= \lim_{\nu\to\infty}\frac{(\nu+1)^{\alpha+1}-\nu^{\alpha+1}}{\nu^\alpha}\\ &= \lim_{\nu\to\infty}\nu\cdot\left(\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\alpha+1}-1\right)\\ &= \alpha+1 \ \left(\text{nach Gl. (39), S. 236 für } \delta=\frac{1}{\nu}\right).\end{aligned}$$

Wegen $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{\alpha+1}=1$ kann man in dem Ausdrucke links $\nu+1$ auch durch ν ersetzen und findet durch Übergang zum reziproken Werte die (insbesondere für die Entwicklungsgeschichte des Grenzbegriffs bemerkenswerte[1]) Formel:

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+\nu^\alpha}{\nu^{\alpha+1}}=\frac{1}{\alpha+1}.$$

Dieselbe läßt sich übrigens auch, ohne auf den obigen Grenzwertsatz zu rekurrieren, mit Hilfe der sehr brauchbaren Abschätzungsformel (III) S. 192 herleiten, nämlich (für $A+B>0$):

$$C\cdot B^{C-1}(A-B)\begin{Bmatrix}<\\>\end{Bmatrix}A^C-B^C\begin{Bmatrix}<\\>\end{Bmatrix}C\cdot A^{C-1}(A-B)\begin{cases}(C>1)\\(0<C<1).\end{cases}$$

Setzt man $C=\alpha+1$ und wendet den *zweiten* Teil dieser Ungleichungen auf $A=\nu$, $B=\nu-1$, den *ersten* auf $A=\nu+1$, $B=\nu$ an, so folgt:

$$\nu^{\alpha+1}-(\nu-1)^{\alpha+1}\begin{Bmatrix}<\\>\end{Bmatrix}(\alpha+1)\cdot\nu^\alpha\begin{Bmatrix}<\\>\end{Bmatrix}(\nu+1)^{\alpha+1}-\nu^{\alpha+1}\begin{cases}(\alpha>0)\\(-1<\alpha<0)\end{cases}$$

und hieraus durch Summation über $\nu=1,2,\cdots n$:

$$n^{\alpha+1}\lessgtr(\alpha+1)\sum_1^n\nu^\alpha\lessgtr(n+1)^{\alpha+1}-1,$$

also durch Division mit $(\alpha+1)\cdot n^{\alpha+1}$:

$$\frac{1}{\alpha+1}\lessgtr\frac{1}{n^{\alpha+1}}\cdot\sum_1^n\nu^\alpha\lessgtr\frac{1}{\alpha+1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}-\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

und daher für $n\longrightarrow\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}\cdot\sum_1^n\nu^\alpha=\frac{1}{\alpha+1}$$

(auch gültig für $\alpha=0$, in welchem Falle die obigen Ungleichungen in Identitäten übergehen).

---

1) Vgl. M. Cantor, Geschichte der Mathematik, 2 (1892), S. 882 ff.

Zu § 42, Nr. 4 (S. 279ff.).

In meiner Abhandlung [10], welcher der wesentliche Inhalt der Paragraphen 40—43 entnommen ist, habe ich in § 3, Nr. 4ff. (a. a. O. S. 309ff.) ausschließlich mit den $\underline{a}^{(\nu)}$, $\overline{a}^{(\nu)}$ als den *unteren* und *oberen Limites der* ν^{ten} *Zeile* der Doppelfolge $a_\mu^{(\nu)}$ operiert, dagegen in der vorliegenden Darstellung (s. S 279) noch die $\underline{\alpha}^{(\nu)}$, $\overline{\alpha}^{(\nu)}$ als die *unteren* bzw. *oberen Grenzen* von $\underline{a}^{(\nu)}, \underline{a}^{(\nu+1)}, \underline{a}^{(\nu+2)}, \ldots$ bzw. $\overline{a}^{(\nu)}, \overline{a}^{(\nu+1)}, \overline{a}^{(\nu+2)} \ldots$ eingeführt. Ferner bezeichnete ich solche Doppelfolgen $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$, deren Glieder numerisch unter einer endlichen Schranke bleiben und einer Beziehung von der Form:

$$(1) \qquad \underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \overline{a}^{(\nu)} + \varepsilon \quad \text{für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n,$$

genügen, *früher* (a. a. O. S. 310, Gl. (62)) als *gleichmäßig begrenzt*, dagegen *jetzt* (s. S. 279, Gl (33)) unter der abgeänderten Voraussetzung:

$$(2) \qquad \underline{\alpha}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \overline{\alpha}^{(\nu)} + \varepsilon \quad \text{für } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n,$$

als *gleichmäßig beschränkt*[1]), da ja die $\underline{\alpha}^{(\nu)}$, $\overline{\alpha}^{(\nu)}$ *nicht*, wie die $\underline{a}^{(\nu)}$, $\overline{a}^{(\nu)}$ als *Limites* der einzelnen (nämlich ν^{ten}) Zeilen diese gewissermaßen *begrenzen*, sondern, auch *von den Limites aller folgenden Zeilen abhangend*, nur eine Art unterer bzw. oberer *Schranke* für die hinlänglich entfernten Glieder der einzelnen Zeilen bilden.

Die Veranlassung zur Einführung jener im Vergleiche zu den $\underline{a}^{(\nu)}$, $\overline{a}^{(\nu)}$ begrifflich komplizierteren $\underline{\alpha}^{(\nu)}$, $\overline{\alpha}^{(\nu)}$ liegt darin, daß der wichtige Satz (II) jener früheren Darstellung (S. 315), der sich in der dort gegebenen Fassung, d. h. unter der Prämisse (1) als *nicht umkehrbar* erwies (vgl. S. 319, Nr. 3), auf Grund der Prämisse (2) nunmehr diese Eigenschaft gewinnt, mit anderen Worten, daß die jetzt als *gleichmäßige Beschränktheit* bezeichnete Eigenschaft der Zeilen nicht nur als *hinreichende*, sondern auch als *notwendige* Bedingung für das Zusammenfallen des unteren bzw. oberen *iterierten Zeilenlimes* mit dem unteren bzw. oberen *Doppellimes* sich erweist, wie dies in Satz (II) der jetzigen Fassung (S. 287) ausgesprochen wird (vgl. hierzu übrigens weiter unten die Anmerkung zu § 43). Ich verdanke diese Verbesserung einer gelegentlichen Mitteilung des Herrn Hartogs.

---

1) Es war mir dabei entgangen, daß einige Mathematiker diese Bezeichnung in der Funktionenlehre bereits in anderer Bedeutung gebrauchen. An dieser Zwiespältigkeit ist nun leider nichts mehr zu ändern, um so weniger, als ich jene andere Verwendung der fraglichen Bezeichnung nicht recht sinngemäß finde (worauf ich bei anderer Gelegenheit zurückzukommen gedenke).

Zu S. 279, Fußnote 1). Daselbst muß es $|\underline{\alpha}^{(\nu)}|$, $|\overline{\alpha}^{(\nu)}|$ statt $|\underline{a}^{(\nu)}|$, $|\overline{a}^{(\nu)}|$ heißen. Zugleich dürfte es zweckmäßig erscheinen, noch die folgende erläuternde Bemerkung hinzuzufügen.

Die im Texte gegebene Definition der gleichmäßigen Beschränktheit bezieht sich zunächst auf den Fall, daß die Doppelfolge $(a_\mu^{(\nu)})$ *sowohl nach unten, als nach oben* gleichmäßig beschränkt ist. Hierbei ist es völlig gleichgültig, ob man nach (30) die als Zusatzbedingung bestehende Voraussetzung:

$$\left.\begin{matrix} |\underline{a}^{(\nu)}| \\ |\overline{a}^{(\nu)}| \end{matrix}\right\} \leqq A\text{ [1]} \tag{1}$$

oder nach (32) die folgende:

$$\left.\begin{matrix} |\underline{\alpha}^{(\nu)}| \\ |\overline{\alpha}^{(\nu)}| \end{matrix}\right\} \leqq A \tag{2}$$

zugrunde legt. Denn es folgt nicht nur diese Bedingung (32) aus (30), wie a. a. O. ausdrücklich hervorgehoben wird, sondern wegen

$$|\underline{\alpha}^{(\nu)}| \leqq |\underline{a}^{(\nu)}| \leqq |\overline{a}^{(\nu)}| \leqq |\overline{\alpha}^{(\nu)}|$$

auch umgekehrt (30) aus (32). Anders liegt die Sache für den Fall *einseitig* gleichmäßiger Beschränkung und hier soll ausdrücklich festgesetzt werden, daß allemal die betreffende zu der (nur die $\underline{\alpha}^{(\nu)}$ bzw. $\overline{\alpha}^{(\nu)}$ enthaltenden) Hauptbedingung (34a) hinzutretende Zusatzbedingung im Sinne von (2) verstanden werden soll (wie ja auch auf S. 287, Zeile 4 von unten ohne weiteres angenommen wird). Ist z. B. wieder $\overline{\lim\limits_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = \overline{a}^{(\nu)}$ und sind die Zeilen der Doppelfolge nur *nach unten* gleichmäßig beschränkt, so kann immerhin für gewisse, sogar für unendlich viele ν (vgl. S. 272, (7), (8)) $\underline{a}^{(\nu)} = +\infty$ sein, während andererseits nur so viel feststeht, daß die $\underline{a}^{(\nu)}$ *oberhalb* einer bestimmten (eventuell negativen) Zahl liegen, sodaß zwar nicht die $|\underline{a}^{(\nu)}|$, wohl aber die $|\underline{\alpha}^{(\nu)}|$ unter einer endlichen Schranke bleiben. Das entsprechende gilt für den Fall, daß die Zeilen der Doppelfolge $(a_\mu^{(\nu)})$ nur *nach oben* gleichmäßig beschränkt sind.

Zu § 48, Nr. 3 (S. 287/90).

Der in der Hauptsache von Herrn **Hartogs** herrührende Beweis dafür, daß die *gleichmäßige Beschränktheit* auch eine *notwendige* Bedingung für die Endlichkeit und das Zusammenfallen des iterierten

---

1) Im Text S. 279 Gl. (30) steht infolge eines Druckfehlers $< A$ statt $\leqq A$ (was im übrigen für alles Folgende durchaus unwesentlich ist und nur als eine Art Schönheitsfehler beim Vergleiche mit (32) erscheint).

unteren bzw. *oberen Zeilenlimes* mit dem entsprechenden *Doppellimes* bildet, ist, wie Herr H. Hahn mit Recht bemerkt hat[1]), nicht ganz vollständig, da in der zu beweisenden Endformel:

$$\underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \quad \text{bzw.} \quad a_\mu^{(\nu)} \leqq \overline{a}^{(\nu)} + \varepsilon \quad \text{für } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n$$

auf Grund der durch Ungl (84a), S. 279, gegebenen Definition lediglich m, nicht aber n von ε abhängen darf, während bei der auf S. 289 gegebenen gleichlautenden Endformel eine solche Abhängigkeit noch besteht. Die erforderliche Ergänzung ist durch ein mir zur Last fallendes, völlig unerklärliches Versehen weggeblieben, macht aber nicht die geringste Schwierigkeit, da man leicht erkennt, daß bei passender Wahl des von ε abhängigen m jene Endformel auch noch für eine gewisse Anzahl *vorangehender* Zeilen besteht, deren Anfangsindex n dann *nicht* von ε abhängt.

Um aber bezüglich der im definitiven Endresultat nunmehr wieder mit m und n zu bezeichnenden Zahlen jedes Mißverständnis auszuschließen, möchte ich den fraglichen Beweis mit der angedeuteten Ergänzung, und zwar in einer, wie ich glaube, noch etwas durchsichtigeren Anordnung vollständig reproduzieren.

Es soll also gezeigt werden, daß unter der Voraussetzung (s. Gl. (3), S. 287):

$$(1') \quad \underline{\lim}_{\nu\to\infty} \underline{a}^{(\nu)} = \underline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{a} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\lim}_{\nu\to\infty} \overline{a}^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \overline{a} \ (\text{d. h. } \textit{endlich})$$

die Beziehungen bestehen:

$$(2') \qquad |\underline{a}^{(\nu)}| \leqq A \quad \text{bzw.} \quad |\overline{a}^{(\nu)}| \leqq A \quad \text{für: } \nu \geqq n,$$

$$(3') \qquad \underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \quad \text{bzw.} \quad a_\mu^{(\nu)} \leqq \overline{a}^{(\nu)} + \varepsilon \quad \text{für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n,$$

wo nur m von ε abhängt.

Beweis. Man hat nach Gl. (5a), S. 288:

$$\underline{\lim}_{\nu\to\infty} \underline{a}^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} \underline{a}^{(\nu)} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\lim}_{\nu\to\infty} \overline{a}^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} \overline{a}^{(\nu)}$$

und daher nach (1'):

$$\lim_{\nu\to\infty} \underline{a}^{(\nu)} = \underline{a} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\nu\to\infty} \overline{a}^{(\nu)} = \overline{a}.$$

Daraus folgt zunächst, daß die $|\underline{a}^{(\nu)}|$ bzw. $|\overline{a}^{(\nu)}|$ zum mindesten von einem gewissen $\nu = n$ ab unter einer endlichen Schranke bleiben, also wie behauptet, etwa:

$$(2') \qquad |\underline{a}^{(\nu)}| \leqq A \quad \text{bzw.} \quad |\overline{a}^{(\nu)}| \leqq A \quad \text{für } \nu \geqq n.$$

Andererseits hat man, da mit wachsendem ν die $\underline{a}^{(\nu)}$ niemals *ab*nehmen, die $\overline{a}^{(\nu)}$ niemals *zu*nehmen, für jedes ν:

$$(4') \qquad \underline{a}^{(\nu)} \leqq \underline{a} \quad \text{bzw.} \quad \overline{a}^{(\nu)} \geqq \overline{a}.$$

1) Gött. gel. Anzeigen, 1919, S 344.

Aus der Voraussetzung:

$$\underline{\lim}_{\mu, \nu \to \infty} a_\mu^{(\nu)} = a \quad \text{bzw.} \quad \overline{\lim}_{\mu, \nu \to \infty} a_\mu^{(\nu)} = \bar{a}$$

und der Definition des oberen und unteren Doppellimes (S. 261, Ungl. (7)) folgt, daß bei beliebig vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$ und davon abhängigem, passend gewähltem m', n':

$$a - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \quad \text{bzw.} \quad a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{a} + \varepsilon \quad \text{für: } \mu \geqq m', \ \nu \geqq n'$$

und daher, mit Benützung von (4'), um so mehr:

$$(3'a) \qquad \underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \quad \text{bzw.} \quad a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{a}^{(\nu)} + \varepsilon \quad \text{für: } \mu \geqq m', \ \nu \geqq n'.$$

Genau soweit führte der auf S. 289 gegebene Beweis (nur daß an Stelle der hier mit m', n' bezeichneten Zahlen dort m, n steht). Um nun schließlich die Gültigkeit dieser Ungleichungen, falls $n' > n$ sein sollte, auf das Gebiet $\nu \geqq n$ auszudehnen (sc. mit Hilfe passender Abänderung von m'), gehen wir von der Beziehung aus:

$$\underline{\lim}_{\mu \to \infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{a}^{(\nu)} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\lim}_{\mu \to \infty} a_\mu^{(\nu)} = \bar{a}^{(\nu)}.$$

Stellt hier $\underline{a}^{(\nu)}$ bzw. $\bar{a}^{(\nu)}$ für $n \leqq \nu < n'$ durchweg eine *endliche* Zahl vor, so läßt sich eine untere Schranke m_ν für μ so fixieren, daß:

$$\underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \quad \text{bzw.} \quad a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{a}^{(\nu)} + \varepsilon \quad \text{für: } \mu \geqq m_\nu, \ n \leqq \nu < n'$$

und daher, wegen $\underline{a}^{(\nu)} \leqq \underline{a}^{(\nu)}$ bzw. $\bar{a}^{(\nu)} \leqq \bar{a}^{(\nu)}$, um so mehr:

$$(3'b) \qquad \underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \quad \text{bzw.} \quad a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{a}^{(\nu)} + \varepsilon \text{ für: } \mu \geqq m_\nu, \ n \leqq \nu < n'.$$

Ist dagegen für gewisse ν des Intervalls $n \leqq \nu < n'$ (deren es für $\nu \geqq n$ insgesamt sogar unendlich viele geben kann — vgl. S. 272, (7), (8)) $\underline{a}^{(\nu)} = +\infty$ bzw. $\bar{a}^{(\nu)} = -\infty$, d. h. $\underline{\lim}_{\mu \to \infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty$ bzw. $\overline{\lim}_{\nu \to \infty} a_\mu^{(\nu)} = -\infty$[1]), so erkennt man unmittelbar, daß bei passender Wahl von m_ν die Ungleichungen (3'b) erst recht bestehen bleiben.

Die Zahlen m_ν für $\nu = n, \ n+1, \cdots n'-1$ haben ein gewisses Maximum m'' und die Ungleichungen (3'b) gelten sodann für:

$$\mu \geqq m'', \ \nu = n, \ n+1, \cdots n'-1.$$

Durch Zusammenfassung dieses Ergebnisses mit dem in Ungl. (3'a) enthaltenen findet man schließlich, wenn man mit m eine Zahl bezeichnet, die *mindestens ebenso groß* ist als jede der beiden Zahlen m', m'':

$$(3') \qquad \underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \quad \text{bzw.} \quad a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{a}^{(\nu)} + \varepsilon \text{ für } \mu \geqq m, \ \nu \geqq n,$$

übereinstimmend mit der ausgesprochenen Behauptung.

---

1) Die Möglichkeit $\underline{a}^{(\nu)} = -\infty$ bzw $\bar{a}^{(\nu)} = +\infty$ erscheint hier ausgeschlossen, da ja die $\underline{a}^{(\nu)}$ *nach unten*, die $\bar{a}^{(\nu)}$ *nach oben* beschränkt sind.

Abschnitt II.

Zu § 44, Nr. 3 (S. 298).

Die besondere Form der notwendigen und hinreichenden Konvergenzbedingung (11): $\lim_{n, \varrho \to \infty} R_{n,n+\varrho} = 0$ rührt im wesentlichen von Cauchy her (Exerc de Math. 2 [1827], p. 221 = Oeuvres (2), 7, p. 267). Die von Cauchy gewählte nicht ganz klare Fassung (deren wahrer Inhalt erst durch die von ihm selbst gemachten Anwendungen zum unzweideutigen Ausdruck kommt) hat zu Mißverständnissen und Kontroversen geführt. Näheres darüber findet man in [13] S. 327—334.[1])

Zu § 45, Nr. 3, 4 (S. 307/10).

Die Zerlegung der für die Konvergenz einer Reihe notwendigen und hinreichenden Bedingungen in die beiden (einzeln notwendigen, zusammen auch hinreichenden) Bedingungen (6) und (7) (S. 307) habe ich in [19], S. 507 angegeben. Die Verallgemeinerung (16) (S. 310) der Bedingung (7), sowie deren weitere Verallgemeinerung (15) (S. 309) rühren von Kronecker her (Paris C. R. 103 [1886], p. 980; 106 [1888], p. 835).

Zu § 47ff. (S. 317).

Die Arbeit [4][2]), deren Inhalt die wesentliche Grundlage der in den Paragraphen 47—50, 52, 54—56 entwickelten Konvergenztheorie insbesondere der Lehre von den Konvergenz- und Divergenzkriterien bildet, enthält zahlreiche historisch-kritische Bemerkungen und Literaturangaben, auf welche hiermit verwiesen werden möge; außerdem noch auf D. Enc. I A 3, S. 77—91 und Enc. fr. I 4, p. 210—239.

Zu § 48, Nr. 2, 3 (S. 326/8).

Es wird dort auf Grund der Identität:

$$\text{(A)} \qquad M_0 + \sum_1^n (M_\nu - M_{\nu-1}) = M_n$$

(wo $0 < M_\nu < M_{\nu+1}$, $\lim_{n \to \infty} M_n = +\infty$) festgestellt, daß eine Reihe von der Form: $\sum (M_\nu - M_{\nu-1})$ stets *divergiert*, und zwar definitionsgemäß

1) Daselbst ist auf S. 328 ein Versehen stehen geblieben, das ich bei dieser Gelegenheit berichtigen möchte. Es muß auf Zeile 13 und 17 statt: *unendlich groß* bzw. *unendlich* beidemal heißen: *von Null verschieden*.

2) Auf der zweiten Zeile des Anfangssatzes muß es dort heißen: mit *beliebigen* positiven Gliedern (statt: mit positiven Gliedern). (Nämlich mit Rücksicht auf die schon 1813, also *vor* Cauchy publizierten Gaußschen Kriterien, die sich nur auf eine *spezielle* Gliederform beziehen.)

um so *schwächer*, je langsamer M_ν mit ν ins Unendliche wächst, daß man also von irgendeiner bestimmten Reihe: $\sum(M_\nu - M_{\nu-1})$ ausgehend beliebig viele schwächer divergierende Reihen: $\sum(M'_\nu - M'_{\nu-1})$ erzeugen kann, wenn man $M'_\nu \prec M_\nu$ annimmt. Die spezielle Wahl:

$$M'_\nu = \lg M_\nu \tag{B}$$

führt dann mit Benützung der Ungleichung:

$$\lg M_\nu - \lg M_{\nu-1} < \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_{\nu-1}} \tag{C}$$

zum Beweis der *Divergenz* von:

$$\sum \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_{\nu-1}} \text{ und sogar von: } \sum \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_\nu}, \tag{D}$$

und dieses Ergebnis läßt sich nach Einführung der Bezeichnungen:

$$M_0 = d_0, \quad M_\nu - M_{\nu-1} = d_\nu \ (\nu \geqq 1), \text{ also: } M_n = \sum_0^n d_\nu = s_n,$$

auch so aussprechen, daß gleichzeitig mit der Reihe $\sum d_\nu$ auch die beiden folgenden (und zwar *schwächer*) *divergieren:*

(E) $\sum \frac{d_\nu}{s_{\nu-1}}$ (Satz von Abel: Journ. f. Math. 3 [1828], S. 81)

und sogar:

(E′) $\sum \frac{d_\nu}{s_\nu}$ (Satz von Dini: Ann. dell' Univ. Tosc. 9 [1867], p. 46).[1]

Der schon mehrfach erwähnte besonders einwandfrohe Kritiker knüpft an diese Deduktion die Bemerkung, ich hätte von dem „doch nicht ganz unbekannten"[2]) Abel-Dinischen Satze *ausgehen* und durch die infinitäre Relation:

$$\sum_0^n \frac{d_\nu}{s_\nu} \cong \lg s_n \ (\text{falls: } d_n \prec s_n)$$

die weiterhin (d. h. bei der Aufstellung von Kriterienskalen) *dominierende* Rolle des Logarithmus *motivieren* sollen, statt diesen letzteren durch einen bloßen *Akt der Willkür* (s. Gl (B)) einzuführen.

Hierzu möchte ich zunächst vom historischen Standpunkt aus bemerken, daß Abel seinen für die damalige Zeit äußerst merkwürdigen Satz (E) durch den gleichen „Willkürakt" überhaupt *entdeckt,* nämlich den Weg dazu über diejenige logarithmische Beziehung genommen hat,

---

1) Auch als Monographie unter dem Titel: *Sulle serie a termini positivi* erschienen (Pisa 1867, Tipogr. Nistri, p. 1—42, siehe insbesondere p. 8).

2) Der Zweck dieser ungemein feinen ironischen Wendung ist mir nicht ganz verständlich.

welche genau der oben mit (C) bezeichneten entspricht; daß andererseits Dini die Heranziehung des Logarithmus bei der Herleitung seines Satzes (E') zwar vermieden, diesen letzteren aber *überhaupt nicht bewiesen* hat, da sein angeblicher Beweis nicht etwa nur unvollkommen, sondern nach meinem Dafürhalten gänzlich verfehlt ist. Dagegen habe ich selbst vor dreißig Jahren in [4] die Sätze (E) und (E')[1]) *ohne* Benützung von Logarithmen sehr einfach bewiesen (a. a. O. S. 321/2), zugleich aber ausführlich motiviert (S. 323/4), warum ich es nicht für zweckmäßig hielt, auf dem so eröffneten Wege weiter fortzuschreiten. Ich erwähne das nur, um zu zeigen, daß der oben genannte Verbesserungsvorschlag für mich keineswegs den Reiz besonderer Neuheit besitzt. Im übrigen scheint mir sein derzeitiger Erfinder in einem schweren prinzipiellen Irrtum befangen, wenn er annimmt, die *dominierende* Rolle, welche der *Logarithmus* in den Kriterienskalen für unendliche Reihen spielt, beruhe auf jenem Abelschen Satze. Ich denke, der *Logarithmus* spielt diese *dominierende* Rolle, *muß* sie geradezu spielen, überall da, wo es sich um feinere Abstufungen des Unendlichwerdens handelt, weil uns eine andere rechnerisch wohl definierte und durchforschte (schließlich „analytische“) Funktion für diesen Zweck nicht zur Verfügung steht. Mit dem Abelschen Satze hat dagegen diese *innerhalb der verschiedensten Gebiete der Arithmetik und Funktionenlehre* maßgebende Stellung des Logarithmus nicht das geringste zu tun. Und in dem vorliegenden Zusammenhange (s. Gl. (B)) entspringt die Wahl $M'_\nu = \lg M_\nu$, wenn auch nicht einem unbedingten logischen Zwange, so doch völlig zielbewußt der technischen Notwendigkeit, aus der *unendlichen Menge* der möglichen Fälle *die rechnerisch brauchbarsten* herauszuheben. Dagegen kann der durch den Scharfblick eines genialen Mathematikers entdeckte, nunmehr *a posteriori* leicht zu beweisende *Einzelfall* der gleichzeitigen Divergenz zweier voneinander abhängiger Reihen nur vermittelst eines *Kunstgriffs*, nämlich durch die in *diesem* Zusammenhange nur einer Art

---

1) Sie erscheinen dort als Umkehrungen der Sätze, daß das allgemeine Glied d_ν einer divergenten Reihe (mit positiven Gliedern) sich stets auf die Form: $\frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_{\nu-1}}$ und, falls $d_\nu < 1$, auch: $\frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_\nu}$ bringen läßt. Will man hiervon absehen, so läßt sich die *Divergenz* der Reihe $\sum \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_\nu}$ (und damit ohne weiteres auch diejenige von $\sum \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_{\nu-1}}$) noch etwas einfacher mit Hilfe der Ungleichung beweisen:

$$\sum_{n+1}^{n+\varrho} \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_\nu} > \frac{1}{M_{n+\varrho}} \cdot \sum_{n+1}^{n+\varrho} (M_\nu - M_{\nu-1}) = 1 - \frac{M_n}{M_{n+\varrho}}.$$

Glücksfall zu verdankende Heranziehung von Logarithmen so *umgeformt* werden, daß er zur Aufstellung eines Divergenzkriteriums brauchbar wird. Überdies gewinnt man auf diesem Wege nicht den geringsten Einblick in den Grad von Allgemeinheit, welcher hierbei erzielt wird. Das gerade ist aber der Zweck meiner ganzen Konvergenztheorie, die man unter Verzichtleistung auf tieferes Eindringen in die herrschenden Zusammenhänge meinetwegen gänzlich überflüssig finden, jedoch nicht durch unverständiges Abändern wesentlicher und wohldurchdachter Bestandteile „verbessern" kann.

Zu § 51, Nr. 6, 7 (S. 349/52).

Das a. a. O. behandelte Übungsbeispiel für die Anwendung der logarithmischen Kriterien erster Art in ihrer ursprünglichen („Bonnetschen") Form (S. 336, Formel (C')) rührt von Ossian Bonnet selbst her (Journ. de Math. 8 [1843], p. 81) und konnte im Rahmen dieser Vorlesungen benützt werden, da es lediglich an die *empirische* Legendresche Annäherungsformel, nicht aber an deren moderne, auf den (recht komplizierten) Hilfsmitteln der analytischen Zahlentheorie beruhende und daher bei der völlig in sich geschlossenen Darstellungsweise dieses Buches nicht verwendbare Vervollkommnung:

$$P(n) \cong \frac{n}{\lg n}$$

anknüpft (was ich ausdrücklich hervorhebe, da der auch in der vorigen Anmerkung wieder erwähnte Kritiker in dieser Unterlassung das „merkwürdige Verschweigen" eines Hauptergebnisses erblickt und die Benützung der Legendreschen Näherungsformel geradezu „seltsam" findet). Wer sich im übrigen über die Entwicklung und den jetzigen Stand der dort nur, soweit es zur Erläuterung des obigen Beispiels nötig schien, kurz berührten Frage nach der relativen Häufigkeit der Primzahlen gründlich orientieren will, sei auf die ausführliche historische Darstellung verwiesen, die E. Landau seinem bereits zuvor (S. 927, Fußnote 1) erwähnten „Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen" (S. 3—55) vorausgeschickt hat; sowie auf desselben Verfassers Vortrag: „Gelöste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion" (Proc. fifth internat. congr. of math., Cambridge 1913).

Zu § 53, Nr. 3—8 (S. 366ff.).

Man war früher der irrigen Meinung, daß aus der *Divergenz* der Reihen $\sum \frac{1}{\nu}$, $\sum \frac{1}{L_k(\nu)}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ die Beziehungen:

(1) $\lim\limits_{\nu \to \infty} \nu a_\nu = 0$, (2) $\lim\limits_{\nu \to \infty} L_k(\nu) \cdot a_\nu = 0$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$

ohne weiteres als *notwendige* Bedingung für die *Konvergenz* der Reihe $\sum a_\nu$ hervorgehen. Catalan z. B. in seinem Traité élémentaire des séries (Paris 1860) begnügt sich unter Hinweis auf die *Divergenz* der genannten Reihen mit der Bemerkung: „Ces conditions n'exigent aucune explication" (a. a. O. S 17), und selbst der in seinen späteren Arbeiten so scharfsinnige und von mir sehr hochgeschätzte Dini hält in der bereits oben (S. 939 Fußnote 1) erwähnten Abhandlung (Ann dell' Univ. Tosc. 9 [1867], p 50/1) die fragliche Behauptung (sogar in erweitertem Umfange) ohne jede weitere Erklärung aufrecht. Erst durch meine Untersuchungen (s. [4], § 6, S 343ff., [6], § 5, S. 600ff. und [11], § 3, S. 614ff.) wurde insbesondere die Richtigkeit der Bedingung (1), und zwar nur für den Fall $a_\nu \geqq a_{\nu+1}$, zugleich aber auch die Unrichtigkeit der Bedingung (2) selbst für diesen Fall außer Frage gestellt.

Es entbehrt nicht eines gewissen Humors, daß in der deutschen Ausgabe der algebraischen Analysis von Cesàro[1]) gerade die oben angeführte Dinische Abhandlung (eine Jugendarbeit, die neben manchen bemerkenswerten Ergebnissen leider recht große Ungeschicklichkeiten und wirkliche Fehler enthält) als die *einzige* erwähnt wird, in welcher „allgemeinere Sätze" über Reihenkonvergenz zu finden seien (a. a. O. S. 136, Fußnote[2])). Allerdings scheinen dem Verfasser meine Arbeiten über Reihenlehre einschließlich meines einschlägigen Encyklopädieartikels so völlig unbekannt geblieben zu sein, daß sogar das bescheidene Verdienst jenes zuerst von mir bewiesenen Satzes über die wahre Stellung der Bedingung (1) Herrn Borel zugeschrieben wird (a. a. O S. 134, Fußnote), obschon dieser selbst ihn ausdrücklich als „proposition due à M. Pringsheim" bezeichnet.[3]) Ob dieser hohe Grad historischer Gründlichkeit oder Objektivität mit der Tatsache zusammenhängt, daß ich in meiner umfangreichen Abhandlung [4] gewisse auf die Konvergenz der Reihen sich beziehende, durchaus unzutreffende Äußerungen Cesàros als solche zu kennzeichnen versucht habe (s. [4], die Fußnoten auf S. 308/9 und 343), lasse ich dahingestellt, zumal ich niemals erfahren habe, ob der ihm zugesandte Sonderabzug in seine Hände gelangt ist.

---

1) Ausführliche Titelangabe s. Fußnote 2, S 927.

2) Diese Fußnote gehört zu dem a. a. O. behandelten Kummerschen Konvergenzkriterium. Nichtsdestoweniger erscheint dann auf S. 150 als *neues* Konvergenzkriterium ein angeblich von F. Giudice herrührendes, welches auf den ersten Blick als eine (übrigens nicht sehr erhebliche) Verschlechterung des Kummerschen zu erkennen ist.

3) Leçons sur les séries à termes positifs (Paris 1902), S. 18, Fußnote.

Zu § 56 (S. 400).

Neben den Kriterien *zweiter Art* lassen sich auch solche bilden, die ich als *„erweiterte Kriterien zweiter Art“* bezeichnet habe; nämlich solche, bei denen statt des Quotienten zweier *konsekutiver* derjenige zweier voneinander beliebig *entfernter Glieder* oder auch derjenige zweier *Gliedergruppen* in Betracht gezogen wird. Näheres darüber, insbesondere über den wichtigsten Typus dieser Gattung, die Ermakoffschen Kriterien s. [4], S. 386–394 und [27], S. 327/9.

Zu § 61 (S. 437 ff.).

Zu Nr. 1 Die Restabschätzungsformel Gl. (3), S. 438, nämlich:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}_{\nu}\frac{1}{\nu^2}<\frac{1}{n}, \tag{1}$$

gestattet die folgende nützliche Verallgemeinerung.

Ist α eine *beliebige reelle Zahl* >1, so hat man nach § 31, Gl. (Ib), S. 192 $\left(\text{wenn gesetzt wird: } P=1+\frac{1}{\nu},\ G=\alpha\right)$:

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\alpha}>1+\alpha\cdot\frac{1}{\nu},$$

also durch Multiplikation mit ν^{α}:

$$(\nu+1)^{\alpha}>\nu^{\alpha-1}(\nu+\alpha)$$

und daher:

$$\frac{\nu+\alpha}{(\nu+1)^{\alpha}}=\frac{1}{(\nu+1)^{\alpha-1}}+\frac{\alpha-1}{(\nu+1)^{\alpha}}<\frac{1}{\nu^{\alpha-1}},$$

schließlich:

$$\frac{1}{(\nu+1)^{\alpha}}<\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\nu^{\alpha-1}}-\frac{1}{(\nu+1)^{\alpha-1}}\right). \tag{2}$$

Durch Summation über $\nu=n, n+1, \cdots n+p-1$ ergibt sich weiter:

$$\sum_{n+1}^{n+p}{}_{\nu}\frac{1}{\nu^{\alpha}}<\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}-\frac{1}{(n+p)^{\alpha-1}}\right)$$

und hieraus für $p\longrightarrow\infty$:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}_{\nu}\frac{1}{\nu^{\alpha}}<\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}}\,{}^{1)}, \tag{3}$$

eine Formel, die für $\alpha=2$ mit Gl. (1) übereinstimmt.

1) Das Auftreten eines *Gleichheits*zeichens ist bei *diesem* Grenzübergange definitiv ausgeschlossen. Denn angenommen, man setzte:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}_{\nu}\frac{1}{\nu^{\alpha}}=\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}}=\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}-\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right)+\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}},$$

so würde, mit Benützung von Ungl. (2) für $\nu=n$, daraus folgen:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}_{\nu}\frac{1}{\nu^{\alpha}}>\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}},$$

was dem gefundenen Resultate widerspricht.

Neben dieser *oberen* Schranke läßt sich auch eine ähnliche *untere* für den betreffenden Reihenrest angeben. Geht man aus von der Formel (IIb), S. 183 (die sich im übrigen, wie auf S. 192 des näheren auseinandergesetzt ist, auch leicht auf irrationale Exponenten übertragen läßt) und setzt wiederum: $P = 1 + \frac{1}{\nu}$, $c = \alpha > 1$, so folgt zunächst:

$$\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\alpha} < 1 + \alpha \cdot \frac{\frac{1}{\nu}}{1 + \frac{1}{\nu} - \alpha \cdot \frac{1}{\nu}} = \frac{\nu + 1}{\nu + 1 - \alpha} \text{ (für } \nu > \alpha - 1),$$

also durch Multiplikation mit ν^{α} und Division mit $\nu + 1$:

$$(\nu + 1)^{\alpha - 1} < \frac{\nu^{\alpha}}{\nu - (\alpha - 1)}$$

und daher:

$$\frac{1}{(\nu + 1)^{\alpha - 1}} > \frac{1}{\nu^{\alpha - 1}} - \frac{\alpha - 1}{\nu^{\alpha}},$$

schließlich:

$$\frac{1}{\nu^{\alpha}} > \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{\nu^{\alpha - 1}} - \frac{1}{(\nu + 1)^{\alpha - 1}}\right), \tag{4}$$

woraus durch Summation über $\nu = n + 1, n + 2, \cdots n + p$ für $p \longrightarrow \infty$ sich ergibt:

$$\sum_{n+1}^{\infty} \nu \frac{1}{\nu^{\alpha}} > \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{(n + 1)^{\alpha - 1}}. \tag{5}$$

Zu Nr. 2, 3 (S. 439/42). Eine allgemeinere, auf der Vertauschung der Summationsfolge einer iterierten Reihe beruhende Transformationsmethode, welche die Eulersche als besonderen Fall enthält, gibt A. A. Markoff: Differenzenrechnung, deutsche Ausgabe (Leipzig 1896), S. 178/9.

Zu § 66, Nr 6 (S. 496).

Will man für den a. a. O. behandelten Fall:

$$u_{\nu} = (-1)^{\nu} a_{\nu}, \quad v_{\nu} = (-1)^{\nu} b_{\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots),$$

wo die a_{ν}, b_{ν} *positive*, mit $\nu \longrightarrow \infty$ *monoton* gegen Null konvergierende Zahlen bedeuten, ohne Benützung der in Nr. 4 und 5 entwickelten allgemeinen Ergebnisse nur beweisen, daß die für die Anwendung der Multiplikationsregel *notwendige* Bedingung:

$$\lim_{n \to \infty} w_n \equiv \lim_{n \to \infty} \sum_{0}^{n} \nu\, u_{\nu} v_{n - \nu} = 0$$

in dem vorliegenden Falle auch *hinreichend* ist, so kann man nach dem Vorgange von Herrn G. H. Hardy (The multiplication of conditionally convergent series. Proc. Lond. Math. Soc. (2), 6 [1908], p. 418) folgendermaßen verfahren.

Nach Gl. (19), S. 488 hat man:

$$|U_n V - W_n| = \left|\sum_0^n u_\nu (V - V_{n-\nu})\right| \leqq \sum_0^n a_\nu |V - V_{n-\nu}|.$$

Dabei ist jetzt:

$$V = b_0 - b_1 + \cdots + (-1)^{n-\nu} b_{n-\nu} + (-1)^{n-\nu+1} b_{n-\nu+1} + \cdots\cdots$$

und daher:

$$V - V_{n-\nu} = (-1)^{n-\nu+1} (b_{n-\nu+1} - b_{n-\nu+2} + \cdots\cdots),$$

folglich:

$$|V - V_{n-\nu}| \leqq b_{n-\nu+1}.$$

Hiernach findet man:

$$|U_n V - W_n| \leqq \sum_0^n a_\nu b_{n-\nu},$$

also, falls $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_0^n a_\nu b_{n-\nu} = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} (U_n V - W_n) = 0,$$

d. h.:

$$\lim_{n\to\infty} W_n = U. V.$$

Abschnitt III.

Zu § 70, Nr. 2 (S. 585/6).

Zur Bestätigung der in Fußnote 1 (S. 536) geäußerten Ansicht über den hohen Grad von *Willkürlichkeit*, den die Einführung der komplexen Zahlen als Zahlenpaare mit sich bringt, vergleiche man z. B. H. Burkhardt, Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen (3. Aufl., Leipzig 1908), S. 3—8; H. Weber, Enzyklopädie der elementaren Algebra und Analysis (3. Aufl., Leipzig 1909), S. 145; auch D. Enc. I A 4, S. 150/151, wo allerdings der Versuch gemacht wird, die Willkürlichkeit der Multiplikationsformel durch den Hinweis zu beseitigen, daß bei der Untersuchung komplexer Systeme beliebig hoher Ordnung mit kommutativer Multiplikation die fragliche Festsetzung der Multiplikationsformel vor anderen von vornherein ausgezeichnet erscheint. Eine eingehende Begründung der Rechnungsregeln für die gemeinen komplexen Zahlen auf Grund der Definition durch Zahlenpaare gibt Herr M. Pasch im Anhange (S. 158 ff.) seines Buches: Veränderliche und Funktion (Leipzig und Berlin 1914).

Zu § 71 (S. 542ff.).

Zu Nr. 1 (S. 542/4). Eine zusammenfassende Darstellung verschiedener Untersuchungen über höhere komplexe Zahlen gibt Stolz-Gmeiner: Theor. Arithmetik, Abt. II (Leipzig und Berlin 1915), S. 219—273. — Im übrigen s. D. Enc. 1 A 4 (S. 147—183): E. Study, Theorie der gemeinen und höheren komplexen Größen

Der höchst merkwürdige Satz, daß man die Zahlenmenge $X = \xi + \eta i$ des „zweidimensionalen" Bereiches: $0 \leqq \xi \leqq 1$, $0 \leqq \eta \leqq 1$ umkehrbar eindeutig den reellen Zahlen x des „eindimensionalen" Bereiches: $0 \leqq x \leqq 1$ zuordnen kann (in geometrischer Ausdrucksweise [vgl. Bd. II dieser Vorlesungen], daß man die Punkte eines *Quadrates* von der Seitenlänge 1 umkehrbar eindeutig auf die Punkte der *Strecke* 1 „abbilden" kann), rührt von G. Cantor her (Journ. f Math. 84 [1878], S. 242ff.). Doch führt dieser den fraglichen Beweis in der Art, wie er hier in § 103, Nr. 5 (S. 778) mitgeteilt wird, nämlich mit Hilfe der Darstellung der *irrationalen* Zahlen durch unendliche regelmäßige *Ketten*brüche, *nicht*, wie im vorliegenden Paragraphen geschieht, mit Hilfe der Darstellung der *reellen* Zahlen durch unendliche *System*brüche (hier speziell *dyadische* Brüche), und macht andererseits (a. a. O. S. 255) nur ausdrücklich auf die von uns im Anfang von Nr. 4 (S. 548) hervorgehobene Schwierigkeit aufmerksam, welche die entsprechende Anwendung von *System*brüchen (bei ihm speziell *Dezimal*brüchen) mit sich bringen würde. Der zur Behebung dieser Schwierigkeit von uns in Nr. 4 benutzte Kunstgriff, in dem fraglichen Zusammenhange die Ziffern des unendlichen Systembruches zu bestimmten *Komplexen* zusammenzufassen, statt sie *einzeln* zu verwenden, rührt nach A. Schoenflies: Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten (Jahresb. der D. M. V. 8 [1900], S. 23), von J. König her.

Der im letzten Absatz von Nr. 3 (S. 548) erwähnte „*Äquivalenzsatz*" der Mengenlehre wurde ungefähr gleichzeitig von E. Schröder (vgl. Jahresb. der D. M V. 5 [1896], S. 81) und F. Bernstein bewiesen. Letzterer Beweis auf Grund gelegentlicher Mitteilung zuerst veröffentlicht von E. Borel: Leçons sur la théorie des fonctions [Paris 1898], p. 103; sodann von A. Schoenflies in dem eben erwähnten Bericht über Punktmengen (a. a. O S. 16). Eine sehr durchsichtige Darstellung dieses Beweises, sowie einen zweiten von Herrn E. Zermelo (Gött. Nachr. 1901, S. 34) herrührenden Beweis findet man bei F. Hausdorff. Grundzüge der Mengenlehre (Leipzig 1914), S. 48/50).

Zu § 72, Nr. 4 (S. 557).

Der in Fußnote 1 mitgeteilte Beweis des Satzes: $|a + a'| \leq |a| + |a'|$ findet sich bei Ch.-J. de la Vallee Poussin, Cours d'analyse infinitésimale (3ième éd. 1914), p. 40.

Zu § 75, Nr. 5 (S. 582).[1]

Der Riemannsche Satz über *bedingt konvergente* Reihen mit *reellen* Gliedern (§ 57, Nr. 2, S 403), des Inhalts, daß eine solche Reihe vermittelst passender Anordnung der Glieder gegen jede beliebig vorgeschriebene Summe *konvergieren* kann, mit der (a. a. O. Nr. 3 angegebenen) Erweiterung, daß man sie auf dieselbe Weise auch nach $+\infty$ oder $-\infty$ *divergieren* oder zwischen beliebigen Grenzen *oszillieren* lassen kann, ist in sogleich näher anzugebendem Sinne auch auf Reihen mit *komplexen* Gliedern übertragbar. Bezeichnet man nämlich die Gesamtheit der Grenzwerte, deren eine bedingt konvergente Reihe bei allen möglichen Anordnungen ihrer Glieder fähig ist, als deren *Summenbereich*, so läßt sich zunächst der obige Satz dahin aussprechen, daß der *Summenbereich* einer bedingt konvergenten Reihe mit *reellen* Gliedern aus der *Gesamtheit aller reellen Zahlen* von $-\infty$ bis $+\infty$ besteht. Für bedingt konvergente Reihen mit *komplexen* Gliedern $\sum(\alpha_\nu + \beta_\nu i)$ gilt nun der folgende Satz: Der *Summenbereich* einer solchen Reihe ist entweder *das ganze komplexe Zahlengebiet* oder auch nur eine *lineare Mannigfaltigkeit* dieses Zahlengebietes, d. h. die Gesamtheit aller Zahlen $\xi + \eta i$, deren Bestandteile einer Relation von der Form $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma = 0$ (wo α, β, γ bestimmte reelle Zahlen) genügen. Dieser Satz wurde zuerst von P. Lévy (Sur les séries semiconvergentes. Nouv. ann. de math. (4), 5 [1905], p. 506) ausgesprochen und im wesentlichen bewiesen; vollständiger und zugleich mit der Ausdehnung auf komplexe Zahlen höherer Ordnung von E. Steinitz (Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme. Journ. f. Math. 143 [1913], S. 128ff., s. insbesondere S. 163—175; 144 [1914], S. 1ff., s. insbesondere S. 36—40) und W. Groß (Bedingt konvergente Reihen. Monatsh. f. Math. u. Phys. 28 [1917], S. 221).

Zu § 76 (S. 583ff).

Die hier gegebene Umformung der Kriterien zweiter Art für Reihen mit komplexen Gliedern, sowie deren Anwendung zur Herleitung der Weierstraßschen Kriterien ist der Arbeit [24] entnommen. Die letzteren finden sich in Weierstraß' Abhandlung über die *analytischen Fakultäten* (Journ. f. Math. 51 [1856], S. 28 = Werke 1, S. 185).

---

1) Die zum vorletzten Absatz von S. 582 gehörige Numerierung 5 ist infolge eines Druckversehens weggeblieben.

Zu § 78 (S. 594ff.).

Zu Nr. 1—4. Es sind wie bereits in Nr. 1 angedeutet wurde, im wesentlichen *funktionentheoretische* Ziele, welche den Anlaß dazu gegeben haben, einer (uneigentlich) *divergenten* Reihe einen nach irgendwelchen besonderen Vorschriften aus den Reihengliedern gebildeten Grenzwert als Ersatz für die fehlende Summe zuzuordnen. Zu einer vorläufigen Orientierung in dieser Richtung sollen die folgenden Bemerkungen dienen.

Ist $0 \leqq \xi < 1$, so hat man (vgl. § 44, Gl. (23), S. 301):

$$\sum_0^\infty (-1)^\nu \xi^\nu = \frac{1}{1+\xi}$$

und daher[1]):

$$\lim_{\xi \to 1} \sum_0^\infty (-1)^\nu \xi^\nu = \lim_{\xi \to 1} \frac{1}{1+\xi} = \frac{1}{2}.$$

Andererseits geht, wenn man geradezu $\xi = 1$ setzt, die Reihe $\sum_0^\infty (-1)^\nu \xi^\nu$ in die folgende über:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots\cdots.$$

Im Anschluß an die vorhergehende Gleichung haben daher verschiedene ältere Analysten dieser (in den Grenzen 0 und 1) *oszillierenden* Reihe ohne weiteres die *„Summe“* $\frac{1}{2}$ beigelegt, ein Verfahren, über dessen Zulässigkeit im 17. und 18. Jahrhundert zahlreiche Kontroversen stattfanden (vgl. D. Enc. I A 3, Nr. 39; Enc. fr. I 4, No. 20). Im übrigen wäre tatsächlich nichts dagegen einzuwenden, wenn man schlechthin *definiert* hätte: Ist $\sum a_\nu$ *divergent*, dagegen $\lim\limits_{\xi \to 1} \sum_0^\infty a_\nu \xi^\nu = s$, so soll s

1) Eine ähnliche Schreibweise, nämlich:

$$\lim_{\delta \to 0} (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = e,$$

wurde bereits auf S. 201 Fußn. 1) angewendet. Allgemein bedeutet, wenn, wie hier, ξ von vornherein auf das Intervall $0 \leqq \xi < 1$ beschränkt wird, die Schreibweise

$$\lim_{\xi \to 1} f(\xi) = b$$

folgendes: Zu beliebig klein vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$ läßt sich $\delta > 0$ so bestimmen, daß:

$$|f(\xi) - b| < \varepsilon,$$

wenn:

$$1 - \delta < \xi < 1.$$

als *„Summe"* der Reihe $\sum_0^\infty a_\nu$ bezeichnet werden. Damit wäre aber nichts anderes gewonnen als ein neuer *Name* für jenen Grenzwert s, während es sich in Wahrheit in dem vorliegenden Zusammenhange um die Lösung der folgenden Aufgabe handelt: Es soll ein von der Rechenvorschrift $\lim\limits_{\xi \to 1} \sum_0^\infty a_\nu \xi^\nu$ wesentlich *verschiedenes*, auf die Zahlen a_ν $(\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ anzuwendendes Grenzverfahren, etwa $\lim\limits_{n \to \infty} S(a_0, a_1, \cdots a_n)$, angegeben werden, das im Falle der *Divergenz* von $\sum a_\nu$ und der *Existenz* eines endlichen $\lim\limits_{n \to \infty} S(a_0, a_1, \cdots a_n) = s$ die Sicherheit gibt, daß auch $\lim\limits_{\xi \to 1} \sum_0^\infty a_\nu \xi^\nu$ im engeren Sinne *existiert*, und zwar gleichfalls den Wert s besitzt. Zugleich müßte dieses Grenzverfahren, das ja die fehlende *Summe* der Reihe $\sum a_\nu$ ersetzen soll, zur Vermeidung von Widersprüchen so beschaffen sein, daß bei seiner Anwendung auf die Glieder a_ν einer *konvergenten* Reihe $\lim\limits_{n \to \infty} S(a_0, a_1, \cdots a_n)$ mit dem Werte von $\sum_0^\infty a_\nu$ zusammenfällt, und es müßte überdies von vornherein feststehen, daß im Falle der Konvergenz von $\sum a_\nu$ die (keineswegs selbstverständliche) Beziehung stattfindet:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{\xi \to 1} \sum_0^\infty a_\nu \xi^\nu &= \sum_0^\infty a_\nu \\ &= \lim_{n \to \infty} s_n, \text{ wo: } s_n = a_0 + a_1 + \cdots a_n. \end{aligned} \right.$$

Daß letzteres in der Tat der Fall ist, wurde erst von Abel bewiesen (Journ. f. Math. 1 [1827], S. 314 = Oeuvres, éd. Sylow-Lie, 1, p. 223), und dieses Ergebnis hat G. Frobenius (Journ. f. Math. 89 [1880], S. 262) dahin verallgemeinert, daß:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{\xi \to 1} \sum_0^\infty a_\nu \xi^\nu &= \lim_{n \to \infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} \\ &= \lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_1(s_n) \qquad \text{(in der Schreibweise} \end{aligned} \right.$$

unseres Textes S. 595, Gl. (4_1) bzw. (4) für $\varkappa = 1$), sofern der *rechts* stehende Grenzwert im engeren Sinne *existiert*. Damit ist dann ein *erstes* Grenzverfahren der verlangten Art gefunden. Liefert dasselbe keinen bestimmten Grenzwert, so können, wie in § 78 Nr. 2 und 3 des näheren erörtert wurde, möglicherweise für irgend ein $\varkappa > 1$ die („Hölderschen" bzw. „Cesàroschen") Grenzwerte $\lim\limits_{n \to \infty} \mathfrak{M}_\varkappa(s_n)$ bzw.

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(\varkappa)}$ im engeren Sinne *existieren*. In diesem Falle bestehen nun die mit Gl. (2) analogen Beziehungen:

$$\lim_{\xi\to 1}\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu \xi^\nu = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_\varkappa(s_n) \tag{2a}$$

$$\lim_{\xi\to 1}\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu \xi^\nu = \lim_{n\to\infty} S_n^{(\varkappa)}\left(= \varkappa!\lim_{n\to\infty}\frac{s_n^{(\varkappa)}}{(n+1)^\varkappa}{}^{1)}\right), \tag{2b}$$

deren *erste* zunächst von Herrn Hölder (Math. Ann. 20 [1885], S. 535) bewiesen wurde, während die *zweite* mit Benützung der für $0 \leqq \xi < 1$ geltenden, leicht zu beweisenden Identität:

$$\frac{1}{(1-\xi)^{\varkappa+1}}\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu \xi^\nu = \left(\sum_0^\infty{}_\nu\, \xi^\nu\right)^{\varkappa+1}\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu\xi^\nu = \sum_0^\infty{}_\nu\, s_\nu^{(\varkappa)}\xi^\nu$$

aus einem von Herrn P. E. Appell (Par. C. R. 87 [1878], p. 690) herrührenden Satze[2]) unmittelbar folgt, welcher besagt, daß:

$$\lim_{\xi\to 1}(1-\xi)^{\varkappa+1}\sum_0^\infty{}_\nu\, s_\nu^{(\varkappa)}\xi^\nu = \varkappa!\lim_{n\to\infty}\frac{s_n^{(\varkappa)}}{(n+1)^\varkappa},$$

wenn der *rechts* stehende Grenzwert im engeren Sinne existiert. Durch den im Text (Nr. 4) mitgeteilten Nachweis der *Äquivalenz* von $\lim\limits_{n\to\infty}\mathfrak{M}_\varkappa(s_n)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(\varkappa)}$ ist der, im Vergleich zu dem oben angedeuteten Beweis der Beziehung (2b), recht umständliche Höldersche Beweis von (2a) völlig entbehrlich geworden.

Daß aus der Existenz eines endlichen $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(\varkappa)}$ stets diejenige eines damit gleichwertigen $\lim\limits_{n\to\infty}\mathfrak{M}_\varkappa(s_n)$ folgt, wurde zuerst von Herrn W. Schnee (Math. Ann. 67 [1909], S. 110—125) bewiesen, nachdem zuvor schon Herr K. Knopp (Grenzwerte von Reihen an der Konvergenzgrenze. Dissert. Berlin 1907) das umgekehrte gezeigt hatte. Diese Beweise sind indessen äußerst langwierig, ebenso ein anderer Beweis des fraglichen Äquivalenzsatzes von W. Ford (Amer. Journ. 32 [1910], p. 315—326). Der Beweis des Textes stammt im Prinzip von Herrn J. Schur (Math. Ann. 74 [1913], S. 447—458), mit Benützung einer von Herrn E. Landau (in der am Schlusse der Fußnote 2 er-

1) Vgl. S. 598/9 Gl (11), (12).

2) Vgl. auch: [19], S. 518, 522. Zu den dort in der Fußnote S. 522 gemachten Literaturangaben wäre noch hinzuzufügen: Cesàro, Napoli Rend. (2), 7 [1893], p. 187 und: Mathesis (2), 3 [1893], p. 241. — E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. [Berlin 1916], S. 33

wähnten Schrift, S. 30—38) gegebenen abgekürzten Darstellung und gewissen weiteren von mir in [23] mitgeteilten Vereinfachungen.

Die Erkenntnis, daß es (uneigentlich) divergente Reihen $\sum a_\nu$ gibt, welche von *keiner noch so hohen Ordnung* (durch Mittelwerte oder iterierte Summation) *reduzibel* sind (vgl. § 78, Schluß von Nr. 3, S. 600), sowie eine *Erweiterung* der ursprünglich an die Abelsche Grenzgleichung (1) anknüpfenden *Fragestellung* in der Richtung, daß man darauf ausging (behufs sogenannter analytischer Fortsetzung), die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ nicht nur, wie zuvor, für den gerade an der *Grenze* des *Konvergenz*gebietes gelegenen Wert $x = 1$, sondern für ganz beliebige, dem *Divergenz*gebiete angehörige Werte x zu *„reduzieren“* oder, wie die allgemein üblich gewordene Ausdrucksweise lautet, zu *„summieren“*[1]) — diese beiden Umstände haben dazu geführt, die hier betrachteten Methoden in mannigfacher Weise umzugestalten bzw. durch verallgemeinerte Arten von Mittelbildungen zu ersetzen. Die einschlägigen Arbeiten sind aber im wesentlichen *funktionentheoretischer* Natur und kommen also in dem vorliegenden Zusammenhange nicht in Betracht, etwa ausgenommen zwei Publikationen neuesten Datums, denen eine arithmetische Weiterbildung der Cesàro-Hölderschen Grenzwerte als Grenzwerte abzählbarer Zahlenmengen zugrunde liegt. Es sind dies die folgenden: A. Kienast, Proof of the equivalence of different mean values (Proc. Cambrigde Philos. Soc. 20 [1920], p. 74). — J. Mollerup, Une méthode de sommabilité par des moyennes éloignées (Danske Videnskabernes Selskab. Math.-fys. Medd. III, 8. [1920]).

Zu Nr. 5. Die am Schlusse dieser Nummer (S. 606) als *hinreichend* für die *Konvergenz* einer *reduziblen* Reihe $\sum a_\nu$ angegebene Bedingung:

$$\lim_{n \to \infty} n a_n = 0$$

ist von Herrn Hardy (Proc. London Math. Soc. (2), 8 [1910], p. 304) durch die folgende, wesentlich weiteren Spielraum gewährende:

---

1) Ich halte diese Ausdrucksweise nicht für besonders glücklich, da eine vollständige und eindeutige Definition des Begriffes: *„Summe einer divergenten Reihe“* mir bisher nicht zu existieren scheint. Man spricht daher gewöhnlich nicht von *summierbaren* Reihen schlechthin, sondern von *„nach Herrn X“* oder *„nach der Methode Y“ summierbaren* oder man bedient sich zur Abkürzung wohl gar so wundersamer Wortbildungen, wie *Xsummierbar, Ysummierbar,* während man nach meinem Dafürhalten erwarten sollte, daß ein so prägnant klingendes Beiwort wie *summierbar*, ähnlich wie *konvergent* oder *divergent,* eine Eigenschaft bezeichnet, die einer Reihe entweder zukommt oder nicht zukommt, deren Existenz sich aber nicht von heute auf morgen ändern kann, je nach der größeren oder geringeren Geschicklichkeit der Mathematiker, die sich mit der fraglichen Reihe gelegentlich beschäftigen.

$$(\mathrm{I}) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \, | n a_n | < +\infty$$

ersetzt worden. Herr Landau (Warschauer Berichte, 1910, S. 99ff.) hat unter Beschränkung auf *reelle* a_n diese Bedingung noch dahin erweitert, daß nur:

$$(\mathrm{II\,a}) \qquad \underline{\lim} \, n a_n > -\infty$$

vorausgesetzt zu werden braucht (während dann immerhin noch $\overline{\lim} \, n a_n = +\infty$ sein dürfte). Dabei ist die Beschränkung auf *reelle* a_n keine wesentliche, da ja im Falle $a_n = \alpha_n + \beta_n i$ das entsprechende Resultat für $\sum a_n$ aus den für $\sum \alpha_\nu$, $\sum \beta_\nu$ geltenden zusammengesetzt werden kann. Auch steht es (da mit der Reihe $\sum a_\nu$ stets auch $\sum(-a_\nu)$ konvergiert und umgekehrt) offenbar frei, in (IIa) a_n durch $(-a_n)$ und somit schließlich die Bedingung (IIa) durch die folgende zu ersetzen:

$$(\mathrm{II\,b}) \qquad \overline{\lim} \, n a_n < +\infty.$$

Einen vereinfachten Beweis dieses Hardy-Landauschen Satzes habe ich in [26] mitgeteilt, der wegen der verhältnismäßig geringen Verbreitung der Münchener Sitzungsberichte zur Vervollständigung des vorliegenden Paragraphen hier nochmals abgedruckt werden möge.

Aus der Rekursionsformel (4), S. 595 ergibt sich, wenn man $\varkappa$ durch $\varkappa + 1$ ersetzt:

$$(1) \quad \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_\nu) = \frac{1}{\nu+1}\{\mathfrak{M}_\varkappa(s_0) + \mathfrak{M}_\varkappa(s_1) + \cdots + \mathfrak{M}_\varkappa(s_\nu)\} \quad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

(wo: $\mathfrak{M}_0(s_\nu) = s_\nu = a_0 + a_1 + \cdots\cdots + a_\nu$). Daraus folgt umgekehrt, daß (für $\varkappa = 0, 1, 2, \cdots\cdots$):

$$(2) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{M}_\varkappa(s_\nu) &= (\nu+1)\,\mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_\nu) - \nu\,\mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_{\nu-1}) \\ &= \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_\nu) + \nu\,\{\mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_\nu) - \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_{\nu-1})\}. \end{aligned}$$

Andererseits gewinnt man aus der Beziehung:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_0(s_\nu) = s_\nu &= \frac{(\nu+1)\,a_0 + \nu\cdot a_1 + \cdots + 1\cdot a_\nu}{\nu+1} + \frac{0\cdot a_0 + 1\cdot a_1 + \cdots + \nu\cdot a_\nu}{\nu+1} \\ &= \mathfrak{M}_1(s_\nu) + \mathfrak{M}_1(\nu a_\nu) \end{aligned}$$

durch $\varkappa$-malige Mittelwertbildung die folgende:

$$(3) \qquad \mathfrak{M}_\varkappa(s_\nu) = \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_\nu) + \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(\nu a_\nu),$$

deren Vergleichung mit (2) ergibt:

$$(4) \quad \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(\nu a_\nu) = \nu\,\{\mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_\nu) - \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_{\nu-1})\} \quad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots).$$ [1]

---

[1] Diese Beziehung gilt auch noch für $\varkappa = -1$, da sie in diesem Falle mit der folgenden zusammenfällt:

$$\nu a = \nu\,(s_\nu - s_{\nu-1}).$$

Nun werde angenommen, daß die a_ν $(\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ *reell* sind und der Bedingung (IIb) genügen. Dann soll unter der weiteren Voraussetzung, daß die Reihe $\sum a_\nu$ *reduzibel* ist, daß also für irgendein $k \geqq 1$ eine Beziehung von der Form besteht:

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_{k+1}(s_n) = s \quad \left(\text{wo: } s_n = \sum_0^n {}^\nu a_\nu\right), \tag{5}$$

die *Konvergenz* von $\sum a_\nu$ bewiesen werden.

Hierzu würde offenbar der Nachweis genügen, daß aus (5) auf Grund der Voraussetzung (IIb) stets folgt, daß auch:

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_k(s_n) = s, \tag{5a}$$

da durch fortgesetzte Anwendung dieses Ergebnisses für abnehmende k schließlich die Beziehung:

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_0(s_n) = s, \ \text{d. h.} \lim_{n \to \infty} s_n = s,$$

also die *Konvergenz* der Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu a_\nu$ gegen die Summe s resultieren würde.

Um den obigen Nachweis zu führen, hat man infolge der Voraussetzung (IIb) bei passend gewähltem $A > 0$ für $\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots$ zunächst:

$$\nu a_\nu < A,$$

also auch:

$$\mathfrak{M}_1(\nu a_\nu) < A$$

und durch Fortsetzung dieser Schlußweise allgemein:

$$\mathfrak{M}_\varkappa(\nu a_\nu) < A \ (\text{für } \varkappa = 0, 1, 2, \cdots\cdots),$$

anders geschrieben, mit Berücksichtigung von Gl. (4) nebst der zugehörigen Fußnote:

$$\nu\{\mathfrak{M}_\varkappa(s_\nu) - \mathfrak{M}_\varkappa(s_{\nu-1})\} < A \ (\text{für } \varkappa = 0, 1, 2, \cdots\cdots). \tag{6}$$

Setzt man hier speziell $\varkappa = k$, so folgt insbesondere, daß:

$$\mathfrak{M}_k(s_\nu) - \mathfrak{M}_k(s_{\nu-1}) < \frac{A}{\nu}. \tag{7}$$

Nun seien n, n' irgend zwei natürliche Zahlen, und zwar:

$$n' < n,$$

ferner bedeute ν zunächst jede ganze Zahl des Intervalls:

$$n - n' < \nu \leqq n, \tag{8}$$

so gilt für jedes solche ν auf Grund von Ungl. (7) *a fortiori*:

$$\mathfrak{M}_k(s_\nu) - \mathfrak{M}_k(s_{\nu-1}) < \frac{A}{n - n'}. \tag{9}$$

Ersetzt man hier ν, bei vorläufigem Ausschluß der Annahme $\nu = n$ als Anfangswert, der Reihe nach durch $\nu + 1$, $\nu + 2, \cdots n$, so ergibt sich durch Addition der so entstehenden $n - \nu$ Ungleichungen (bzw. im Falle $\nu = n - 1$ als einzige Ungleichung):

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_k(s_n) - \mathfrak{M}_k(s_\nu) &< \frac{n-\nu}{n-n'} \cdot A \\ &< \frac{n'}{n-n'} \text{ (wegen: } n - \nu < n' \text{ nach (8))}, \end{aligned} \tag{10}$$

und diese Ungleichung gilt, wie unmittelbar ersichtlich, auch für den ursprünglich ausgeschlossenen Fall $\nu = n$. Summiert man dieselbe nochmals über die n' Werte $\nu = n - n' + 1$, $n - n' + 2, \cdots n$, so folgt weiter:

$$n' \cdot \mathfrak{M}_k(s_n) - \sum_{n-n'+1}^{n} {}_{\nu}\, \mathfrak{M}_k(s_\nu) < \frac{n'^2}{n-n'} \cdot A$$

und daher:

$$\mathfrak{M}_k(s_n) < \frac{1}{n'} \cdot \sum_{n-n'+1}^{n} {}_{\nu}\, \mathfrak{M}_k(s_\nu) + \frac{n'}{n-n'} \cdot A. \tag{11}$$

Um neben dieser *oberen* Schranke für $\mathfrak{M}_k(s_n)$ eine entsprechende *untere* zu gewinnen, bedeute jetzt zweitens ν jede ganze Zahl des Intervalls:

$$n < \nu < n + n'. \tag{12}$$

Alsdann hat man für jedes solche ν auf Grund von Ungl. (7) *a fortiori*:

$$\mathfrak{M}_k(s_\nu) - \mathfrak{M}_k(s_{\nu-1}) < \frac{A}{n}, \tag{13}$$

und findet hieraus, wenn man ν der Reihe nach durch $\nu - 1$, $\nu - 2$, $\cdots n + 1$ ersetzt und die so entstehenden Ungleichungen zu Ungl. (13) addiert:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_k(s_\nu) - \mathfrak{M}_k(s_n) &< \frac{\nu - n}{n} \cdot A \\ &< \frac{n'}{n} \cdot A \text{ (wegen: } \nu - n < n' \text{ nach (12))}, \end{aligned}$$

und daher:

$$\mathfrak{M}_k(s_n) > \mathfrak{M}_k(s_\nu) - \frac{n'}{n} A. \tag{14}$$

Summiert man diese Ungleichung über die n' Werte: $\nu = n + 1$, $n + 2, \cdots n + n'$ und dividiert das Resultat durch n', so ergibt sich:

$$\mathfrak{M}_k(s_n) > \frac{1}{n'} \sum_{n+1}^{n+n'} {}_{\nu}\, \mathfrak{M}_k(s_\nu) - \frac{n'}{n} \cdot A \tag{15}$$

als die gesuchte *untere* Schranke für $\mathfrak{M}_k(s_n)$.

Nun ist allgemein für $p < q$:

$$\sum_{p+1}^{q} {}_{\nu}\mathfrak{M}_k(s_\nu) = \sum_{0}^{q} {}_{\nu}\mathfrak{M}_k(s_\nu) - \sum_{0}^{p} {}_{\nu}\mathfrak{M}_k(s_\nu)$$
$$= (q+1)\,\mathfrak{M}_{k+1}(s_q) - (p+1)\,\mathfrak{M}_{k+1}(s_p),$$

anders geschrieben:

$$(16)\quad \sum_{p+1}^{q} {}_{\nu}\mathfrak{M}_k(s_\nu) \begin{cases} = (q+1)\{\mathfrak{M}_{k+1}(s_q) - \mathfrak{M}_{k+1}(s_p)\} + (q-p)\,\mathfrak{M}_{k+1}(s_p) \\ = (p+1)\{\mathfrak{M}_{k+1}(s_q) - \mathfrak{M}_{k+1}(s_p)\} + (q-p)\,\mathfrak{M}_{k+1}(s_q). \end{cases}$$

Wendet man die erste dieser Formeln auf die rechte Seite von Ungl. (11), die zweite auf diejenige von Ungl. (15) an, so folgt:

$$(17)\quad \mathfrak{M}_k(s_n) \begin{cases} < \frac{n+1}{n'}\{\mathfrak{M}_{k+1}(s_n) - \mathfrak{M}_{k+1}(s_{n-n'})\} + \mathfrak{M}_{k+1}(s_{n-n'}) + \frac{n'}{n-n'}\cdot A \\ > \frac{n+1}{n'}\{\mathfrak{M}_{k+1}(s_{n+n'}) - \mathfrak{M}_{k+1}(s_n)\} + \mathfrak{M}_{k+1}(s_{n+n'}) - \frac{n'}{n}\cdot A. \end{cases}$$

Nun werde gesetzt:

$$n' = [\varepsilon n], \text{ wo: } 0 < \varepsilon < 1,$$

sodaß also:

$$\lim_{n\to\infty}(n \pm n') = \infty, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n'}{n} = \varepsilon, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n'}{n-n'} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n'} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Da sodann mit Berücksichtigung von Gl. (5):

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{M}_{k+1}(s_{n\pm n'}) = \lim_{n\to\infty}\mathfrak{M}_{k+1}(s_n) = s,$$

so folgt aus (17) für $n \longrightarrow \infty$:

$$(18)\quad \overline{\underline{\lim_{n\to\infty}}}\,\mathfrak{M}_k(s_n) \begin{cases} \leqq s + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot A \\ \geqq s + \varepsilon A \end{cases}$$

und, da es freisteht, ε unbegrenzt zu verkleinern, schließlich in Übereinstimmung mit der zu beweisenden Gleichung (5a):

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{M}_k(s_n) = s,$$

womit der Beweis des fraglichen Satzes erledigt ist.

Zu § 79, Nr. 4 und 5 (S. 611/2).

Zu Nr. 4. Der erste Teil des Multiplikationssatzes (VI), Gl. (18)—(21), S. 611 hat den eigentlichen Anlaß zur Einführung der Cesàroschen Grenzwerte gegeben (Sur la multiplication des séries. Bull. so. math. (2) 24 [1890), p. 114). Er läßt sich dahin verallgemeinern, daß dann, wenn $\sum a_\nu$ und $\sum b_\nu$ *nicht konvergent*, sondern nur *von der Ordnung* k und k' *reduzibel* sind, die nach der Cauchyschen Multiplikationsregel gebildete Reihe $\sum c_\nu$ mindestens *von der Ordnung* $k + k' + 1$ *reduzibel* ist (Cesàro a. a. O. S. 120).

Zu Nr. 5. Der Satz (VII), S. 612, findet sich bei **Hardy** in der schon früher (Anm. zu § 66, S. 944) erwähnten Arbeit über Multiplikation bedingt konvergenter Reihen (Proc. Lond. Math. Soc. (2), 6, [1908], p. 414, Nr. 8).

Zu § 80, Nr. 1 (S. 616).

Die scheinbare Schwierigkeit, welche darin liegt, daß man das unendliche Produkt: $b_0 b_1 \cdots b_\nu \cdots\cdots$ (wo durchweg $|b_\nu| > 0$) auch dann *divergent* nennt, wenn die *Zahlenfolge*:

$$b_0, (b_0 b_1), \cdots (b_0 b_1 \cdots b_\nu), \cdots\cdots$$

nach Null konvergiert, wird beseitigt, wenn man sich entschließt, ein für allemal zwischen der Konvergenz bzw. Divergenz einer beliebigen *Zahlenfolge* und derjenigen eines sogenannten *unendlichen Algorithmus*, d. h. *eines bestimmt vorgeschriebenen, unbegrenzt fortzusetzenden Rechnungsverfahrens* zu unterscheiden und im letzteren Falle die *Konvergenz* etwa in folgender Weise definiert:

> Ein unbegrenzt fortzusetzendes *Rechnungsverfahren*, bei dem die *Null* nicht als beständig wirkender Faktor auftritt[1]), soll nur dann *konvergent* heißen, wenn als *Grenzwert* eine solche bestimmte Zahl zum Vorschein kommt, die auch bei *begrenzter* Anwendung der betreffenden Rechnungsvorschrift auftreten könnte.

---

1) Dieser Zusatz ist unentbehrlich, da ja die *Null* als *Faktor* eine Ausnahmestellung einnimmt. Ein Produkt mit dem Faktor 0 hat immer den Wert 0, mag es ein endliches oder unendliches sein. Durch das Auftreten eines einzigen beständig wirksamen Faktors *Null* wird jedes weitere Rechnungsverfahren illusorisch.

Die *Zahlenfolge*

$$0, (0 \cdot 1), (0 \cdot 1 \cdot 2), \cdots (0 \cdot 1 \cdot 2 \cdots \nu) \cdots\cdots$$

ist fraglos *konvergent* und hat den *Grenzwert* 0. Dagegen hätte es wenig Sinn, das unendliche *Produkt*:

$$0 \cdot 1 \cdot 2 \cdots \nu \cdots\cdots,$$

welches gleichfalls den *Grenzwert* 0 hat, als ein *konvergentes* zu bezeichnen. Für die *Funktionenlehre* erscheint es indessen zweckmäßig, auch unendliche Produkte mit Nullfaktoren in *konvergente* und *divergente* zu sondern: vgl. hierüber § 86, S. 650, Fußn. 1.

Was das Auftreten der *Null* als *Nenner* betrifft, so gilt dies ja schon bei *begrenzten* Rechnungsoperationen zunächst als unzulässig. Wenn es dann späterhin in der Lehre von den *Kettenbrüchen* auf Grund besonderer Konventionen bei *endlichen* Kettenbrüchen gelegentlich zugelassen wird (vgl § 88, Nr. 3, S. 678, § 90, Nr. 2, S. 685), so liegt kein Grund vor, es bei *unendlichen* in entsprechendem Zusammenhange auszuschließen (vgl § 102, Nr. 5, S. 769ff.).

Danach wird man also eine unendliche *Reihe* als *konvergent* bezeichnen, wenn ihre Partialsummen eine *beliebige endliche Zahl* (einschließlich der *Null*) zum Grenzwert haben, und das gleiche Resultat würde auf Grund der obigen Definition sich selbst dann ergeben, wenn man nach dem Vorgange von Cesàro und Carathéodory (vgl. die Anmerkung zu § 26 (S. 927, Fußn. 2, 3)) eine *Zahlenfolge* mit dem Grenzwert $+\infty$ oder $-\infty$ noch zu den *konvergenten* zählt. Dagegen wird ein unendliches *Produkt* mit von Null verschiedenen Faktoren und dem Grenzwerte *Null* ohne irgendwelchen Zweifel als *divergent* zu gelten haben, da ein *endliches* Produkt ohne den Faktor Null *niemals* den Wert *Null* haben kann. Die oben vorgeschlagene Definition für die *Konvergenz* eines unbegrenzt fortzusetzenden Rechnungsverfahrens bewährt sich auch bei der Anwendung auf unendliche *Kettenbrüche*, wie weiter unten in der Anmerkung zu § 97 noch gezeigt wird (s. S. 961).

Zu § 81 (S. 621 ff.).

Gewisse allgemeine Regeln zur Entscheidung von *Konvergenz* und *Divergenz* unendlicher Produkte hat zuerst Cauchy angegeben (Analyse algébrique [1821], Note IX, p. 561 = Oeuvres (2), 3, p. 459). Sie rühren indessen von Coriolis her, wie Cauchy selbst in der Einleitung zu dem genannten Buche (p. VII = Oeuvres, l. c. p. VII) mitteilt. Diese Regeln beruhen auf der Beziehung: $\lg \prod_{0}^{n} b_\nu = \sum_{0}^{n} \lg b_\nu$ und der mit deren Hilfe bewerkstelligten Zurückführung der Untersuchung eines unendlichen *Produktes* auf diejenige einer unendlichen *Reihe* von Logarithmen und nehmen, zumal bei der Ausdehnung auf *komplexe* b_ν, nicht unerhebliche Hilfsmittel der Analysis (Funktionenlehre) in Anspruch (Cauchy, Anal. algébr. p. 572 = Oeuvres, l. c. p. 467. Ausführlicher z. B. bei Stolz-Gmeiner, Einleitung in die Funktionentheorie. II [1905], S. 404 ff.). Weierstraß (Journ. f. Math. 51 [1856], S. 18 ff. = Werke 1, S. 183 ff.) hat gezeigt, daß man die Fundamentalsätze über absolute Konvergenz unendlicher Produkte auch ohne derartige Hilfsmittel streng begründen kann. Die im Anschluß hieran in [3] von mir entwickelte rein elementare Theorie der unendlichen Produkte bildet die Grundlage der in diesem und den folgenden Paragraphen gegebenen Darstellung.

Zu § 83 (S. 632 ff.).

Auch der Beweis für das schließliche Zusammenfallen der auf Grund ihrer Definitionen zunächst vollständig verschiedenartigen Begriffe der *absoluten* und der *unbedingten* Konvergenz wird, zumal im Falle *komplexer* Faktoren, gewöhnlich mit analytischen Hilfsmitteln

geführt, nämlich entweder mit Benützung der Logarithmen komplexer Argumente (s. U. Dini, Annali di Mat. (2), 2 [1870], p. 38; Stolz, Allg. Arithmetik, 2 [1886], S. 238) oder, was in letzter Linie auf dasselbe hinausläuft, mit Hilfe der Darstellung komplexer Zahlen durch trigonometrische Funktionen (s. De Pasquale, Giorn. di Mat. (2), 4 [1897], p. 259; Stolz-Gmeiner, a. a. O. S. 413). Der hier gegebene rein elementare Beweis fällt naturgemäß etwas länger aus, da er die Ergebnisse anderer, verhältnismäßig umfangreicher Untersuchungen nicht in Anspruch nimmt.

Zu § 85 (S. 649).

Die sehr bemerkenswerte, zahlentheoretische Formel (15) rührt von Euler her (Introd. in Anal. inf. I [Lausannae 1748] Cap. XV, p. 225).

Zu § 86 (S. 650ff.).

Der Satz am Schlusse von Nr. 1 (S. 652) wurde zuerst von Cauchy (Anal. algébr. p. 563 = Oeuvres (2), 3, p. 460) wieder mit Hilfe von Logarithmen bewiesen. Eine auf demselben Hilfsmittel beruhende Verallgemeinerung habe ich in [2], S. 482 angegeben (s. z. B. auch Stolz-Gmeiner, a. a. O. S. 436).

Bezieht sich der obige Satz nur auf solche unendliche Produkte $\prod(1+\gamma_\nu)$, bei welchen die (reelle) Reihe $\sum\gamma_\nu$ bedingt *konvergiert*, so lassen sich auch im Falle ihrer *Divergenz* über das Verhalten von $\prod(1+\gamma_\nu)$ bestimmte Angaben machen. Näheres darüber findet man in [3], S. 152ff. Hier möge nur noch das folgende ganz lehrreiche Beispiel Platz finden. Es sei $\alpha > 0$ und $m > \alpha^2$. Die Reihe:

$$\sum_m^\infty{}_\nu \left\{\frac{1}{\sqrt{\nu}-\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\nu}+\alpha}\right\} = 2\alpha \sum_m^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu-\alpha^2}$$

divergiert dann für *jedes* $\alpha > 0$ nach $+\infty$. Andererseits hat man:

$$\prod_m^\infty{}_\nu \left(1+\frac{1}{\sqrt{\nu}-\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{\nu}+\alpha}\right) = \prod_m^\infty{}_\nu \left(1+\frac{2\alpha-1}{\nu-\alpha^2}\right).$$

Dieses Produkt *konvergiert* also nach 1 für den besonderen Wert $\alpha = \frac{1}{2}$, es *divergiert* nach 0 für $\alpha < \frac{1}{2}$, nach $+\infty$ für $\alpha > \frac{1}{2}$ (s. § 82, Nr. 1, S. 627).

Zu § 87 Nr. 2, S. 658ff.

Auf die Möglichkeit, das früher abgeleitete (S. 321, Ungl. (12)) hier unter (5) (S. 659) angeführte Konvergenzkriterium zweiter Art in der Weise zu erweitern, wie in Ungl. (4) angegeben wird, wurde ich durch eine briefliche Mitteilung von Herrn H. Grünholz aufmerksam gemacht.

Abschnitt IV.

Zu § 88, Nr. 4 (S. 677).

Der von mir gebrauchte Ausdruck *„reduzierte Form“* eines Kettenbruches zur Bezeichnung desjenigen (unter Umständen sogar *sinnlosen*) *Bruchsymbols*, welches zustande kommt, wenn man den Kettenbruch *rein formal* durch sukzessives Fortschaffen der Nenner von unten nach oben bzw. von rechts nach links *„reduziert“* (vgl. § 90, Nr. 2, S. 685) findet sich in der Literatur nur in wesentlich anderer Bedeutung. L. Ph. Seidel (Münch. Abh. 2. Kl. 7 [1855], S. 267) bezeichnet nämlich damit die Kettenbruchform: $b_0 - \frac{1|}{|b_1} - \frac{1|}{|b_2} - \cdots - \frac{1|}{|b_n}$, auf welche jeder beliebige Kettenbruch mit von Null verschiedenen Teilzählern vermittelst Äquivalenz-Transformation gebracht werden kann (vgl. § 94, Nr. 4, S. 710, Fußn. 1). Dagegen benützt M. Stern die Bezeichnung *„reduzierter Kettenbruch“* (Journ. f. Math. 10 [1833], S. 4) oder *„reduzierter Wert“* (Lehrbuch der algebraischen Analysis [1860], S. 265) in demselben Sinne, wie hier die Bezeichnung *„reduzierte Form“* gebraucht wird, falls das betreffende *Bruchsymbol* eine bestimmte Zahl vorstellt (d. h. einen von Null verschiedenen Nenner besitzt).

Zu § 90, Nr. 3 (S. 689).

Die Rekursionsformel (I) kann auch dazu dienen, um für jedes einzelne A_ν bzw. B_ν eine *independente* Darstellung zu erhalten. Schreibt man nämlich z. B. die Formel für A_ν folgendermaßen:

$$a_\nu A_{\nu-2} + b_\nu A_{\nu-1} - A_\nu = 0$$

und läßt ihr diejenigen Gleichungen, die entstehen, wenn man der Reihe nach ν durch $2, 3, \cdots (\nu - 1)$ ersetzt, außerdem noch die beiden Anfangsgleichungen von (I) vorangehen (wobei es aus Symmetrierücksichten zweckmäßig ist, der ersten das Minuszeichen zu geben und die zweite in die Form $b_1 A_0 - A_1 = -a_1$ zu setzen), so erhält man das folgende System von $(\nu + 1)$ in $A_0, A_1, \cdots A_\nu$ linearen Gleichungen:

$$\begin{array}{lr}
-A_0 & = -b_0 \\
b_1 A_0 - \quad A_1 & = -a_1 \\
a_2 A_0 + b_2 A_1 - \quad A_2 & = 0 \\
\qquad a_3 A_1 + b_3 A_2 - A_3 & = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_\nu A_{\nu-2} + b_\nu A_{\nu-1} - A_\nu & = 0,
\end{array}$$

aus denen sich jede dieser $\nu + 1$ Unbekannten, insbesondere A_ν selbst nach bekannter Methode bestimmen läßt. Es erscheint dabei A_ν in

Gestalt einer aus $a_1, a_2, \cdots a_\nu$; $b_0, b_1, \cdots b_\nu$ zusammengesetzten *Determinante* (die auch speziell als *Kettenbruchdeterminante* oder *Kontinuante* bezeichnet wird). Da die Benützung dieses Hilfsmittels nicht im Rahmen des vorliegenden Buches liegt, andererseits die *independente* Darstellung der A_ν (bzw. der in analoger Weise darstellbaren B_ν) für die Theorie der Kettenbrüche nur beschränkte Wichtigkeit besitzt, so möge bezüglich der weiteren Ausführung der angedeuteten Methode auf Herrn O. Perrons Lehrbuch[1]): „Die Lehre von den Kettenbrüchen" (Leipzig und Berlin 1913), § 4 (S. 10) verwiesen werden. Daselbst wird übrigens am Schlusse von § 3 noch eine zweite Methode zur independenten Darstellung der A_ν, B_ν angegeben.

Zu § 92, Nr. 1 (S. 695/6).

Vertauscht man in den Formeln (V) ν und ϱ, so folgt zunächst:

$$A_{\nu+\varrho} = A_\varrho A_{\varrho+1,\nu+\varrho} + a_{\varrho+1} A_{\varrho-1} B_{\varrho+1,\nu+\varrho}$$
$$B_{\nu+\varrho} = B_\varrho A_{\varrho+1,\nu+\varrho} + a_{\varrho+1} B_{\varrho-1} B_{\varrho+1,\nu+\varrho}$$

und, wenn man noch ϱ durch $\lambda - 1$ ersetzt:

$$A_{\nu+\lambda-1} = A_{\lambda-1} A_{\lambda,\lambda+\nu-1} + a_\lambda A_{\lambda-2} B_{\lambda,\lambda+\nu-1}$$
$$B_{\nu+\lambda-1} = B_{\lambda-1} A_{\lambda,\lambda+\nu-1} + a_\lambda B_{\lambda-2} B_{\lambda,\lambda+\nu-1}.$$

Diese Formeln erweisen sich als identisch mit den von Herrn Perron als „*Fundamentalformeln*" (Lehrb S. 14, Gl. (24)) bezeichneten, wenn man beachtet, daß die Zähler und Nenner der reduzierten Form des Kettenbruches:

$$b_\lambda + \frac{a_{\lambda+1}|}{|b_{\lambda+1}} + \cdots + \frac{a_{\lambda+\nu-1}|}{|b_{\lambda+\nu-1}}$$

statt, *wie hier*, mit: $A_{\lambda,\lambda+\nu-1}$ von Herrn Perron mit: $A_{\nu-1,\lambda}$
" " " " $B_{\lambda,\lambda+\nu-1}$ " " " " $B_{\nu-1,\lambda}$
bezeichnet werden.

Zu § 97, Nr. 1 (S. 724 ff.).

Der Begriff der *Konvergenz* und *Divergenz* eines unendlichen Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ dürfte sich wohl zuerst bei Stern (Journ. f. Math. 10 [1833], S. 364) durch die *Konvergenz* bzw. (eigentliche *Divergenz*) der Reihe: $\frac{A_0}{B_0} + \sum_1^\infty \left(\frac{A_\nu}{B_\nu} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right)$ einigermaßen ausreichend definiert finden. Stern läßt dabei jedoch die Möglichkeit, daß diese

1) Weiterhin kurz als: „Perron, Lehrb." zitiert.

Reihe *ossillieren,* und zwar insbesondere innerhalb *endlicher* Grenzen *oszillieren* kann, außer acht und hält daher allemal die *Konvergenz* schon für erwiesen, wenn er nur gezeigt hat, daß die Partialsummen der Reihe zwischen zwei endlichen Grenzen bleiben.[1]) Später (Journ. f. Math. 37 [1848], S. 255) hat er seine Ansicht wenigstens insoweit berichtigt, daß er die Möglichkeit des *Oszillierens* innerhalb *endlicher* Grenzen in Betracht zieht. Inzwischen hatte jedoch bereits Seidel (Habilit.-Schrift [München 1846]: Untersuchungen über die Konvergenz und Divergenz von Kettenbrüchen) die fraglichen Begriffe mit genügender Schärfe präzisiert.

Mit Rücksicht darauf, daß bei unendlichen *Produkten* das Auftreten des Grenzwertes 0 als *Divergenz*fall angesehen wird, liegt die Frage nahe, ob es nicht vielleicht angemessen sei, die analoge Festsetzung auch für einen Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ zum mindesten bei durchweg von Null verschiedenen a_ν zu treffen. Man erkennt unmittelbar, daß dies nicht zutrifft, sofern man sich an diejenige Begriffsbestimmung hält, welche in der Anmerkung zu § 80 (S. 956) bezüglich der *Konvergenz* eines unbegrenzt fortzusetzenden *Rechnungsverfahrens* angegeben wurde. Danach ist nämlich das Auftreten des Grenzwertes $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = 0$ in jedem Falle als *Konvergenz* zu betrachten, da auch *endliche* Kettenbrüche mit durchweg von Null verschiedenen Zählern a_ν den Wert 0 haben können. (Einfaches Beispiel: $(K_3) = \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} - \frac{b_2|}{|1}$, wo a_1, a_2, b_1, b_2 ganz beliebige Zahlen, insbesondere: $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$. Man findet: $A_3 = b_2 a_1 - b_2 a_1 = 0$, $B_3 = b_2 b_1 + a_2 - b_2 b_1 = a_2$, also: $K_3 = 0$.)

Herr Perron (Lehrb. S. 21) sagt *„unwesentlich" divergent* statt des hier gebrauchten *„außerwesentlich" divergent* und faßt (wohl nach dem Vorgange von Saalschütz: Journ. f. Math. 120 [1899], S. 139) unter der Bezeichnung *„im weiteren Sinne konvergent"* (Lehrb. S. 232) diejenigen Kettenbrüche zusammen, welche hier (S. 727) als *„höchstens" außerwesentlich divergent* bezeichnet werden.

Zu § 98, Nr. 3 (S. 787).

Den Begriff der *unbedingten* und *bedingten* Konvergenz von unendlichen Kettenbrüchen habe ich in [14], S. 299 eingeführt. Die dort

1) In diesem Sinne zu korrigieren ist eine Ungenauigkeit, die sich in Fußnote 378, S. 127 in meinem Artikel der D. Enc. I A 3 (bzw. der Enc. fr. I 4, 252 en note, p. 294) findet. Es heißt daselbst: Stern rechnet die innerhalb *endlicher* Grenzen *ossillierenden* Kettenbrüche zu den *konvergenten.*

als Grundlage benützte, auf S. 300 unter (12) angeführte Formel geht aus (V′), § 92, Nr. 3 (S. 698) hervor, wenn man $\nu = m$, $\nu + \varrho = n$ setzt und beachtet, daß $A_{m,n}$ a. a. O. diejenige Bedeutung hat, welche bei der in Formel (V′) benützten Bezeichnungsweise $A^*_{m,n}$ heißen würde.

Zu § 102 (S. 760ff.).

Zu Nr. 2, 3 (S. 764). Die Kriterien (II) und (III) rühren von Seidel her (Habilit.-Schrift, München 1846), wurden unabhängig davon auch von Stern (Journ. f. Math. 37 [1848] hergeleitet.

Zu Nr. 4 (S. 767). Das Kriterium (V, A) zuerst bei Stolz (Allg. Arithmetik 2 [1886], S. 284), das Kriterium (V, B) von Saalschütz (Journ. f. Math. 120 [1899], S. 138, Fußn.) ohne Beweis als *hinreichende* und (fälschlich auch) *notwendige* Konvergenzbedingung ausgesprochen, von mir in [16] auf seinen richtigen Umfang eingeschränkt und bewiesen.

Andere, sukzessiver Verschärfung fähige Kriterien für Kettenbrüche aus positiven Zahlen gab Herr Perron (Münch. Sitz.-Ber. 35 [1905], S. 315; s. auch Lehrb. S. 240/1, Satz 12, 13).

Zu § 103, Nr. 5 (S. 778/9).

Der betreffende Äquivalenzbeweis nach G. Cantor, Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre (Journ. f. Math. 84 [1878], S. 242ff., s. insbesondere § 2 und § 6).

Zu § 104 (S. 780ff.).

Zu Nr. 3 (S. 784). Die von mir hier eingeführte Bezeichnung *perfekte* quadratische Irrationalität (bei der das Beiwort *perfekt* nur besagen soll, daß die fraglichen Irrationalitäten vor anderen gewisse ausgezeichnete Eigenschaften voraus haben) war bisher nicht üblich. Herr Perron (Lehrb. S. 79) bezeichnet solche Irrationalitäten als *reduziert*, weil sie als Wurzeln sogenannter *reduzierter* quadratischer *Formen* auftreten. Mir schien diese Bezeichnung nicht recht zweckmäßig, weil die Partizipialform *„reduziert"* die (falsche) Vorstellung erweckt, als könnten andere quadratische *Irrationalitäten* überhaupt *„reduziert"* werden, d. h. durch irgendeinen Transformationsprozeß in solche als *„reduziert"* bezeichnete übergeführt werden.

Zu Nr. 5 (S. 787ff.). Der (wesentlich schwierigere) *erste* Teil des *Hauptsatzes* rührt von Lagrange her (Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques. Mém. Berlin, 24. année [1770] = Oeuvres. 2. p. 606, Nr. 34), der zweite findet sich schon bei Euler

(Introd. in Anal. infinit. [1748], Cap. XVIII, p. 314). Der hier gegebene Beweis des ersten Teils ist im wesentlichen eine vereinfachte Umbildung des Lagrangeschen Beweises (teilweise ähnlich schon bei Serret, Cours d'algèbre supérieure 1 [1885], p. 44; auch bei Perron, Lehrb. S. 74). Einen etwas kürzeren, aber merklich künstlicheren Beweis, der von Charves (Bull. sciences math. (2), [1877], p. 41) herrührt, findet man bei Perron, Lehrb. S. 77. Einen dritten (in letzter Linie mit dem Lagrangeschen verwandten) Beweis liefert die Theorie der quadratischen Formen (s. Lejeune-Dirichlet, Vorl. über Zahlentheorie, herausg. von R. Dedekind, 3 Aufl. [Leipzig 1872], S. 189ff.).

Zu Nr. 7—9 (S. 792ff.). Die Sätze von Nr. 7 und 8 stammen von Galois (Gergonne Annales 19 [1828/29], p. 204), der erste Teil des Satzes von Nr. 9 von Legendre (Théorie des nombres [Paris 1830], p. 55).

Zu § 105 (S. 799ff.).

Der Inhalt dieses Paragraphen beruht im wesentlichen auf zwei Noten, welche von Liouville zuerst in Bd. 18 [1844] der Par. C. R. (p. 883; 910) veröffentlicht und mit einigen Zusätzen in Bd. 16 [1851] des Journ. de math. (S. 133) wieder abgedruckt worden sind.

Zu § 106 (S. 804ff.).

Zu Nr. 2 (S. 806). Die *Nebennäherungsbrüche* (s. Gl. (12)) wurden unter der Bezeichnung „mittelbare Näherungsbrüche" zuerst von Stern in dem vorliegenden Zusammenhange eingeführt (Journ. f. Math. 10 [1833], S. 368; auch: Algebr. Anal. S. 304). Weitere historische Notizen s D. Enc. I A 3, S. 125, Fußn. 370 (Enc. fr. I 4, p. 291, note 242).

Zu Nr. 3 (S. 808). Die Bedingung (1), S. 804 als hinreichend für die Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{\alpha_1}{\beta_1}, -\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_2^\infty$ wurde zuerst von Stern angegeben, und zwar für ganzzahlige α_ν, β_ν mit unzulänglichem Beweis (wegen Nichtbeachtung der Möglichkeit des Oszillierens — vgl. die Anmerkung zu § 97, S. 960/1) schon 1833 (Journ. f. Math. 10, S. 366), vollständig erst 1860 in der Algebr. Anal. S. 301. Für den Fall $\alpha_\nu = 1$ findet sie sich schon bei Seidel (Abh. Bayr. Akad., 2. Kl., 7 [1855], S. 582).

Zu § 107, Nr. 1 (S. 812).

In der Encyklopädie (D. Ausg. I A 3, S. 126) habe ich für die hier als *„negativ-regelmäßig"* bezeichneten Kettenbrüche die Benennung *„reduziert-regelmäßig"* (Enc. fr. I 4, p. 292: fractions continues régulières-

réduites) eingeführt, da sie eine spezielle Gattung desjenigen Kettenbruchtypus bilden, welcher nach dem Vorgange von Seidel als *reduzierte Kettenbruchform* bezeichnet wurde: vgl. die Anmerkung zu § 88 (S. 959). Da aber hier die Bezeichnung „*reduzierte Form*" beständig in ganz anderer Bedeutung gebraucht wird, schien es durchaus unzweckmäßig, das Beiwort „*reduziert*" in dem vorliegenden Zusammenhange noch beizubehalten, zumal das jetzt eingeführte „*negativ*" weit charakteristischer erscheinen dürfte.

Zu § 108 (S. 820ff.).

Das Kriterium am Schlusse von Nr. 1 (S. 823) wurde für den speziellen Fall $\varepsilon_\nu = -1$ von Stern (s. die Anmerkung zu § 106, Nr. 3) abgeleitet, für beliebige, auch komplexe ε_ν mit dem Absolutwert 1 in [14] (S. 813) von mir bewiesen.

Die auf S. 833 am Schlusse von Nr. 7 und im Zusatze zu dieser Nummer angegebenen Konvergenzbedingungen (I)—(III) stammen von H. Tietze (Math. Ann. 70 [1901], s. insbesondere S. 257, Satz 6). Sein Beweis beruht auf einer von F. Klein (Göttinger Nachr. 1895, S. 257) herrührenden geometrischen Deutung der Näherungsbrüche eines Kettenbruches. Die hier benützte, auf der Extension des betreffenden Kettenbruches beruhende Beweismethode findet sich bei Perron, Lehrb. S. 242.

Die Behauptung, daß schon die den Kriterien (I)—(III) zugrunde liegenden *Haupt*bedingungen, nämlich:

$$\varepsilon_\nu = \pm 1 \begin{cases} \beta_\nu \geqq \alpha_\nu > 0 \\ \beta_\nu \geqq \alpha_{\nu+1}, \text{ wenn: } \varepsilon_{\nu+1} = -1, \end{cases}$$

ohne die auf die Divergenz der in (I)—(III) angegebenen Reihen bezügliche *Zusatz*bedingung, für die *Konvergenz* des Kettenbruches $\left[\frac{\varepsilon_\nu \alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$ *hinreichend* seien, findet sich mit der Beschränkung auf *ganzzahlige* α_ν, β_ν schon bei Stern (Journ. f. Math. 10 [1833], S. 386, letzter Absatz). Mit dieser Beschränkung ist sie auch tatsächlich richtig, da ja in diesem Falle die Reihe $\sum \alpha_\nu$ *eo ipso* divergiert, das Kriterium (I) also *vollständig* erfüllt ist. Der von Stern gegebene Beweis leidet aber wieder an dem bereits zuvor (Anm. zu § 97, § 106) bezeichneten Fehler.

Konvergenzkriterien für den Fall $\varepsilon_\nu = (-1)^\nu$ (für sog. *alternierende* Kettenbrüche) gaben A. Gmeiner (Monatsh. f. Math. 1903, S. 261 und Wiener Sitz.-Ber. 1908, S. 27; s. auch Stolz-Gmeiner, Einl. in die Funktionentheorie, II, S. 583ff) und, in allgemeinerer, die eben genannten Kriterien als Spezialfälle umfassender Form, O. Perron (Münch. Sitz.-Ber. 1911, S. 205; s. auch Lehrb. S. 246).

Zu § 109 (S. 885 ff.).

Die *Irrationalität* des Wertes *regelmäßiger* unendlicher Kettenbrüche war schon Euler bekannt (vgl. De fractionibus continuis dissertatio. Comment. Acad. Petrop. IX ad annum 1737, p. 108). Den Gedanken, auch andere als regelmäßige Kettenbrüche zu Irrationalitätsbeweisen zu benützen, verdankt man Lambert, der auf diesem Wege, und zwar mit einer für die damalige Zeit (1767) geradezu erstaunlichen Strenge des Konvergenzbeweises zuerst die Irrationalität von π erwiesen hat (Histoire de l'Académie royale [Berlin, année 1761], p. 265—322). Näheres hierüber findet man in [15], S. 325 ff.

Legendre (Éléments de géométrie, 4[ième] éd. [1806], note IV) hat den nach ihm benannten Irrationalitätssatz folgendermaßen ausgesprochen:

> Bedeuten m, n, m', n' etc. ganze positive oder negative Zahlen von der Art, daß $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}, \cdots\cdots$ echte Brüche sind, so hat der Kettenbruch $\frac{m|}{|n} + \frac{m'|}{|n'} + \frac{m''|}{|n''} + \cdots\cdots$ einen irrationalen Wert.

Sein Beweis, der wesentlich auf der Voraussetzung der *Konvergenz*, ja sogar der *unbedingten* Konvergenz der betreffenden Kettenbrüche beruht, mußte völlig unverbindlich bleiben, solange diese nicht erwiesen war, was selbst für die besonderen Fälle durchweg *positiver* bzw. durchweg *negativer* $m, m', m'', \cdots\cdots$ (bei durchweg *positiven* $n, n', n'', \cdots\cdots$) erst um die Mitte des vorigen Jahrhunderts geschah (vgl. die Anmerkungen zu § 102, S. 962 und § 106, S. 963), für den allgemeinen Fall beliebig bezeichneter $m, m', m'', \cdots\cdots$ erst durch den Satz von § 108, Nr. 1 erledigt wurde.

Daß für die *Irrationalität* des Kettenbruches $\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right]_1^\infty$, falls die α_ν, β_ν durchweg ganze *positive* Zahlen bedeuten, schon die Bedingung $\beta_\nu \geqq \alpha_\nu$ (statt $\beta_\nu \geqq \alpha_\nu + 1$) ausreichend ist, wurde zuerst von Stern (Journ. f. Math. 11 [1834], S. 38, II) gezeigt, zunächst freilich auf der Grundlage eines unzulänglichen Konvergenzbeweises (Journ. f. Math. 10 [1833], S. 365), der aber später (1848) durch das in der Anmerkung zu § 102, Nr. 2 (S. 962) erwähnte Konvergenzkriterium die erforderliche Vollständigkeit gewann.

Späterhin hat Stolz, wie es scheint völlig unabhängig von Stern, den gleichen Satz bewiesen (s. Allg. Arithm. 2 [1886], S. 297).

Auch die Fassung des Irrationalitätssatzes von Nr. 2 (S. 839) (welche den Legendreschen und Stern-Stolzschen als spezielle Fälle

enthält) findet sich mit unzulänglichem Konvergenzbeweis bereits bei Stern (Journ. f. Math. 11 [1834], S. 40, erster Absatz), wurde aber erst von Tietze vermittelst seines Konvergenzkriteriums (I) (s. die Anmerkung zu § 108) sichergestellt.

Zu § 111 (S. 846ff.).

Die Divergenzbedingung 1) des Satzes (I), S. 846, einschließlich der in Fußn. 1 angegebenen Verallgemeinerung, stammt nach Perron (Lehrb. § 49, S. 233, Satz 4) von K. E. Broman (Om konvergensen och divergensen af kedjebråk. Dissert. Upsala 1877); die Divergenzbedingung 2) für reelle b_ν von Stern (Algebr. Anal. S. 297), für komplexe b_ν von Stolz (Allg. Arithm. 2, S. 279).

Die Grundlage für den übrigen Inhalt dieses Paragraphen bildet die Abhandlung von E. B. van Vleck: On the convergence of continued fractions with complex elements (Transact. Am. Math. Soc. 2 [1901]), und zwar entspricht im wesentlichen Satz (II) des vorliegenden Textes (S. 849/50) dem dortigen Theorem 1 (a. a. O. S. 221/2), der auf die Voraussetzungen 1a), 1b) bezügliche Teil des Satzes (IV) (S. 853) dem Theorem 6 (a. a. O. S. 229) und der auf die Voraussetzung 2) bezügliche Teil des nämlichen Satzes dem Theorem 3 (a. a. O. S. 223). Die Beweise wurden nach dem Vorgange von J. L. W. V. Jensen (Bidrag til kaedenbrøkernes Teori. Festskrift til H. G. Zeuthen. København 1909, p. 80) vervollständigt und vereinfacht. Die von Jensen geforderte Bedingung, daß mindestens für *einen* Index ν gleichzeitig $b_\nu \neq 0$, $b_{\nu+1} \neq 0$, wurde nach Perron (Lehrb. S. 264) durch die geringere ersetzt, daß mindestens *ein* $b_{2\nu+1} \neq 0$.

Betreffs der geometrischen Deutung des an die Äquivalenzformel (88) (S. 859) anzuknüpfenden Konvergenzkriteriums findet man das Nähere am Schlusse der oben angeführten Jensenschen Arbeit und bei Perron, Lehrb. S. 268, Satz 34.

Zu § 112, 113 (S. 860ff.).

Den Hauptsatz von § 112, Nr. 1 (S. 860), § 113, Nr. 1 (S. 872/3) habe ich früher in [20], S. 369 (mit dem Unterschiede in der Bezeichnung, daß dort $\frac{1}{p_\nu}$ an Stelle von ϑ_ν steht) aus dem zuvor (in [14], S. 312[1])) bewiesenen „Differenzen"kriterium $|b_\nu| - |a_\nu| \geq 1$ abgeleitet, während hier die umgekehrte Reihenfolge (mit dem Wege über die *zweite Hauptform*) eingeschlagen wurde. Die Veranlassung zu dieser

1) Infolge eines Druckfehlers steht a. a. O:

$$|a_\nu| - |b_\nu| \geq 1.$$

veränderten Anordnung ist aus [25], § 1, Nr. 1 zu ersehen, und ihre Zweckmäßigkeit scheint mir durch den Erfolg bestätigt zu werden. Jener Hauptsatz gewinnt dabei erst die ihm zukommende zentrale Stellung, während das Differenzenkriterium nur als gleichberechtigtes Glied einer Gruppe speziellerer Kriterien erscheint.

Zu § 112, Nr. 1 (S. 860). Der in Fußnote 2) angeführte Spezialfall des Hauptsatzes liefert ein von E. B. van Vleck (Transact. Am. Math. Soc. 2 [1901], p. 481) abgeleitetes Konvergenzkriterium, wenn gesetzt wird $\vartheta_1 = 1$ und im übrigen: $\vartheta_\nu = 1 - r_\nu$, wo: $0 < r_\nu < 1$. (Vgl. [18], S. 378.)

Zu § 113, Nr. 1 (S. 872). Das Kriterium (I) findet sich für *reelle negative* a_ν und *positive* b_ν ohne Beweis (und mit der Einschränkung: Existenz eines bestimmten $\lim\limits_{n\to\infty} \vartheta_n$) schon bei O. J. Malmstén: Öfvers. Vetensk.-Akad. Förhandl. 5 [Stockholm 1848], p. 191; auch: Cambr. Dublin math. Journ. 5 [1850], p. 288/4.

Zu § 113, Nr. 2 (S. 874). Die unter (E) angegebene Konvergenzbedingung $\sum\limits_1^\infty \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| \leqq 1$ findet sich für *reelle negative* a_ν und *positive* b_ν schon bei Stern: Göttinger Nachr 1863, S. 163. Für *beliebige* a_ν, b_ν wurde sie (mit Ausschluß des Grenzfalles der Gleichheit) von Helge von Koch auf Grund funktionentheoretischer Betrachtungen und mit Benützung unendlicher Determinanten bewiesen (Bull. Soc. math. de France 23 [1895], p. 37). Erweiterte Formen dieses Kriteriums hat O. Szász angegeben (Münch. Sitz.-Ber. 1912, S. 314ff. und 1915, S. 281ff.).

Zu § 113, Nr. 3 (S. 876). Das Kriterium (F) findet sich in der Form der Fußnote 1 bei M. von Pidoll (Beiträge zur Lehre von der Konvergenz unendlicher Kettenbrüche. Dissert. München 1912). Doch ist es nicht, wie dort behauptet wird, vollständig äquivalent mit dem Hauptsatze von Nr. 1, sondern, wie schon die hier in Nr. 3 gegebene Herleitung zeigt, ein besonderer Fall jenes Hauptsatzes, der ja nur eine Vorschrift für die $\left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right|$, aber keinerlei Einzelvorschriften für die $|a_\nu|$, $|b_\nu|$ enthält. Mit Benützung der *Kontraktion* des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ (vgl. § 96, Gl. (9), S. 720) leitet Herr von Pidoll aus dem eben erwähnten Kriterium, sowie aus dem ursprünglichen Hauptsatze noch verschiedene andere Kriterienformen ab (a. a. O. S. 14—18).

Zu § 114 (S. 880ff.).

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Konvergenz *periodischer* Kettenbrüche mit komplexen Gliedern wurden zuerst

von O. Stolz (Allg. Arithm. II [1886], S. 299 und Innsbr. Ber. 1887/8, S. XVIII), sodann mit gewissen Vervollständigungen (durch passende Modifikation einer von G. Landsberg für periodische Kettenbrüche aus reellen rationalen Zahlen angewendeten Methode) von mir abgeleitet (s [18], S. 463). Eine dritte Methode, bei der insbesondere gewisse bei Stolz gänzlich unvermittelt auftretende und nur nachträglich verifizierte Grundformeln eine naturgemäße Herleitung erfahren, hat Herr Perron angegeben (Münch. Sitz.-Ber. 35 [1906], S. 495). In allen drei Bearbeitungen des vorliegenden Gegenstandes enthalten die Konvergenzbedingungen als wesentlichen Bestandteil die (im allgemeinen) *irrationalen* Wurzeln der quadratischen Gleichung (I) (S. 882), wie am Schlusse von Nr. 6 (S. 893) zu ersehen ist. Die am Schlusse von Nr 9 (S. 899) mitgeteilte merklich vervollkommnete, nämlich nur von *rationalen* Verbindungen der Kettenbruchglieder abhängende Form der Konvergenzbedingungen hat Herr von Pidoll (Dissert. S. 19ff.) abgeleitet. Die hier gegebene, im wesentlichen in [24] von mir veröffentlichte Darstellung beruht auf Vereinfachung und gleichzeitiger Vervollständigung der früher von mir benützten Methode und liefert außer der Herleitung der genannten durchaus verschiedenen Bedingungsformen zugleich eine vollkommene Einsicht in deren inneren Zusammenhang.

Die am Schlusse der Hauptsätze von Nr. 6 und 9 erwähnte besondere Art der *Oszillation* wurde zuerst von T. N. Thiele (Tidskr for Math. (4), 3 [1879], S. 70) bemerkt.

Der für *regelmäßige* periodische Kettenbrüche in § 104, Nr. 8 (S. 793/5) bewiesene Galoissche Satz über den Zusammenhang eines *rein periodischen* Kettenbruches mit dem durch *Inversion* der Perioden daraus hervorgehenden läßt sich auch auf periodische Kettenbrüche mit beliebigen Gliedern übertragen: s. [18], S. 482.

Zu § 115 (S. 903ff.).

Die Konvergenz bzw. höchstens außerwesentliche Divergenz *eingliedrig limitär periodischer* Kettenbrüche von der Form $\left[\frac{a_\nu x}{1}\right]_1^\infty$ wurde zuerst von E. B. van Vleck bewiesen (Transact. Am. Math. Soc. 4 [1904], p. 253), auf der Grundlage eines Poincaréschen Satzes über das infinitäre Verhalten der Lösungen einer linearen Rekursionsformel. Einen in [22] von mir gegebenen direkteren und einfacheren Beweis hätte ich in dem vorliegenden Zusammenhange nur soweit verwerten können, um zu zeigen, daß ein Kettenbruch von der Form $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$, wo $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu = a$, *höchstens außerwesentlich divergiert*, während a. a. O. mit Benützung *funktionentheoretischer* Hilfsmittel nachgewiesen wird, daß für Kettenbrüche

von der Form $\left[\frac{a_\nu x}{1}\right]_1^\infty$, wo $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu = a$, die *Konvergenz* in einem genau zu umschreibenden Sinne die *Regel*, die (außerwesentliche) *Divergenz* eine in bestimmtem Umfange auf eine endliche Anzahl von Fällen beschränkte *Ausnahme* ist. An die Stelle dieses Ergebnisses hatte hier der direkte Nachweis zu treten, daß unter gewissen genau anzugebenden Bedingungen der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ wirklich allemal *konvergiert*.

Nun hat Herr Perron für Kettenbrüche von der allgemeineren Form $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ einen Satz bewiesen (Lehrb. S. 280, Satz 40; s. auch: von Pidoll, Dissert. S. 36), welcher in seiner Übertragung auf die hier zunächst behandelte Kettenbruchform $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ besagt, daß solche Kettenbrüche, auch wenn *nicht* geradezu: $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu = a$ ist, sondern nur die a_ν für hinlänglich große ν *in einer gewissen Nähe* einer bestimmten Zahl a liegen, ganz analoge Konvergenzeigenschaften besitzen, wie die limitär periodischen, welche dann lediglich einen speziellen Typus dieses allgemeineren bilden. Fassung und Beweis dieses Satzes habe ich in [25] merklich vereinfacht; Herr O. Szász (Münch. Sitz.-Ber. 1919, S. 395) hat sodann noch eine weitere Vervollkommnung daran vorgenommen, welche der hier gegebenen Darstellung zugrunde liegt. Übrigens erscheinen diese Betrachtungen über „nahezu periodische“ Kettenbrüche als spezieller Fall allgemeinerer Untersuchungen, welche Herr Szász unter dem Titel: „Über die Erhaltung der Konvergenz unendlicher Kettenbrüche bei independenter Veränderlichkeit aller ihrer Elemente“ veröffentlicht hat (Journ. f. Math. 147 [1917], S. 132—160).

Sachregister zu Abteilung I—III.

Die Ziffern beziehen sich auf die Seitenzahlen, und zwar:

1—292 auf Abteilung I,
293—514 „ „ II,
515—969 „ „ III.

F. bedeutet Fußnote

Berichtigung einiger Druckfehler.

S. 182, Kolumnentitel, lies: Nr. 2 (statt: Nr. 1).
S. 203, Textzeile 2 von unten, lies: S 171 (statt· S. 172).
S. 351, Kolumnentitel, lies: Nr. 7 (statt: Nr. 6)
S. 352, Fußnote 1, lies: § 85, Nr. 3, S 650 (statt: § 83, Nr. 3).
S 356, Textzeile 7 von unten, das Wort „wiederum" zu streichen.
S. 367, Fußnote 1, lies: § 85, Nr. 3, S 661 (statt: § 85, Nr. 1).
S. 378, Ungl. (4), setze: $\geqq \varrho > 0$ (statt: > 0).
S. 521, Textzeile 10 von oben, lies: S. 24 (statt: S 21)

